Arithmétique – TD 1

Entiers et récurrence

Exercice 1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, le produit de n entiers impairs est un entier impair.

Correction 1. Un entier $k \in \mathbb{Z}$ est impair si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2p + 1$. Démontrons par récurrence la propriété de l'énoncé :

$$\mathcal{P}(n) : \text{(le produit de } n \text{ entiers impairs est un entier impair.)}$$

Initialisation. Pour $n = 1$, on peut se demander ce que veut dire « le produit d'un entier ». Par convention, ça veut dire simplement l'entier lui-même. Dans ce cas, $\mathcal{P}(1)$ est évidente. Mais pour être plus clair, montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie :
On prend donc deux entiers impairs k_1 et k_2. On veut montrer que k_1k_2 est impair. Par exemple, si $k_1 = 5$ et $k_2 = 11$, on voit que $k_1k_2 = 55$ est bien impair. Mais on doit le démontrer pour *tous* entiers impairs k_1, k_2.
Par définition il existe p_1 et p_2 dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$k_1 = 2p_1 + 1 \quad \text{et} \quad k_2 = 2p_2 + 1.$$

(Bien faire attention que les entiers p_1 et p_2 n'ont aucune raison d'être les mêmes !)
On calcule le produit : $k_1k_2 = (2p_1 + 1)(2p_2 + 1) = 4p_1p_2 + 2p_1 + 2p_2 + 1$. Si on pose $p = 2p_1p_2 + p_1 + p_2$, on remarque que $p \in \mathbb{Z}$ (l'addition et la multiplication sont des operations sur $\mathbb{Z}$), et que

$$k_1k_2 = 2p + 1.$$

On a donc bien montré que k_1k_2 est impair.

Hérédité. On fixe $n \geqslant 2$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On cherche à montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On doit donc prendre $n + 1$ entiers impairs arbitraires, qu'on va noter

$$k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}.$$

On veut montrer que le produit $k_1k_2 \cdots k_n$ est impair. Par définition, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, puisque k_i est impair, il existe un entier $p_i \in \mathbb{Z}$ tel que $k_i = 2p_i + 1$. On va regrouper les n premiers nombres, grâce à l'associativité de la multiplication :

$$k_1k_2 \cdots k_{n+1} = (k_1k_2 \cdots k_n) \times k_{n+1}.$$

La parenthèse contient le produit de n entiers impairs, donc, grâce à l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, on sait que c'est un entier impair, qu'on note $k = (k_1k_2 \cdots k_n)$. Donc le produit total vaut

$$k_1k_2 \cdots k_{n+1} = kk_{n+1}.$$

C'est le produit de **deux** entiers impairs : or, on a déjà démontré $\mathcal{P}(2)$, donc on sait que le résultat est forcément impair. Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie !

Conclusion. Pour tout $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque. Pour écrire le produit $k_1 k_2 \cdots k_n$, on peut aussi utiliser la notation pratique :

$$\prod_{i=1}^{n} k_i$$

Exercice 2. Montrer :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Correction 2. On montre les deux formules par récurrence. Le principe est le même que pour l'exercice 1, avec des sommes à la place de produits : Pour montrer la propriété au rang $(n+1)$, on va regrouper les n premiers éléments de la somme pour appliquer l'hypothèse de récurrence.

Rédigeons la deuxième égalité. Soit $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :

$$(\mathcal{A}_n) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— $\mathcal{A}_0$ est vraie $(1 = 1)$.

— Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $\mathcal{A}_n$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve $\mathcal{A}_{n+1}$.

— Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $\mathcal{A}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

— $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.

  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

— On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini sont de la même couleur.

Correction 3. L'initialisation pour $\mathcal{P}(1)$ est correcte.
L'hérédité (le passage de $\mathcal{P}(n)$ à $\mathcal{P}(n+1)$) est aussi correcte... mais seulement pour $n \geqslant 2$! Le problème est que l'argument $\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ est **faux**. Du coup, même si $\mathcal{P}(1)$ est vrai, on ne peut **rien en déduire**. (Par ailleurs on voit bien que $\mathcal{P}(n)$ est faux pour tout $n \geqslant 2$.) Mais, je répète le point intéressant de cet exercice : l'implication

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

est **vraie**.
En effet, quand on enlève un crayon d'un groupe de $n+1$ crayons, il reste un groupe A de n crayons, qui sont tous de la même couleur par hypothèse de récurrence. Puis on le repose, et on en enlève un autre : on obtient un groupe B de n crayons, qui sont tous de la même couleur également par hypothèse de récurrence. Or, si $n \geqslant 2$, nécessairement les ensembles A et B ont au moins **un crayon en commun** : donc la couleur de A est forcément la même que la couleur de B. Cette affirmation est fausse pour $n = 1$, car alors les « groupes » A et B (qui ne contiennent chacun qu'un seul crayon) sont **disjoints**...

Exercice 4. (Relation d'ordre.) On rappelle qu'une *relation* $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une partie de $E \times E$, et on dit que « x est en relation avec y » si $(x, y) \in \mathcal{R}$, qu'on notera aussi « $x\mathcal{R}y$ ».
On dit que $\mathcal{R}$ est une « relation d'ordre » si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est *reflexive* : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
2. $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* : $\forall x \in E, \forall y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$;
3. $\mathcal{R}$ est *transitive* : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Sur l'ensemble $E = \mathbb{N}$, on définit la relation

$$(x\mathcal{R}y) \iff (\exists z \in \mathbb{N}, \quad y = x + z).$$

Quelle est la notation habituelle pour cette relation ?
Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Correction 4. Cette relation est exactement la relation « est inférieur ou égal à », notée $\leqslant$.
Le jeu est de montrer les axiomes voulus *uniquement avec la définition proposée.*

Reflexivité : Soit $x \in \mathbb{N}$. En **choisissant** $z = 0 \in \mathbb{N}$, on a bien

$$x = x + z$$

ce qui *prouve* que $x\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors *par définition* il existe des entiers naturels z et z' tels quel

$$y = x + z \qquad \text{et} \qquad x = y + z'.$$

En regroupant les égalités on trouve $y = y + z + z'$, donc $0 = z + z'$. Puisque z et z' sont des entiers naturels, leur somme ne peut être nulle que si les **deux sont nuls** : $z = z' = 0$. En reprenant les égalités ci-dessus on voit donc $x = y$. On a donc bien prouvé que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Transitivité : Soient $x, y, t \in \mathbb{N}$. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}t$, on obtient, *par définition*, des entiers $z, z' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$y = x + z \qquad \text{et} \qquad t = y + z'.$$

En combinant, on trouve que $t = x + (z + z')$. En *posant* $z'' = z + z'$, on obtient

$$t = x + z'',$$

et $z'' \in \mathbb{N}$ (comme somme d'entiers naturels) ce qui *prouve* que $x\mathcal{R}t$. Conclusion : $\mathcal{R}$ est bien transitive.

Exercice 5. On considère le théorème fondamental de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$:
Théorème A : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

1. Démontrer le Théorème A à partir du principe de récurrence.
2. Réciproquement, montrer que le principe de récurrence est une conséquence du Théorème A. *Ces deux énoncés sont donc équivalents !*

Exercice 6. On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est *totale* si

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x).$$

On définit sur $\mathbb{N}$ la relation « | » par :

$$(x|y) \iff (\exists z \in \mathbb{N}, \quad y = x \times z).$$

Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

Exercice 7. (Relation d'équivalence, entiers relatifs.) On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'équivalence* si

1. Elle est *réflexive* (cf. exercice 4) ;
2. elle est *symétrique* : $\forall (x,y) \in E \times E$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$;
3. elle est *transitive* (cf. exercice 4).

Sur l'ensemble $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on définit la relation

$$(x,y)\mathcal{R}(a,b) \iff y + a = x + b.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
On définit l'opération $\oplus$ par

$$(x,y) \oplus (a,b) = (x + a, y + b).$$

Écrire une fonction en python pour implémenter cette opération.
Montrer que pour tout $(x,y) \in E$, il existe $(a,b) \in E$ tel que

$$\big((x,y) \oplus (a,b)\big) \quad \mathcal{R} \quad (0,0)$$

On note $\overline{(x,y)}$ l'ensemble des couples (a,b) qui sont en relation avec (x,y). Montrer que $\overline{(x,y)}$ s'identifie naturellement à un *entier relatif* $z \in \mathbb{Z}$.
On peut dont utiliser les couples d'entiers naturels pour implémenter $\mathbb{Z}$. Écrire en python les fonctions « opposé », « soustraction », « multiplication », et « égalité » sur les entiers relatifs, en utilisant E.

Rappel : les informations sur le cours se trouvent sur la page web de San Vũ Ngọc :
`https://perso.univ-rennes1.fr/san.vu-ngoc/blog/arithmetique/`