Calcul différentiel – TD 2

Chemins différentiables

Exercice 1. Question de cours. Soit X un espace affine normé et $f : \mathbb{R} \to X$, et $t_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de «f est différentiable en t_0».

Correction. f est différentiable en t_0 si et seulement si la limite suivante existe, pour un vecteur $v_0 \in E$, où E est l'espace vectoriel associé à X :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = v_0$$

Exercice 2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme du sup. On notera

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

où $f_j : I \to \mathbb{R}$. Montrer que f est différentiable dans I si et seulement si ses composantes f_j le sont, et que la dérivée de f en tout point de I est égale au vecteur des dérivées des composantes.

Correction. Il est clair qu'une fonction $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ tend vers un vecteur $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ lorsque $t \to t_0$ si et seulement si chaque $g_i(t)$ tend vers v_i : en effet

$$\|g(t) - v\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |g_i(t) - v_i|$$

donc

1. si $\|g(t) - v\|_\infty \to 0$, on a $|g_i(t) - v_i| \to 0$ car $|g_i(t) - v_i| \leqslant \|g(t) - v\|_\infty$,
2. et réciproquement, si chaque $|g_i(t) - v_i| \to 0$, quand $t \to t_0$, alors (par exemple) la somme $\sum_{i=1}^n |g_i(t) - v_i|$ tend aussi vers 0, par théorème d'opérations sur les limites. Puisque $\|g(t) - v\|_\infty$ est majorée par cette somme, elle tend aussi vers 0. Bien entendu c'est pour cette réciproque qu'on a utilisé que n est un nombre fini !

Il suffit maintenant d'appliquer ceci au taux d'accroissement

$$g(t) := \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

pour obtenir le résultat voulu.

Exercice 3. On considère le chemin $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$f(t) = (\cos t, \sin t)\,.$$

1. Tracer l'image du chemin f dans $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que f est différentiable sur $]0, 2\pi[$
3. Tracer le vecteur vitesse en un point générique $t \in]0, 2\pi[$
4. Montrer que pour tous $a < b$ dans $[0, 2\pi[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que f est tangente en c à une droite de vecteur directeur $v = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. *[Pour ne faire aucun calcul trigonométrique, on pourra considérer le produit scalaire entre v et $f(t)$ et comparer ses valeurs en a et b.]* Comparer avec l'égalité des accroissements finis.

Correction.

1. Cercle de rayon 1 centré à l'origine.
2. Il suffit de voir que chaque composante est différentiable (cf exercice 2).
3. C'est le vecteur orthogonal à $f(t)$, donc tangent au cercle au point $f(t)$.
4. La tangente étant orthogonale à $f(t)$, la condition demandée est réalisée lorsqu'on annule la fonction $t \mapsto \langle v, f(t)\rangle$ pour un $t \in]a, b[$. Pour simplifier, posons

$$g(t) := (b-a)\langle v, f(t)\rangle, .$$

On a $g(t) = \langle f(b), f(t)\rangle - \langle f(a), f(t)\rangle$. Donc

$$g(a) = \langle f(b), f(a)\rangle - 1 \quad \text{et} \quad g(b) = 1 - \langle f(a), f(b)\rangle = -g(a)\,.$$

Donc $g(a)$ et $g(b)$ ont des valeurs opposées, et non nulle puisque $\langle f(a), f(b)\rangle < 1$ si $a \neq b$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue, on en déduit qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$: CQFD.

On a donc une version faible du théorème des accroissements finis : on ne peut pas en général trouver un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = v$ (si $a \sim 0$ et $b \sim 2\pi$, v est arbitrairement petit), mais on a obtenu un c tel que $f'(c)$ est *colinéaire* à v.

Remarque : on peut aussi directement choisir $c = (a+b)/2$! (mais c'est moins *amusant*...)

Exercice 4. On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites de carré sommable, c'est-à-dire

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \iff \sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2 < +\infty\,.$$

On rappelle que c'est un espace vectoriel normé pour la norme $\|x\| = \left(\sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2\right)^{1/2}$.
Fixons $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On définit l'application

$$f : [0, +\infty[\ni t \mapsto f(t) = (e^{-nt} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

1. Montrer que $\forall t \geqslant 0$, $f(t) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Pour chaque $t \geqslant 0$, on note $y(t) = (y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue en dérivant les termes de la suite $f(t)$. Montrer que $y(t) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ si $t > 0$.

3. Montrer que f est dérivable en tout réel $t > 0$, de dérivée égale à $y(t)$. *[On pourra utiliser une formule de Taylor à l'ordre 2 pour $x \mapsto e^x$.]*

Correction.

1. Il suffit de remarquer que $\left|e^{-nt}\right| \leqslant 1$.
2. On trouve $y_n(t) = -ne^{-nt}x_n$. Pour $t > 0$, par croissance comparée, la suite $-ne^{-nt}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, donc est bornée, ce qui implique que $y \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
3. On considère la différentre entre le taux d'accroissement et y :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} - y = \left((\frac{e^{-nh} - 1}{h} + n)e^{-nt}x_n \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

On veut montrer que sa norme tend vers 0. Cette norme est égale à

$$\sum_{n \geqslant 0} \left| \left(\frac{e^{-nh} - 1}{h} + n \right) e^{-nt}x_n \right|^2$$

Comme on est en train de comparer $e^{-nh} - 1$ avec sa dérivée, il est naturel d'utiliser une formule de Taylor à l'ordre 2 pour e^x :

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t \,\mathrm{d}t$$

et $\left|\int_0^x (x-t)e^t \,\mathrm{d}t\right| \leqslant e^{|x|} \left|\int_0^x (x-t) \,\mathrm{d}t\right| = \frac{x^2}{2}e^{|x|}$. Donc, posant $x = -nh$,

$$\left|e^{-nh} - 1 - nh\right| \leqslant \frac{n^2h^2}{2}e^{|nh|},$$

et donc

$$\left| \left(\frac{e^{-nh} - 1}{h} + n \right) e^{-nt}x_n \right| \leqslant h\frac{n^2}{2}e^{-n(t-|h|)} \qquad (1)$$

Pour $t > 0$ fixé et h proche de 0, par exemple $|h| < t/2$, on a $\frac{n^2}{2}e^{-n(t-|h|)} \leqslant \frac{n^2}{2}e^{-nt/2}$, et la suite $n \mapsto \frac{n^2}{2}e^{-nt/2}$ tend vers 0 donc est bornée, lorsque $n \to \infty$. Donc la suite de terme général $e^{-nt/2}\frac{n^2}{2}x_n$ est dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. En multipliant par h, on voit que la suite de terme général (**??**) est bornée par h fois une suite constante dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, elle tend donc bien vers 0 pour la norme de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, lorsque $h \to 0$.