Arithmétique – TD 3

pgcd, algorithme d'Euclide

Exercice 1. Sans regarder le cours, donner en python l'algorithme d'Euclide en version récursive et en version non-récursive.

Exercice 2. Calculer les pgcd suivants :

1. $\mathrm{pgcd}(1, 0)$
2. $\mathrm{pgcd}(0, 0)$
3. $\mathrm{pgcd}(0, -6)$
4. $\mathrm{pgcd}(123456, 123456)$
5. $\mathrm{pgcd}(1, 2020)$
6. $\mathrm{pgcd}(2 \times 1234567, 3 \times 1234567)$
7. $\mathrm{pgcd}(-17, -5)$
8. $\mathrm{pgcd}(2, 5/4)$

Exercice 3. Un pâtissier dispose de 355 chouquettes et 284 petits Kouign Amann. Il souhaite effectuer un maximum de paquets de gâteaux sans qu'il n'y ait de reste, et de sorte que tous les paquets aient la même composition. Combien de paquets ce pâtissier peut-il réaliser ? Combien de chouquettes et de Kouign Amann comptera chaque paquet ?

Exercice 4. (**Suite de Fibonacci**) On définit une suite (F_n) de la façon suivante :

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ .$$

1. Calculer F_n pour $1 < n < 10$.
2. Écrire un programme en python qui implémente $n \mapsto F_n$.
3. Montrer que la suite (F_n) est strictement croissante à partir de $n = 2$.
4. Que fait l'algorithme d'Euclide pour calculer $\mathrm{pgcd}(F_{n+1}, F_n)$?
5. Montrer que l'équation $x^2 = x + 1$ admet une unique solution positive a que l'on calculera.
6. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, on a

$$a^{n-2} < F_n < a^{n-1} \ .$$

Exercice 5. En raisonnant avec l'algorithme d'Euclide, montrer que, pour tous entiers relatifs a, b, k,

$$\mathrm{pgcd}(ka, kb) = |k| \,\mathrm{pgcd}(a, b).$$

En déduire qu'un diviseur commun à deux entiers divise toujours leur pgcd.

Exercice 6. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que

$$m + n = 101 \quad \text{et} \quad \mathrm{pgcd}(m, n) = 3$$

Exercice 7. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer $d = \mathrm{pgcd}(612, 99)$ et trouver des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $612u + 99v = d$.

Exercice 8. Trouver des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $1665u + 1035v = 45$.

Exercice 9. Soient a, b des entiers relatifs non tous les deux nuls, et $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Montrer que $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont des entiers premiers entre eux.

Exercice 10. Soient a, b, c des entiers non nuls. On suppose que a et b sont premiers entre eux, et que a et b divisent c. Montrer que ab divise c.