☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Calcul différentiel —
Université de Rennes
QCM1 du 24/10/2023

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre (**un chiffre par colonne**), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

Durée : 30 minutes. Aucun document ni appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé. Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter ***plusieurs*** *bonnes réponses. Les autres questions ont une* ***unique*** *bonne réponse. Pour les questions de type Vrai/Faux, une mauvaise réponse entraîne un demi-point négatif.*
Attention: les cases doivent être fortement cochées ou remplies *(et non entourées).*

Question 1 Soit E l'espace vectoriel des suites réelles qui convergent vers 0, muni d'une norme N. Soit X l'espace affine des suites réelles qui convergent vers 1, associé à l'espace vectoriel normé (E, N). Soit f une application différentiable de $]0,1[$ dans X. L'élément $f'(1/2)$ appartient à:

- ☐ $]0,1[$
- ☐ $\mathbb{R}$
- ■ E
- ☐ X

Question 2 ♣ La fonction $f : \mathbb{R} \ni t \mapsto |t|^3 + t^{10}$ admet un développement limité en 0

- ☐ à l'ordre 3: $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o(t^3)$.
- ■ à l'ordre 2: $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + o(t^2)$.
- ☐ *Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.*

Question 3 ♣ La fonction $f : \mathbb{R} \ni t \mapsto t^{10} + t$ est

- ☐ lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- ■ lipschitzienne sur $[0,1]$.
- ☐ *Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.*

Tournez la page

Question 4 On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_1$ définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $L(x) = Ax$. La norme subordonnée à la norme $\|.\|_1$ de l'application linéaire L vaut :

- ■ $\max\{\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|; j \in \{1, \ldots, n\}$
- □ $\max\{\sum_{j=1}^n |A_{i,j}|; i \in \{1, \ldots, n\}\}$

Question 5 Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$. Il existe $c \in (0,1)$ tel que $f(1) - f(0) = f'(c)$.

■ Vrai □ Faux

Question 6 Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{C})$. Il existe $c \in (0,1)$ tel que $f(1) - f(0) = f'(c)$.

□ Vrai ■ Faux

Question 7 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

- □ $f'(0) = 0$
- ■ $f(0) = f'(0) = 0$
- □ $f(0) = 0$
- □ *Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.*

Question 8 Avec l'énoncé de la question précédente, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

- □ $f(0) = 0$
- ■ $f(0) = f'(0) = 0$
- □ $f'(0) = 0$
- □ *Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.*

Question 9 On considère l'application linéaire $L : f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \mapsto f(1/2) \in \mathbb{R}$. Si on munit l'espace vectoriel $C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$, définie par
$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$, alors L est continue.

□ Faux ■ Vrai

Question 10 On considère l'application linéaire $L : f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \mapsto f(1/2) \in \mathbb{R}$. Si on munit l'espace vectoriel $C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_1$, définie par
$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$, alors L est continue.

■ Faux □ Vrai