Calcul différentiel – TD 1

Espaces affines, fonctions continues, notations de Landau

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = x_0 + \alpha t$, où $x_0, \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ est naturellement un espace affine et que f est une application affine.
3. On suppose que $f(t) = o(t)$ quand $t \to 0$ (notation « o » de Landau). Que peut-on dire de x_0 et α_0 ?
4. Décrire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient $f(t) = o(t)$ et $f(0) = 0$, en termes de continuité et dérivabilité.

Exercice 2. Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toutes les fonctions mentionnées f, g, h sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Soit λ un réel non nul. $f = o(g)$ en $t_0 \implies f = o(\lambda g)$ et $\lambda f = o(g)$ en t_0.
2) $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ en $t_0 \implies f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$ en t_0.
3) $f = o(g)$ et $g = o(h)$ en $t_0 \implies f = o(h)$ en t_0.
4) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $\lim\limits_{t \to t_1} \phi(t) = t_0$.
   $f = o(g)$ en $t_0 \implies f \circ \phi = o(g \circ \phi)$ en t_1.
5) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
   $f = o(g)$ en $t_0 \implies \phi \circ f = o(\phi \circ g)$ en t_0.

Mêmes questions pour $\mathcal{O}$ à la place de o.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R} \to E$. On dit que f est continue en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que : « si $s \in \mathbb{R}$ est tel que $|t_0 - s| < \alpha$, alors $\|f(t_0) - f(s)\| < \varepsilon$ ».
On suppose f continue en 0 ; montrer que pour toute suite $t_k \to 0$, on a $\|f(t_k) - f(0)\| \to 0$.

Exercice 4. Soit $\ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients réels.

1. Montrer que $E := \ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sup_n |x_n|$ est une norme sur E, qu'on notera $\|(x_n)\|_\infty$.
3. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to E$ définie par
$$t \mapsto f(t) := (e^{-nt^2})_{n \in \mathbb{N}}\,.$$
   Montrer que f n'est pas continue en 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. Montrer que l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 1 est naturellement un espace affine. Donner une norme sur l'espace vectoriel associé.