Calcul différentiel – TD 1

Chemins dans un espace vectoriel normé

Exercice 1. Question de cours. Soit E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R} \to E$. Rappeler la définition de «f est continue en t_0».

Correction. f est continue en t_0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que : « si $s \in I$ est tel que $|t_0 - s| < \alpha$, alors $\|f(t_0) - f(s)\| < \varepsilon$ ».

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R} \to E$. En appliquant la définition du cours (exercice 1), montrer que si f est continue en 0, alors pour toute suite $t_k \to 0$, on a $\|f(t_k) - f(0)\| \to 0$.

Correction.

1. Soit (t_k) une suite tendant vers 0. Donc pour tout $\delta > 0$ on peut trouver un $K \in \mathbb{N}$ tel que $|t_k| \leqslant \delta$ pour tous $k \geqslant K$.
2. On veut montrer que $\|f(t_k) - f(0)\| \to 0$: autrement dit, on se donne un $\varepsilon > 0$ arbitraire et on veut trouver un $K \in \mathbb{N}$ tel que $\|f(t_k) - f(0)\| < \varepsilon$ pour tous $k \geqslant K$.
3. Or, pour ce même ε, on applique la définition de continuité de f en 0, ce qui fournit un $\alpha > 0$ tel que $\|f(t) - f(0)\| < \varepsilon$ dès lors que $|t - 0| < \alpha$.

La conclusion voulue est donc obtenue si on s'assure que $|t_k| < \alpha$ pour $k \geqslant K$. Il suffit donc de choisir le δ ci-dessus (point 1) égal à α. Ce point 1 nous fournit un K, et on voit que ce K vérifie bien le point 2, CQFD.

Exercice 3. Soit $\ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels.

1. Montrer que $E := \ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_n |x_n|$ est une norme sur E, qu'on notera $\|(x_n)\|_\infty$.
3. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to E$ définie par

$$t \mapsto f(t) := (e^{-nt^2})_{n\in\mathbb{N}} \,.$$

   Montrer que f n'est pas continue en 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Correction.

1. On peut clairement additionner terme à terme deux suites bornées $x, y \in E$, ce qui donne une nouvelle suite bornée $z = x + y$, car $|z_n| = |x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$. Cette addition est clairement une loi de groupe abélien (commutative, associative, élément neutre = la suite nulle (qui est bien bornée !), l'opposé de x est la suite $-x = (-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
   La loi externe $\mathbb{R} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ est bien sûr donnée par la multiplication terme à terme par le scalaire λ :
   $$(\lambda \cdot x)_n = \lambda x_n.$$
   La suite $\lambda \cdot x$ est bien bornée (le vérifier !) et on vérifie les 4 axiomes : distributive à gauche et à droite, 1 est élément neutre, et associative pour les scalaires (ce qui s'écrit $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$: de façon équivalente, on peut dire que cette loi définit une action du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur E.)
2. Il suffit de vérifier les 3 axiomes de la norme. L'homogénéité est claire. Pour la séparation : si $\sup_n |x_n| = 0$, alors par définition du sup, tous les $|x_n|$ sont $\leqslant 0$, et donc nuls. Pour l'inégalité triangulaire, attention à la rédaction. Par exemple :
   Pour tous n, $|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$. Or $|x_n| \leqslant \sup_n |x_n|$ et de même pour $|y_n|$. Donc pour tous n,
   $$|x_n + y_n| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$
   Donc $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble des $|x_n + y_n|$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on a bien
   $$\|x + y\|_\infty = \sup |x_n + y_n| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$
3. Si f était continue en 0, on devrait avoir $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$, la limite étant comprise au sens de la norme sur E (voir exercices 1 et 2), c'est-à-dire
   $$\lim_{t\to 0} \|f(t) - f(0)\|_\infty = 0$$
   Or, la suite $f(0)$ est la suite constante ($x_n = 1$). Donc la suite $f(t) - f(0)$ est la suite $(x_n(t) - 1)_{n\in\mathbb{N}} = (e^{-nt^2} - 1)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc pour tout entier k,
   $$\|f(t) - f(0)\|_\infty = \sup_n |x_n(t) - 1| = \sup_n \left|e^{-nt^2} - 1\right| \geqslant \left|e^{-kt^2} - 1\right|$$
   Or, si $t \neq 0$, $e^{-kt^2} - 1 \to -1$ quand $k \to \infty$. Donc, en passant à la limite $k \to \infty$ on en déduit que, pour tout $t \neq 0$, $\|f(t) - f(0)\|_\infty \geqslant 1$. On ne peut donc pas avoir $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 1 est naturellement un espace affine. Donner une norme sur l'espace vectoriel associé.

Correction. On rappelle que si X est un espace affine, et si $x \in X$, les élément de l'espace vectoriel associé sont les différences $y - x$, pour $y \in X$.
On remarque que la différence de deux suites tendant vers 1 est une suite tendant vers 0, et que l'espace E des suites tendant vers 0 est bien un espace vectoriel (le vérifier !).
Plus précisément, en choisissant par exemple $x=$ la suite constante égale à 1, on a bien $x \in X$, et (le vérifier)

$$X = \{x\} + E\,.$$

Donc X est bien un espace affine associé à E.
Comme E est un sous espace des suites bornées de l'exercice 3, on peut munir E de la même norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to E$ est *affine* si elle s'écrit

$$f(t) = x_0 + t \cdot u_0\,,$$

où $x_0, u_0 \in E$ sont fixés.
Montrer qu'une application affine $f : \mathbb{R} \to E$ est tangente à zéro en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est nulle.

Correction. On rappelle que $f : \mathbb{R} \to E$ est tangente à zéro en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$f(t) = o(|t - t_0|)\,.$$

Donc il existe une fonction $\varepsilon(t)$ telle que $\lim_{t\to t_0} \varepsilon(t) = 0$ et

$$f(t) = \varepsilon(t)\,|t - t_0|\,. \tag{1}$$

En particulier $f(t_0) = 0$, ce qui nous donne ici

$$x_0 + t_0 \cdot u_0 = 0\,.$$

D'autre part on peut écrire $f(t) = f(t) - f(t_0) = (t - t_0) \cdot u_0$. En comparant avec (1) on en déduit (en divisant par $|t - t_0|$ lorsque $t \neq t_0$) que $\varepsilon(t) = u_0$. En passant à la limite $t \to 0$, on en déduit $u_0 = 0$. Donc $f \equiv 0$.

Exercice 6. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont tangentes à zéro en 0 ?

Correction. Une telle fonction f est caractérisée par $f(0) = 0$ et

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 0\,.$$

Autrement dit, par le cours de L2, c'est une fonction qui s'annule en zéro, qui est dérivable en 0, et dont la dérivée s'annule en zéro.
Géométriquement, ce sont les fonctions dont le graphe passe par l'origine et admet une tangente horizontale en ce point.