Calcul différentiel – TD 2

Chemins différentiables

Exercice 1. Question de cours. Soit X un espace affine normé et $f : \mathbb{R} \to X$, et $t_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de «f est différentiable en t_0».

Exercice 2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme du sup. On notera

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

où $f_j : I \to \mathbb{R}$. Montrer que f est différentiable dans I si et seulement si ses composantes f_j le sont, et que la dérivée de f en tout point de I est égale au vecteur des dérivées des composantes.

Exercice 3. On considère le chemin $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$f(t) = (\cos t, \sin t)\,.$$

1. Tracer l'image du chemin f dans $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que f est différentiable sur $]0, 2\pi[$
3. Tracer le vecteur vitesse en un point générique $t \in \,]0, 2\pi[$
4. Montrer que pour tous $a < b$ dans $[0, 2\pi[$, il existe $c \in \,]a, b[$ tel que f est tangente en c à une droite de vecteur directeur $v = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. *[Pour ne faire aucun calcul trigonométrique, on pourra considérer le produit scalaire entre v et $f(t)$ et comparer ses valeurs en a et b.]* Comparer avec l'égalité des accroissements finis.

Exercice 4. On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites de carré sommable, c'est-à-dire

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2 < +\infty\,.$$

On rappelle que c'est un espace vectoriel normé pour la norme $\|x\| = \left(\sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2\right)^{1/2}$. Fixons $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On définit l'application

$$f : [0, +\infty[\, \ni t \mapsto f(t) = (e^{-nt} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

1. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Pour chaque $t \geqslant 0$, on note $y(t) = (y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue en dérivant les termes de la suite $f(t)$. Montrer que $y(t) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ si $t > 0$.
3. Montrer que f est dérivable en tout réel $t > 0$, de dérivée égale à $y(t)$. *[On pourra utiliser une formule de Taylor à l'ordre 2 pour $x \mapsto e^x$.]*