Arithmétique – TD 2

Divisibilité, division euclidienne et écriture en base b

Exercice 1. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$).

Correction 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 ».

Initialisation : Pour $n = 0$, on calcule $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 = 100 + 10 + 1 = 111$. Or $111 = 1 \times 111$, donc 111 est bien divisible par 111.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$, on doit écrire la quantité $A_{n+1} := 10^{6(n+1)+2} + 10^{3(n+1)+1} + 1$ et montrer qu'elle est divisible par 111. En ayant en vue l'indication (et le fait qu'on cherche à faire apparaître la quantité $A_n = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$), on écrit :

$$A_{n+1} = 10^{6n+2+6} + 10^{3n+1+6} + 1 = 1000^2 \times 10^{6n+2} + 1000 \times 10^{3n+1} + 1$$

On remplace dans l'expression 1000 par $9 \times 111 + 1$, et donc aussi 1000^2 par $(9 \times 111 + 1)^2 = 111 \times (9^2 \times 111 + 2 \times 9) + 1$; en regroupant tous les facteurs de 111 ensemble, on obtient :

$$A_{n+1} = 111 \times K + 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1,$$

avec

$$K = (9^2 \times 111 + 2 \times 9) \times 10^{6n+2} + 9 \times 10^{3n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, A_n est divisible par 111. Puisque $A_{n+1} = 111 \times K + A_n$, A_{n+1} est une somme de deux termes divisibles par 111, donc elle-même divisible par 111 (cette propriété très simple est souvent utile, et démontrée en cours). On a donc démontré $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2 - 1)$ est divisible par 2 et par 3.

Exercice 3. Montrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 4. Sachant que l'on a $96513 = 256 \times 375 + 513$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division euclidienne du nombre 96513 par chacun des nombres 256 et 375.
Mêmes questions pour 96512 et 96511.

Exercice 5. Ecrire 317 en base 2 (écriture binaire).
Écrire 43981 en base 16 (écriture hexadécimale avec les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.).

Exercice 6. Effectuer à la main les additions suivantes :

— En base 2 (écriture binaire) : $(1010101011)_2 + (111001100)_2$

— En base 16 (écriture hexadécimale) : $(D57A)_{16} + (8B91)_{16}$

Exercice 7. Effectuer à la main la division euclidienne en base 2 de $(101100111000)_2$ par $(1100)_2$.

Exercice 8. Montrer qu'un entier relatif est divisible par 5 si et seulement le dernier chiffre dans son écriture en base 10 est égal à 0 ou 5.
Donner le critère analogue en base 16.

Exercice 9. Montrer qu'un entier relatif est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres en base 10 est divisible par 3.
Énoncer et montrer le résultat analogue pour la divisibilité par 9.

Exercice 10. Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$ des entiers.

1. Montrer que $n-1|n^m-1$.
2. En déduire que si l'entier p admet un diviseur non trivial (c'est-à-dire différent de 1 et de lui-même), alors $2^p - 1$ admet également un diviseur non trivial.
3. Montrer que $(n-1)^2|n^m-1$ si et seulement si $n-1|m$.