Arithmétique — Contrôle continu du 7/02/2019

NOM :	Prénom :

Durée : 1h.
Les documents (cours, TD, ...) et les appareils (calculatrice, téléphones, ...) ne sont ***pas*** *autorisés. Chaque réponse devra être soigneusement justifiée (ne pas se contenter d'une suite de calculs sans explications).*
Le sujet comporte quatre pages et quatre exercices.

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.

(a) Calculer u_1, u_2, u_3.

(b) Donner en pseudo-code ou en python une procédure récursive prenant en entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de u_n.

(c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 4 + 3^n$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression explicite de la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Solution:

(a) On a

$$u_1 = 3u_0 - 8 = 15 - 8 = 7, \quad u_2 = 3u_1 - 8 = 21 - 8 = 13, \quad u_3 = 3u_2 - 8 = 39 - 8 = 31.$$

(b)
```
def u(n):
    if n==0:
        return 5
    return 3*u(n-1)-8
```

(c) On considère pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{H}_n$: $u_n = 4 + 3^n$. On a $4 + 3^0 = 4 + 1 = 5 = u_0$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Par définition de la suite, on a $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Comme $\mathcal{H}_n$ est vraie, on a $u_n = 4 + 3^n$. Donc

$$u_{n+1} = 3u_n - 8 = 3(4 + 3^n) - 8 = 3.4 - 8 + 3.3^n = 4 + 3^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $\mathcal{H}_n$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 4 + 3^n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après la question précédente

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (4 + 3^k) = \sum_{k=0}^{n} 4 + \sum_{k=0}^{n} 3^k.$$

Par la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 4(n+1) + \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = 4(n+1) + \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Tournez la page

Exercice 2. (a) Donner, en écriture hexadécimale, le résultat de la somme $(\mathrm{AF714})_{16} + (\mathrm{FAC2019})_{16}$

(b) Écrire en base 3 l'entier qui s'écrit 2019 en base 10.

(c) Donner, en binaire, le quotient et le reste de la division euclidienne de $(1010101010101)_2$ par 5.

Solution:

(a) En posant l'addition directement en hexadécimal (à écrire sur la copie), on trouve

$$(\mathrm{AF714})_{16} + (\mathrm{FAC2019})_{16} = (\mathrm{FB7172D})_{16}.$$

(b) On effectue les divisions euclidiennes par 3 :

```
2019 = 673 × 3 + 0
 673 = 224 × 3 + 1
 224 =  74 × 3 + 2
  74 =  24 × 3 + 2
  24 =   8 × 3 + 0
   8 =   2 × 3 + 2
   2 =   0 × 3 + 2
```

Donc $2019 = (2202210)_3$.

(c) On peut passer par l'écriture décimale et calculer la division de 5461 par 5, mais c'est probablement plus rapide de poser le calcul en binaire, avec $5 = (101)_2$. En effet le motif « 101 » est répété dans le nombre à diviser. (Poser la division euclidienne sur la copie.) On trouve $q = (10001000100)_2$ et $r = 1$.

Tournez la page

Exercice 3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, 11 divise $10^n + (-1)^{n+1}$.

(b) Soit n un entier naturel et $n = (a_r a_{r-1} \dots a_0)_{10}$ son écriture en base 10. Montrer que 11 divise $n - \sum_{k=0}^{r} (-1)^k a_k$.

(c) En déduire le reste de la division euclidienne de 138265405753556863 par 11.

Solution:

(a) On considère pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{H}_n \colon 11 | (10^n + (-1)^{n+1})$

On a $10^0 + (-1)^{0+1} = 1 - 1 = 0$ et $0 = 11 \times 0$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. On a

$$10^{n+1} + (-1)^{n+2} = 10(10^n + (-1)^{n+1}) - 10(-1)^{n+1} - (-1)^{n+1} = 10(10^n + (-1)^{n+1}) - (-1)^{n+1}.11$$

Comme $\mathcal{H}_n$ est vraie, 11 divise $10^n + (-1)^{n+1}$. Comme 11 divise aussi $(-1)^{n+1}.11$, 11 divise $10(10^n + (-1)^{n+1}) - (-1)^{n+1}.11$. Donc 11 divise $10^{n+1} + (-1)^{n+2}$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $\mathcal{H}_n$ est vraie,

(b) Par définition de l'écriture en base 10, on a $n = \sum_{k=0}^{r} a_k 10^k$. Donc

$$n - \sum_{k=0}^{r} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{r} a_k (10^k + (-1)^{k+1})$$

D'après la question précédente, pour tout entier k compris entre 0 et r, 11 divise $10^k + (-1)^{k+1}$ donc divise $a_k(10^k + (-1)^{k+1})$. Ainsi l'expression considérée est une somme d'entiers divisibles par 11, et est donc divisible par 11.

(c) Si la différence de deux entiers est divisible par 11, ces deux entiers ont le même reste dans la division euclidienne par 11 (et réciproquement). D'après la question précédente, tout entier a donc même reste dans la division euclidienne par 11 que l'entier obtenu en prenant la somme alternée de ses chiffres. Ainsi $N = 138265405753556863$ a le même reste dans la division euclidienne par 11 que

$$-1+3-8+2-6+5-4+0-5+7-5+3-5+5-6+8-6+3 = 2-6-1-4+2-2+0+2-3 = -10$$

or $-10 = -11 + 1$ donc le reste de la division euclidienne de N par 11 est 1.

Tournez la page

Exercice 4. En appliquant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de 594 et 272.

Existe-t-il des entiers relatifs u et v tels que $594\,u + 272\,v = 3$?

Solution: On effectue l'algorithme d'Euclide :

```
594 = 2×272 + 50
272 = 5×50 + 22
50 = 2×22 + 6
22 = 3×6 + 4
6 = 1×4 + 2
4 = 2×2 + 0
```

Le dernier reste non nul est le pgcd cherché : c'est donc 2.

Comme 594 et 272 sont pairs, pour tous entiers relatifs u et v, $594\,u$ et $272\,v$ sont pairs, ainsi que $594\,u + 272\,v$. Comme 3 est impair, il ne peut donc pas exister d'entiers relatifs u et v vérifiant la propriété de l'énoncé.

Fin de l'énoncé