L3 : Calcul Différentiel

Corrigé du contrôle continu du 14 novembre 2023

Exercice 1

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défine par $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Correction. La fonction f est le produit et composée de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(1. et 2.) On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leqslant x^2+y^2 = o(\|(x,y)\|)$; f est donc différentiable en $(0,0)$ et de différentielle nulle. Ainsi, f est différentiable (donc continue) sur $\mathbb{R}^2$.

(3.) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\left(-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)\left(\frac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\right) \\ &= 2x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

On a $|2x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)| \leqslant 2|x|$, se terme tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Le second terme, le long de la droite $y=0$, est égal à $\frac{x}{|x|}\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$, et n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

La fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, puisque ses dérivées partielles ne sont pas continues.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$. On note $N(x) = \|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ la norme associée.

1. Montrer que N est différentiable en tout point $a \neq 0$ et que la différentielle de N au point a, $DN(a) = \dfrac{\langle a,\cdot\rangle}{N(a)}$ i.e. pour tout $h \in E$, $DN(a).h = \frac{\langle a,h\rangle}{N(a)}$.
2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(N(x))$.
   (a) Montrer que f est différentiable en tout point $a \neq 0$ et calculer $Df(a)$.
   (b) Montrer que pour tout $a \neq 0$, $\|Df(a)\| \leqslant 1$.
   (c) Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant \|x-y\|$.
   (on pourra distinguer les cas : $0 \notin [x,y]$ et $0 \in [x,y]$)

Correction.

1. On a pour $x \in E$, $N(x) = \langle x,x\rangle^{1/2} = g \circ f(x)$, avec $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{t}$ différentiable (même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x,x\rangle$ est forme bilinéaire continue donc différentiable (même de classe C^∞) sur E. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ et pour tout $x \in E$, $Df(x) = 2\langle x,\cdot\rangle$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, N est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et pour $a \neq 0$

$$DN(a) = g'(f(a))(Df(a)) = \frac{1}{2\sqrt{f(a)}}(2\langle a,\cdot\rangle) = \frac{\langle a,\cdot\rangle}{\sqrt{\|a\|^2}} = \frac{\langle a,\cdot\rangle}{\|a\|}$$

i.e. pour tout $h \in E$, $DN(a).h = \frac{\langle a,h\rangle}{\|a\|}$.

2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(N(x))$.
   (a) Sur $E \setminus \{0\}$, f est la composée de deux applications différentiables, $f = h \circ N$, où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \arctan(x)$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et pour $a \neq 0$

$$Df(a) = h'(N(a))(DN(a)) = \frac{1}{1+N^2(a)}\left(\frac{\langle a, \cdot\rangle}{N(a)}\right) = \frac{\langle a, \cdot\rangle}{(1+\|a\|^2)\|a\|}$$

   (b) Pour $a \neq 0$, $Df(a) : E \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue. Pour $h \in E$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$|Df(a)h| = \frac{|\langle a, h\rangle|}{(1+\|a\|^2)\|a\|} \leqslant \frac{\|a\|\,\|h\|}{(1+\|a\|^2)\|a\|} = \frac{\|h\|}{(1+\|a\|^2)} \leqslant \|h\|$$

   ainsi $\|Df(a)\| \leqslant 1$.
   Montrer que pour tout $a \neq 0$, $\|Df(a)\| \leqslant 1$.
   (c) Soient x et y des éléments de $E \setminus \{0\}$.
   Si 0 n'est pas dans le segment $[x, y]$, alors $\|Df(a)\| \leqslant 1$ pour tout $a \in [x, y]$, comme $[x, y]$ est convexe, l'inégalité des accroissements finis $|f(y) - f(x)| \leqslant \|y - x\|$.
   Si $0 \in [x, y]$, alors il existe $t \in]0, 1[$ tel que $0 = x + t(y - x)$, d'où $y = \alpha x$ avec $\alpha = \frac{t-1}{t} < 0$. Ainsi, $0 \notin [x, -y]$ et $\|y + x\| \leqslant \|y - x\|$, comme $f(-y) = f(y)$, d'après le cas précédent

$$|f(y) - f(x)| = |f(-y) - f(x)| \leqslant \|y + x\| \leqslant \|y - x\|.$$

   Le dernier cas à considérer, est celui où : $y = 0$ ou $x = 0$. Par exemple, supposons que $y = 0$. On doit alors montrer que pour tout $x \in E$, $arctan(\|x\|) \leqslant \|x\|$. Il suffit d'étudier les variations de la fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \arctan(t) - t$. On a $\varphi'(t) = \frac{-t^2}{1+t^2} \leqslant 0$ donc φ est décroissante, d'où pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(0) = 0$ par suite $\arctan(t) \leqslant t$.

Exercice 3

On munit l'espace vectoriel $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$, définie par $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|; x \in [0, 1]\}$. On considère l'application $L : E \to E$, $f \mapsto L(f)$ définie par

$$(\forall t \in [0, 1]) \quad L(f)(t) = \int_0^1 (t + s)f(s)ds$$

1. Vérifier que L est linéaire
2. Montrer que L est continue et que $||L|| = \frac{3}{2}$.
3. $||L||$ est-elle atteinte ?

Correction.

1. La linéarité de L est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

   Remarque 0.1 *Pour tout $f \in E$, $|L(f)(t) - L(f)(t')| = |\int_0^1((t+s)-(t'+s))f(s)ds| \leqslant \|f\|_\infty|t-t'|$ est Lipschitzienne donc continue, donc L est bien une application de E dans E.*

2. On a pour $f \in E$

$$\begin{aligned}\|L(f)\|_\infty = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 (t+s)f(s)ds\right| &\leqslant \|f\|_\infty \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 (t+s)ds \\ &\leqslant \|f\|_\infty \max_{t\in[0,1]}\left[ts + \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = \|f\|_\infty \max_{t\in[0,1]}\left(t+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\|f\|_\infty\end{aligned}$$

   L'application linéaire est alors continue et $||L|| \leqslant \frac{3}{2}$.
   Pour $f = 1$, $L(1) = \int_0^1(t+s)ds = t + \frac{1}{2}$ et $\|L(1)\|_\infty = \frac{3}{2}$. Ainsi $\|L\| = \frac{3}{2}$.
3. La norme de L est atteinte par exemple en $f = 1$.