Correction

☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0
☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1
☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2
☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3
☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4
☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5
☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6
☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7
☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8
☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9

Calcul différentiel — Université de Rennes QCM2 du 05/12/2023

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre (**un chiffre par colonne**), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

. . . .

*Durée : 30 minutes. Aucun document ni appareil électronique (calculatrice, téléphone, . . .) n'est autorisé. Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter **plusieurs** bonnes réponses. Les autres questions ont une **unique** bonne réponse. Pour les questions de type Vrai/Faux, une mauvaise réponse entraîne un demi-point négatif.*
***Attention: les cases doivent être fortement cochées ou remplies** (et non entourées).*

Question 1 Soit $\alpha \in]0,\infty[$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors f est différentiable en 0 si et seulement si

☐ $\alpha \geqslant 1$

☐ $\alpha > 0$

☐ $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$

■ $\alpha > \frac{1}{2}$

Question 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application C^1 telle que $f(0,0) = 0$. Il existe des fonctions continues α et β de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x,y) = x\alpha(x,y) + y\beta(x,y)$.

☐ Faux ■ Vrai

Question 3 On munit l'espace $C^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0,1]\}$.
L'application $G : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to C^0([0,1],\mathbb{R})$ est définie par
$G(f) : t \in [0,1] \mapsto f(t)f(1-t)$. La différentielle de G est donnée par:
pour tout $f, h \in C^0([0,1],\mathbb{R})$,

☐ $DG(f).h : t \in [0,1] \mapsto h(t) - h(1-t)$

■ $DG(f).h :$
$t \in [0,1] \mapsto f(t)h(1-t) + h(t)f(1-t)$

☐ $DG(f).h :$
$t \in [0,1] \mapsto f(t)h(t) + f(1-t)h(1-t)$

☐ $DG(f).h : t \in [0,1] \mapsto h(t) + h(1-t)$

Tournez la page

Question 4 ♣ *(2 points)* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, xy)$.

- ☐ f est un C^1-diffeomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$.
- ☐ f est injective mais pas surjective.
- ■ f est un C^1-diffeomorphisme local en certains points de $\mathbb{R}^2$.
- ☐ f est un C^1-diffeomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.
- ☐ f est surjective mais pas injective.
- ☐ f est un C^1-diffeomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- ☐ *Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soient E, F des espaces vectoriels normés et $U \subset E$ un ouvert. Soit $f : U \to F$ une application différentiable. Cocher les assertions vraies.

- ☐ Si $Df = 0$ sur U, alors f est constante.
- ■ Si f est constante, alors $Df = 0$ sur U.
- ☐ *Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.*

Question 6 ♣ On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 à coefficients réels, I la matrice identité, et $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $A \in M_2(\mathbb{R})$, on note $f(A) = A^2$. Cocher les assertions vraies.

- ■ f est un difféomorphisme local en I.
- ☐ f est un difféomorphisme local en J.
- ☐ f est un difféomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ sur lui-même.
- ■ f est un difféomorphisme local en $-I$.
- ☐ *Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.*

Question 7 ♣ *(2 points)* Soient E, F des espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application différentiable. On suppose que f est un difféomorphisme local en $a \in E$. Cocher les assertions vraies.

- ■ Il existe un voisinage U de a tel que pour tout ouvert $U' \subset U$, $f(U')$ est un ouvert de F.
- ■ Pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.
- ■ Il existe un voisinage U de a tel que f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$.
- ☐ Pour tout voisinage U de a, f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$.
- ☐ Pour tout ouvert U de E, $f(U)$ est un ouvert de F.
- ☐ Il existe un voisinage V de $f(a)$ tel que f est un difféomorphisme de $f^{-1}(V)$ sur V.
- ☐ *Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.*

Question 8 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijective et de classe C^1. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

■ Faux ☐ Vrai