Arithmétique – TD 1

Entiers et récurrence

Exercice 1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, le produit de n entiers impairs est un entier impair.

Exercice 2. Montrer :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Exercice 3. En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

— $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.

  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

— On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini sont de la même couleur.

Exercice 4. (Relation d'ordre.) On rappelle qu'une *relation* $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une partie de $E \times E$, et on dit que « x est en relation avec y » si $(x, y) \in \mathcal{R}$, qu'on notera aussi « $x\mathcal{R}y$ ».
On dit que $\mathcal{R}$ est une « relation d'ordre » si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est *reflexive* : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
2. $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* : $\forall x \in E, \forall y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$;
3. $\mathcal{R}$ est *transitive* : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Sur l'ensemble $E = \mathbb{N}$, on définit la relation

$$(x\mathcal{R}y) \iff (\exists z \in \mathbb{N}, \quad y = x + z).$$

Quelle est la notation habituelle pour cette relation ?
Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Exercice 5. On considère le théorème fondamental de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$:
Théorème A : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

1. Démontrer le Théorème A à partir du principe de récurrence.
2. Réciproquement, montrer que le principe de récurrence est une conséquence du Théorème A. *Ces deux énoncés sont donc équivalents !*

Exercice 6. On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est *totale* si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x).$$

On définit sur $\mathbb{N}$ la relation « | » par :

$$(x|y) \iff (\exists z \in \mathbb{N}, \quad y = x \times z).$$

Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

Exercice 7. (Relation d'équivalence, entiers relatifs.) On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'équivalence* si

1. Elle est *réflexive* (cf. exercice 4) ;
2. elle est *symétrique* : $\forall (x, y) \in E \times E$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$;
3. elle est *transitive* (cf. exercice 4).

Sur l'ensemble $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on définit la relation

$$(x, y)\mathcal{R}(a, b) \iff y + a = x + b.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
On définit l'opération $\oplus$ par

$$(x, y) \oplus (a, b) = (x + a, y + b).$$

Écrire une fonction en python pour implémenter cette opération.
Montrer que pour tout $(x, y) \in E$, il existe $(a, b) \in E$ tel que

$$\big((x, y) \oplus (a, b)\big) \quad \mathcal{R} \quad (0, 0)$$

On note $\overline{(x, y)}$ l'ensemble des couples (a, b) qui sont en relation avec (x, y). Montrer que $\overline{(x, y)}$ s'identifie naturellement à un *entier relatif* $z \in \mathbb{Z}$.
On peut dont utiliser les couples d'entiers naturels pour implémenter $\mathbb{Z}$. Écrire en python les fonctions « opposé », « soustraction », « multiplication », et « égalité » sur les entiers relatifs, en utilisant E.

Rappel : les informations sur le cours se trouvent sur la page web de San Vũ Ngọc :
`https://perso.univ-rennes1.fr/san.vu-ngoc/blog/arithmetique/`