Université de Rennes

2024–2025

L3 : Calcul Différentiel

Corrigé du contrôle continu du 5 novembre 2024

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,\ y) = (\sin(x+y),\ 2xy^3,\ ye^x)$.
   (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en un point $z_0 = (x_0,\ y_0)$ et écrire la matrice jacobienne.
   (c) Rappeler le lien entre dérivées partielles et différentielle et donner la valeur de $Df(x_0, y_0)(h)$ pour un vecteur $h = (h_1, h_2)$ quelconque.
   (d) Ecrire l'approximation de $f(z_0 + h)$ fournie par la différentielle et donner la version matricielle.
2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(u, v, w) = (2u + uv^2w^3, ue^v)$. Calculer la matrice jacobienne de g.
3. Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$ au point $p = (1, 0, 3)$.

Correction.

1. (a) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est de classe C^1, car ses composantes $f_1(x,y) = \sin(x+y)$, $f_2(x,y) = 2xy^3$ et $f_3(x,y) = ye^x$ sont de classe C^∞.

   (b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = (\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0)) = (\cos(x_0+y_0), 2y_0^3, y_0e^{x_0})$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = (\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0)) = (\cos(x_0+y_0), 6x_0y_0^2, e^{x_0})$, la matrice jacobienne est alors

$$Jf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_0+y_0) & \cos(x_0+y_0) \\ 2y_0^3 & 6x_0y_0^2 \\ y_0e^{x_0} & e^{x_0} \end{pmatrix}$$

   (c) On a $Df(x_0,y_0)(h) = Df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \cos(x_0+y_0) & \cos(x_0+y_0) \\ 2y_0^3 & 6x_0y_0^2 \\ y_0e^{x_0} & e^{x_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$.

   (d) $f(z_0+h) = f(z_0) + Df(z_0).h + o(\|h\|) = f(z_0) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) + o(\|h\|)$. La version matricielle

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \begin{pmatrix} \cos(x_0+y_0) & \cos(x_0+y_0) \\ 2y_0^3 & 6x_0y_0^2 \\ y_0e^{x_0} & e^{x_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|h\|).$$

2. La matrice jacobienne de g en un point (u,v,w)

$$Jg(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial g}{\partial v}((u,v,w) & \dfrac{\partial g}{\partial w}((u,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+v^2w^3 & 2uvw^3 & 3uv^2w^2 \\ e^v & ue^v & 0 \end{pmatrix}$$

3. La matrice jacobienne de $f \circ g$ au point $(1,0,3)$ est le produit matricielle

$$Jf(g(1,0,3)).Jg(1,0,3) = Jf(2,1).Jg(1,0,3) = \begin{pmatrix} \cos(3) & \cos(3) \\ 2 & 12 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(3) & \cos(3) & 0 \\ 16 & 12 & 0 \\ 3e^2 & e^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   D'où

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial u}(1,0,3) = (3\cos(3), 16, 3e^2)$$

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial v}(1,0,3) = (\cos(3), 12, e^2)$$

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial w}(1,0,3) = (0,0,0)$$

Exercice 2

Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. Soit F un espace de Banach et $\varphi : \mathbb{R} \to F$ une application de classe C^2. On définit $T : E \to F$ par

$$\forall f \in E, \quad T(f) := \int_0^1 \varphi(f(t))dt$$

1. Montrer que T est bien définie pour tout $f \in E$.
2. Montrer que T est continue.
3. Montrer que T est différentiable que sa différentielle en tout point $f \in E$ est donnée par

$$\forall h \in E, \quad DT(f).h = \int_0^1 h(t)\varphi'(f(t))dt.$$

   (on pourra utiliser une formule de Taylor)
4. Expliciter les formules obtenues pour $T(f)$ et $DT(f).h$ lorsque $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - x$ et $F = \mathbb{R}$.

Correction.

1. Soit $f \in E$. Comme $\varphi : \mathbb{R} \to F$ est de continue, $\varphi(f) : [0,1] \to F$ est une application continue à valeur dans un espace de Banach, son intégrale sur $[0,1]$, $T(f)$ est bien définie.
2. Soient $f, h \in E$. Comme ce sont des fonctions continues sur le compact $[0,1]$, on peut supposer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant M/2$ et $\|h\|_\infty \leqslant M/2$, ce qui entraîne $\|f+h\|_\infty \leqslant M$. Comme φ' est continue, il existe $K > 0$ tel que pout tout $x \in [-M, M]$, $\|\varphi'(x)\|_F \leqslant K$.
   Alors, $\|T(f+h) - T(f)\|_F = \left\| \int_0^1 (\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)))dt \right\|_F \leqslant \int_0^1 \|(\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)))\|_F \, dt.$
   Par l'inégalité des accroissements finis,

$$\|(\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)))\|_F \leqslant \max_{x\in[-M,M]} ||\varphi'(x)||_F \|h\|_\infty.$$

   Ainsi $\|T(f+h) - T(f)\|_F \leqslant \max_{x\in[-M,M]} ||\varphi'(x)||_F \|h\|_\infty \leqslant K\|h\|_\infty$ est localement lipschizienne, donc continue.
3. On peut supposer, comme φ'' est continue, que la constante $K > 0$, choisie dans la question précédente vérifie, pout tout $x \in [-M, M]$, $\|\varphi''(x)\|_F \leqslant K$.
   Par la formule de Taylor avec reste de Lagrange (voir poly du cours théorème 2.82 page 28), pour tout $t \in [0,1]$,

$$\|\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)) - h(t)\varphi'(f(t))\|_F \leqslant \frac{|h(t)|^2}{2} \sup_{x\in[-M,M]} \|\varphi''(x)\|_F \leqslant \frac{K}{2} \|h\|_\infty^2 .$$

   Alors, par linéarité de l'intégrale et le fait que les intégrants sont des fonctions continues à valeurs dans un Banach, on aura

$$\left\| T(f+h) - T(f) - \int_0^1 h(t)\varphi'(f(t))dt \right\|_F \leqslant \int_0^1 \|\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)) - h(t)\varphi'(f(t))\|_F \, dt \leqslant \frac{K}{2} \|h\|_\infty^2 .$$

   Comme $\frac{K}{2} \|h\|_\infty^2$ est un $o(\|h\|_\infty)$ $\forall h \in E \mapsto DT(f).h = \int_0^1 h(t)\varphi'(f(t))dt$ est linéaire continue, T est différentiable et de différentielle au point f, l'application $DT(f) : E \to F$ telle que

$$\forall h \in E, \quad DT(f).h = \int_0^1 h(t)\varphi'(f(t))dt.$$

   Remarque 0.1 *On obtient comme conséquence que l'application T est continue.*
4. Si $F = \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - x$ on aura pour $f, h \in E$,
   $T(f) = \displaystyle\int_0^1 (f^3(t) - 2f^2(t) - f(t))dt$ et $DT(f).h = \int_0^1 h(t).(3f^2(t) - 4f(t) - 1)dt.$

Exercice 3

n munit $E=\mathbb{R}^n$ de la norme $\|(x_1,\dots,x_n)\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i|$.

1. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ une matrice $n\times n$, qu'on identifiera avec l'application linéaire $E\ni X\mapsto AX\in E$. Calculer sa norme subordonnée en fonction de ses coefficients $(a_{i,j})$.
2. On considère l'application « transposée » de $M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ qui à A associe ${}^tA$. Est-elle continue ? Quelle est sa norme ?

Correction.

1. Le i-ème coefficient de AX est $(AX)_i=\sum_{k=1}^n a_{ij}x_k$, donc
$$\|AX\|_1=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\right|\leqslant\sum_{i=1}^n\ \sum_{k=1}^n |a_{ik}|\,|x_k|\leqslant(\max_k\sum_{i=1}^n|a_{ik}|)\,\|X\|_1\,.$$
On a donc $\|AX\|\leqslant C\,\|X\|$ avec $C=\max_k\sum|a_{ik}|$. Pour montrer que C est optimale, on doit trouver un X particulier tel que $\|AX\|\geqslant C\,\|X\|$. Supposons $A\neq 0$ (sinon il n'y a rien à montrer) et prenons l'indice $k=k_0$ pour lequel le $\max_k$ est atteint dans C, c'est-à-dire $C=\sum_{i=1}^n|a_{ik_0}|$. Soit X dont toutes les composantes sont nulles sauf la k_0-ème qui est égale à 1. Alors $\|X\|_1=1$ et
$$\|AX\|=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\right|=\sum_{i=1}^n|a_{ik_0}|=C\,\|X\|\,.$$
Ainsi $\|A\|=\max_k\sum_{i=1}^n|a_{ik}|\,.$
2. C'est une application linéaire en dimension finie (n^2), donc continue. Pour trouver sa norme, il faut trouver la constante C optimale telle quelle $\|{}^tA\|\leqslant C\,\|A\|$. Par la question précédente, on a immédiatement que $\|{}^tA\|=\max_i\sum_{k=1}^n|a_{ik}|$. La majoration la plus naturelle est
$$\|{}^tA\|=\max_i\sum_{i=k}^n|a_{ik}|\leqslant\sum_k\sum_i|a_{ik}|=\sum_i\sum_k|a_{ik}|\leqslant\sum_i\|A\|=n\,\|A\|\ .$$
On a donc $\|{}^tA\|\leqslant C\,\|A\|$ avec $C=n$. Cherchons une matrice particulière telle que $\|A\|=1$ et $\|{}^tA\|=n$. Il suffit de choisir
$${}^tA=\left(\begin{array}{c|c}1&\\ \vdots&0\\ 1&\end{array}\right)$$
La norme de l'application « transposée » est donc bien $\|{}^t\|_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}),M_n(\mathbb{R}))}=n$.