Arithmétique – TD 2

Divisibilité, division euclidienne et écriture en base b

Exercice 1. Est-ce qu'un nombre pair peut être divisible par un nombre impair ? Est-ce qu'un nombre impair peut être divisible par un nombre pair ?

Exercice 2. Soient a, b des entiers relatifs. On suppose que a divise b et b divise a. Démontrer que $a = b$ ou $a = -b$.

Exercice 3. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$).

Exercice 4. Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2 - 1)$ est divisible par 2 et par 3.

Exercice 5. Qu'est-ce qu'un nombre rationnel ? Montrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 6. Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$ des entiers.

1. Montrer que $n - 1 | n^m - 1$.
2. En déduire que si l'entier p admet un diviseur non trivial (c'est-à-dire différent de 1 et de lui-même), alors $2^p - 1$ admet également un diviseur non trivial.
3. Montrer que $(n-1)^2 | n^m - 1$ si et seulement si $n - 1 | m$.

Exercice 7. Sachant que l'on a $96513 = 256 \times 375 + 513$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division euclidienne du nombre 96513 par chacun des nombres 256 et 375.
Mêmes questions pour 96512 et 96511.

Exercice 8. Ecrire 317 en base 2 (écriture binaire).
Écrire 43981 en base 16 (écriture hexadécimale avec les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.).

Exercice 9. Effectuer à la main les additions suivantes :

— En base 2 (écriture binaire) : $(1010101011)_2 + (111001100)_2$

— En base 16 (écriture hexadécimale) : $(D57A)_{16} + (8B91)_{16}$

Exercice 10. Effectuer à la main la division euclidienne en base 2 de $(101100111000)_2$ par $(1100)_2$.

Exercice 11. Montrer qu'un entier relatif est divisible par 5 si et seulement le dernier chiffre dans son écriture en base 10 est égal à 0 ou 5.
Donner le critère analogue en base 16.

Exercice 12. Montrer qu'un entier relatif est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres en base 10 est divisible par 3.
Énoncer et montrer le résultat analogue pour la divisibilité par 9.