

Arithmétique – TD 4Théorèmes de Bézout, équations diophantiennes

Exercice 1. Sans regarder le cours, donner les énoncés du théorème de Bézout, du théorème de Bachet-Bézout, et du lemme de Gauss.

Exercice 2. Bob a reçu plein de paquets, chacun contenant 6 smartphones. Il doit redistribuer intégralement les smartphones à ses 35 revendeurs. Il dit à Alice : en défaisant les paquets, j'obtiens un nombre de smartphones que je peux répartir en 35 lots, ouf! Alice répond : eh bien alors, en fait, tu n'avais pas besoin de défaire les paquets! Quel est le raisonnement d'Alice?

Exercice 3. Donner toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ des équations :

1. $612x + 99y = 3$.

2. $612x + 99y = 18$.

(Voir l'exercice 7 de la feuille TD3.)

Exercice 4. On cherche à payer une somme de 130 euros avec a pièces de 2 euros et b billets de 5 euros.

1. Dans quel ensemble de nombres sont les inconnues a et b ? Écrire la relation vérifiée par a et b .

2. Déterminer un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $2u_0 + 5v_0 = 130$.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que le couple $(u, v) = (u_0 + 5k, v_0 - 2k)$ est solution de l'équation

$$2u + 5v = 130, \quad (E).$$

4. Montrer que toute solution $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) est de la forme donnée à la question précédente.

5. Combien y a-t-il de façons de payer une somme de 130 euros avec des pièces de 2 euros et des billets de 5 euros?

Exercice 5. Soient a, b, c des entiers. On utilisera les théorèmes de Bézout pour démontrer les affirmations suivantes.

1. $\text{pgcd}(ca, cb) = |c| \text{pgcd}(a, b)$.

2. $\text{pgcd}(a^2, b^2) = (\text{pgcd}(a, b))^2$.

3. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et c divise a , alors $\text{pgcd}(c, b) = 1$.

4. $\text{pgcd}(a, bc) = 1 \iff \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, c) = 1$.

En déduire que si $\text{pgcd}(b, c) = 1$, alors $\text{pgcd}(a, bc) = \text{pgcd}(a, b) \text{pgcd}(a, c)$.