Arithmétique – TD 5

Nombres premiers

Exercice 1. Donner la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 100.

Exercice 2. Prouver que pour vérifier qu'un entier $p \geqslant 4$ est premier, il suffit de vérifier qu'il n'a pas de diviseurs compris entre 2 et $\sqrt{p}$.

Exercice 3. Rappeler l'énoncé et la démonstration du Lemme d'Euclide.
En déduire par récurrence que si un nombre premier p divise un produit d'entiers, alors il divise au moins l'un d'entre eux.

Exercice 4. Donner la décomposition en facteurs premiers de

a) 2310

b) 1224

c) 770000000

d) $7^{24} \times 14^{2020}$

e) 2310×1224

Exercice 5. Un terrain rectangulaire dont les dimensions en mètres a et b sont des nombres entiers, a pour aire 3024 m^2. Calculer son périmètre sachant que le pgcd de a et b est 6. Combien y a-t-il de solutions possibles ?

Exercice 6. Soient a et b deux entiers naturels. On écrit leur décomposition en facteurs premiers :

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}, \qquad b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}. \tag{1}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces décompositions pour avoir $a|b$.
En appliquant cette idée, vérifier si 1224 divise 770000000 ou non.

Exercice 7. Soient a et b deux entiers naturels. On suppose que a^2 divise b^2. En utilisant la décomposition en facteurs premiers, montrer que a divise b.

Exercice 8. Soient a et b deux entiers naturels. On écrit leur décomposition en facteurs premiers comme en (1). Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces décompositions pour que a et b soient premiers entre eux.

Exercice 9. Soient $a = 2^5 \times 7^4 \times 17^{2019}$ et $b = 3^6 \times 7 \times 17 \times 23$. Quel est le pgcd de (a, b) ? Donner la décomposition en facteurs premiers du ppcm de (a, b).

Exercice 10. Quel est le nombre de diviseurs premiers de $n = 72000000$? Quel est le nombre de diviseurs positifs de n ?

Exercice 11. Quel est le nombre de zéros à la fin du nombre $100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$?

Exercice 12. On rappelle la formule du coefficient binomial :

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout entier k tel que $0 < k < p$, p divise $\binom{p}{k}$.