Calcul différentiel – TD 1

Chemins dans un espace vectoriel normé

Exercice 1. Question de cours. Soit E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R} \to E$. Rappeler la définition de «f est continue en t_0».

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R} \to E$. En appliquant la définition du cours (exercice 1), montrer que si f est continue en 0, alors pour toute suite $t_k \to 0$, on a $\|f(t_k) - f(0)\| \to 0$.

Exercice 3. Soit $\ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels.

1. Montrer que $E := \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_n |x_n|$ est une norme sur E, qu'on notera $\|(x_n)\|_\infty$.
3. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to E$ définie par

$$t \mapsto f(t) := (e^{-nt^2})_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

   Montrer que f n'est pas continue en 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 1 est naturellement un espace affine. Donner une norme sur l'espace vectoriel associé.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to E$ est *affine* si elle s'écrit

$$f(t) = x_0 + t \cdot u_0\,,$$

où $x_0, u_0 \in E$ sont fixés.
Montrer qu'une application affine $f : \mathbb{R} \to E$ est tangente à zéro en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est nulle.

Exercice 6. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont tangentes à zéro en 0 ?