Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global

Vũ Ngọc San



Résumé

Ce livre présente une vue panoramique des systèmes hamiltoniens complètement intégrables de dimension finie dans laquelle on apercevra, côte à côte et sous des traits similaires, leurs aspects classiques et quantiques.

La mécanique classique y est abordée sous l'angle de l'étude géométrique du feuilletage lagrangien singulier, dont les feuilles régulières sont les fameux tores de Liouville. Les singularités du système sont étudiées au moyen de formes normales locales et semi-globales, faisant apparaître des invariants topologiques et symplectiques. Certains liens avec les variétés toriques sont explorés.

Les systèmes intégrables quantiques sont traités dans le cadre de l'analyse microlocale semi-classique. Le calcul pseudo-différentiel et les opérateurs intégraux de Fourier offrent un outillage efficace pour découvrir comment les caractéristiques géométriques de ces systèmes influent sur leurs propriétés spectrales.

Vũ NGọc San, Institut de recherches mathématiques de Rennes (CNRS/Université de Rennes 1) http://blogperso.univ-rennes1.fr/san.vu-ngoc/

Table des matières

Introduction 3					
	Mécanique classique				
	Mécanique quantique				
	Plan de ce livre				
	Ren	nerciements			
1	1. To the death of X Handbook and death and				
T	1 1	Opératours & psoudo différentiels			
	1.1	Aspect formal			
		Aspect former 10			
	1 2	Aspect collection at front d'anda			
	1.2	$\begin{array}{c} Price of the formula of the$			
	1.5	Théorème d'Egoroy			
	1.4				
2	Exemples fondamentaux 3 ⁴				
	2.1	L'oscillateur harmonique			
		L'oscillateur classique			
		L'oscillateur quantique			
	2.2	Le double puits			
		Le double puits classique			
		Le double puits quantique			
	2.3	Le pendule sphérique 46			
		Le pendule classique			
		Le pendule quantique 53			
3	1 ne	Termos permeles con peint de sue heuristicue 55			
	3.1	Pormes normales : un point de vue neuristique			
	3.2	Points reguliers			
		Semi-classique			
	2.2	Solutions microlocales			
	3.3	Fourts singuliers			
		Feuilletages singuliers			
		Equivalence forte en semi-classique			

		Singularités non dégénérées	77	
		Singularités non dégénérées semi-classiques	01 82	
		Vers l'analyse spectrale : versions à paramètres	86	
		vers ranaryse spectrule . versions a parametres	00	
4	Thé	orie Semi-globale	87	
	4.1	Fibres régulières	87	
		Les coordonnées actions-angles	88	
		Semi-classique	92	
		Conditions de Bohr-Sommerfeld	92	
	4.2	Fibres singulières	97	
		Cas elliptique	97	
		Cas fover-fover	100	
		Cas hyperbolique	104	
		Cas restants —	113	
_			448	
5	Ine	orie Globale	117	
	5.1	Le spectre exact	118	
		Le spectre conjoint	118	
		et son approximation semi-classique	120	
	5.2	Le diagramme de bifurcation	121	
	5.3	Fibrations régulières : le cas de la monodromie	123	
		Monodromie affine classique	123	
		Monodromie quantique	124	
	5.4	Foyer-foyer et monodromie	126	
	5.5	Systèmes toriques et polyades	127	
		Oscillateurs harmoniques	127	
		Systèmes de type torique	129	
	5.6	Systèmes presque toriques	134	
		Systèmes à indice de défaut égal à 1	135	
		Formule de Duistermaat-Heckman et monodromie	138	
	5.7	Bifurcations et redistribution de valeurs propres	140	
In	Index 1			
Ta	Table des figures			
יים				
Ы1	ibliographie 151			

Introduction

La Nature est un temple où de vivants piliers Laissent parfois sortir de confuses paroles ; L'homme y passe à travers des forêts de symboles Qui l'observent avec des regards familiers.

BAUDELAIRE, Correspondances (Les Fleurs du Mal)

Le pendule de Huygens — Les origines de la géométrie et donc de la mécanique (en particulier céleste) se confondent avec celles des mathématiques elles-mêmes. Néanmoins, on attribue généralement l'étude du premier système dynamique au mathématicien hollandais Christiaan Huygens. Sous le règne de Louis XIV, Huygens obtient la charge importante de diriger l'Académie Royale des Sciences. C'est ainsi qu'il propose au roi son célèbre traité sur le mouvement du pendule pesant et son application à la construction d'horloges à balancier [87]. Huygens est fier que ses pendules, les plus exactes jamais construites alors, équipent les appartements du roi, servent les bateaux pour leurs mesures de longitudes ⁽¹⁾, et procèdent d'une analyse mathématique subtile. C'est un exemple à méditer d'une symbiose entre ce qu'on appellerait aujourd'hui les mathématiques pures et appliquées :

Dans cette science [la géométrie] que j'ai toujours beaucoup admirée et aimée, je me suis proposé surtout, toutes les fois que je m'y adonnai, la considération de problèmes dont la solution serait utile soit pour la commodité de la vie soit pour la connaissance de la nature. Mais c'est lorsque je tombais sur des sujets où l'utilité était unie à une difficulté de les tirer au clair qui exigeait des raisonnements subtils que j'avais l'impression de m'y appliquer le plus avantageusement. [op. cit.]

Le pendule de Huygens le plus simple, appelé aussi "pendule sphérique", pourra servir d'exemple pour la majorité des mathématiques que je présenterai ici. C'est le premier exemple de ce qu'on appelle aujourd'hui un *système complètement intégrable*, et c'est un exemple non trivial. Huygens savait que pour un pendule simple seules les *petites oscillations* possèdent une fréquence constante, ce qui en fait en quelque sorte le précurseur de

^{(1).} avec un succès limité, il est vrai. En contrepartie, la précision des pendules a permis de découvrir que le champ gravitationnel terrestre n'est pas constant à la surface du globe!

INTRODUCTION



FIGURE 1: Christiaan Huygens et son livre sur les horloges à balancier

l'analyse locale des systèmes dynamiques. L'analyse globale de ce système est bien plus tardive, puisque c'est en 1980 que Cushman et Duistermaat exhibent le pendule sphérique comme premier exemple dont la monodromie est non triviale [52]. Une dizaine d'années plus tard, cette monodromie est comprise en terme de la singularité dite foyer-foyer que possède ce système lorsque le pendule est en position d'équilibre instable, à son altitude maximale [104, 164, 166]. La géométrie de cette singularité est exploitée dans [147] pour décrire son influence sur les systèmes semi-classiques : les systèmes décrits par la mécanique quantique et dont la limite classique possède de telles singularités. Cette description met en œuvre des invariants spectraux qui se révèlent après coup généraliser des invariants symplectiques semi-globaux de ces fibrations lagrangiennes singulières [151]. À leur tour, ces invariants se révèlent utiles pour déterminer la persistance de tores invariants (KAM) en cas de perturbation du système...[57] Enfin dans l'étude du pendule sphérique se pose également la question globale du recollement des informations (géométrique, spectrales) recueillies en différents points singuliers. Il reste néanmoins que le pendule est bel et bien un modèle de simplicité dans la mesure où il ne présente pas de singularité de type hyperbolique. Les singularités hyperboliques font la richesse d'autres exemples non moins célèbres comme les toupies (Lagrange, Kovalevskaya), les billards ellipsoïdaux, le problème de C. Neumann, etc. (consulter par exemple le livre [115]).



J. Lagrange



S. Kovalevskaya

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je me propose de situer dans leur cadre historique les notions qui vont nous intéresser et qui concernent l'étude des systèmes complètement intégrables en mécanique classique et quantique.

Mécanique classique

[...] il est singulier que dans les questions qui paraissent très simples, dans le cas, par exemple, du mouvement de trois points qui s'attirent mutuellement, on ne connaisse pas d'autres intégrales exactes de ces équations, que celles qui sont communes à tous les problèmes, et qui sont fournies par les principes généraux du mouvement du centre de gravité, des aires, des forces vives. POISSON [120]

On utilisera toujours la formulation *hamiltonienne* ⁽²⁾ de la mécanique classique. L'espace des positions et des vitesses, ou encore *espace des phases*, est en termes modernes une variété symplectique. C'est une variété différentiable *M* munie d'une 2-forme différentielle ω fermée ($d\omega = 0$) et non dégénérée (de déterminant non nul en chaque point); on dit que ω est une forme symplectique. Hamilton avait introduit une certaine intégrale de cette forme qu'il appelait la « fonction caractéristique » qu'on a vite rebaptisée « intégrale d'action ». Poisson a très vite reconnu l'utilité de la vision de Hamilton et de cette forme symplectique en elle-même, qu'il appelait en termes surannés une « quantité infiniment petite du second ordre » [120]. Elle induit une dualité entre 1-formes et champs de vecteurs sur *M*. Étant donnée une fonction $f \in C^{\infty}(M)$, on note \mathcal{X}_f le champ hamiltonien correspondant : $\omega(\mathcal{X}_f, \cdot) = -df$. Ce champ définit un système dynamique sur *M* dont les

^{(2).} de William Rowan Hamilton, brillant mathématicien irlandais. Il écrit son mémoire [76] à l'âge de 29 ans.

solutions sont les trajectoires $t \mapsto m(t)$ vérifiant

$$\frac{dm(t)}{dt} = \mathcal{X}_f(m(t)). \tag{1}$$

On appelle (1) le système hamiltonien associé à la fonction f; cette dernière étant appelée en retour le « Hamiltonien du système ».

A toute structure symplectique est associé un *crochet de Poisson*, introduit par Poisson en 1809 [119] — donc bien avant Hamilton —, qui est une forme bilinéaire antisymétrique sur $C^{\infty}(M)$ donnée par la formule

$$\{f,g\} = \mathcal{X}_f g = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g).$$

Une fonction *g* transportée le long du flot du système hamiltonien (1) vérifie donc $\frac{dg(m(t))}{dt} = \{f, g\}(m(t))$. En particulier *f* est toujours constante le long des trajectoires du système. Il est remarquable qu'ici *f* et *g* jouent des rôles interchangeables; on en déduit le *théorème de Noether* : si on se donne un système hamiltonien *f* qui admet une « symétrie hamiltonienne » *g* (*ie. f* est invariante par le flot engendré par *g*), alors *g* est une *intégrale du mouvement* : *g* est invariante le long du flot engendré par *f*.

En mécanique classique, un système hamiltonien complètement intégrable est un système possédant un ensemble complet d'intégrales premières en involution. Autrement dit si M est de dimension 2n on se donne n fonctions lisses f_1, \ldots, f_n dont les différentielles sont presque partout indépendantes et vérifiant $\{f_i, f_j\} = 0$ pour tout couple (i, j)⁽³⁾. Nombreux sont les exemples historiques de systèmes hamiltoniens qui, par le jeu de symétries et via le théorème de Noether, se sont révélés être complètement intégrables.

La plupart du temps, dans ce livre, on ne s'intéressera pas particulièrement au Hamiltonien H qui définit le système. En principe, c'est n'importe quelle fonction qui commute avec les f_i . Certains auteurs demandent parfois que H soit une fonction des f_i — ce qui est toujours le cas près d'un point régulier. D'autres supposent même que H est l'une des fonctions f_i , par exemple f_1 .

De notre point de vue, l'objet essentiel sera plutôt l'*application moment* $F := (f_1, \ldots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$.

Tores de Liouville? — Le premier résultat fondamental dans l'étude des systèmes complètement intégrables est qu'au voisinage d'une composante connexe régulière d'une fibre de *F*, *F* est une fibration symplectiquement linéarisable. Si la fibre est compacte, le modèle linéaire est le voisinage de la section nulle de $T^*\mathbb{T}^n$ muni de la fibration en tores horizontaux.

^{(3).} Un peu d'algèbre linéaire montre que n est le nombre maximum de telles fonctions indépendantes en involution.

MÉCANIQUE CLASSIQUE

Cela implique en particulier que les trajectoires de n'importe quel Hamiltonien du système sont des droites s'enroulant sur un tore horizontal et parcourues à vitesse constante (mais dépendant du tore considéré).

Ces tores lagrangiens sur lesquels s'effectue la dynamique sont nommés *tores de Liouville,* alors que le théorème en question ou théorème des variables *actions-angles* est attribué à Liouville et Arnold. Comme nous allons le voir, cette nomenclature ne reflète pas exactement l'historique du sujet.



J. Liouville

Né l'année où Poisson introduit son « crochet », Liouville a certainement œuvré pour le développement des systèmes complètement intégrables. Par l'introduction dans les années 1850 de la 1-forme différentielle $\alpha = \sum_i p_i dq_i$ dite avec justesse « 1-forme de Liouville » il est un des précurseurs de la vision moderne de la mécanique en terme de géométrie symplectique⁽⁴⁾.

Sa contribution principale dans ce domaine est d'avoir montré comment intégrer localement un « système complètement intégrable » au moyen d'une primitive locale de α restreinte aux sous-variétés invariantes [98].

Pour autant, l'appellation « tore de Liouville » me paraît douteuse. À ma connaissance, rien dans les publications de Liouville ne permet d'affirmer qu'il savait qu'en général le mouvement avait lieu sur un tore (même s'il est probable qu'il s'en soit rendu compte sur un certain nombre d'exemples où les tores lagrangiens sont donnés par des équations polynomiales explicites). Au contraire, les articles [98, 100, 99] ne font état que d'études à caractère purement *local*.

La première étude sérieuse de la dynamique des systèmes intégrables sur toute la fibre lagrangienne $F^{-1}(c)$ est due il me semble à Mineur [108, 109], qui dans des articles des années 1935–1937 récemment redécouverts (voir [145, 168]) énonce et prouve pour la première fois le théorème des variables actions-angles ⁽⁵⁾. On peut même arguer qu'Einstein connaissait ces tores « de Liouville », qui apparaissent plus ou moins dans son article de 1917 [60]. Mais l'argument mathématique essentiel manque.

Ce théorème a ensuite été redécouvert par Arnold en plusieurs étapes. En 1963 [2], il montre que les fibres sont des tores sur lesquelles la dynamique est quasi-périodique; dans [5], il complète l'énoncé en incluant la description du voisinage du tore, mais rajoute pour cela une hypothèse superflue. Voir également [4].

Plus récemment, de nombreuses personnes ont fourni diverses preuves complètes, dont celle du célèbre article de Duistermaat [52].

^{(4).} Il est difficile d'être catégorique sur l'historique de cette 1-forme. D'une certaine façon, moins explicite, elle est déjà présente dans les travaux de Poisson et Hamilton.

^{(5).} J'espère mettre au propre dans un délai (dé)raisonnable tous les détails de la preuve de Mineur...

Duistermaat construit dans cet article les obstructions à *globaliser* le théorème de Liouville-Arnold-Mineur, lorsque l'ouvert des valeurs régulières de F n'est pas topologiquement trivial. Il obtient deux invariants : la monodromie et la classe de Chern. La première est l'obstruction à ce que le fibré en tore donné par F soit un fibré principal; si la monodromie est triviale, la classe de Chern est la classe d'équivalence du fibré principal.

Le problème de la globalisation des variables actions-angles avait déjà été abordé quelques années auparavant par Nekhoroshev [117], qui en avait donné une réponse un peu moins complète. Par la suite, d'autres généralisations ont été proposées, dont celle de Dazord et Delzant qui étudient le cas de feuilletages isotropes symplectiquement complets (dans le sens où l'orthogonal symplectique est aussi un feuilletage) [44]. Un point intéressant est qu'ils voient la base comme une variété de Poisson.

Singularités — L'approche de Duistermaat est très naturelle. D'un point de vue pratique, son principal inconvénient est qu'elle ne considère que la partie régulière de la fibration F. On sait bien par l'exemple de la théorie de Morse que de tels invariants sont souvent calculables au moyen justement des *singularités* du système.

Même si les premières *formes normales locales* pour les singularités des systèmes intégrables datent maintenant de près de 40 ans ([123]), leur utilisation globale est très récente (et d'une certaine façon, assez tardive par rapport aux progrès de la géométrie algébrique).

Dans cette optique, le premier résultat – que j'ai déjà mentionné plus haut – est qu'on peut "génériquement" calculer la monodromie par l'étude des singularités de type foyer-foyer. En se basant sur les formes normales locales C^{∞} des singularités des systèmes intégrables dues à Eliasson [61], on peut classifier symplectiquement ces systèmes près d'une telle fibre singulière; c'est ce que j'appelle la classification *semi-globale* [151]. Le passage du semi-global au global possède plusieurs facettes. Dans la suite logique de l'article de Duistermaat, l'approche "classe caractéristique" qui permet une classification topologique au moyen d'une chirurgie adaptée a été menée à bien par Nguyên Tiên Zung [165, 167]. Une autre approche consiste à s'intéresser seulement aux systèmes proches des actions hamiltoniennes toriques dont on connaît bien la classification et a été récemment explorée dans les articles [133, 97] et [152]. J'en parlerai davantage par la suite.

Mécanique quantique

La formulation mathématique actuelle de la mécanique quantique non relativiste se résume à l'étude d'opérateurs (en général auto-adjoints) sur des espaces de Hilbert : à leur spectre et leur dynamique. Mais dans son fondement physique, la mécanique quantique est indissociable de la mécanique classique (voir par exemple l'ouvrage [93]). Il est donc naturel et hautement souhaitable de disposer d'une théorie mathématique quantique qui intègre la mécanique classique comme cas limite. Dans une telle théorie dite *semi-classique*, un système complètement intégrable est la donnée de *n* opérateurs $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n$ qui commutent deux à deux : $[\hat{f}_i, \hat{f}_j] = 0$, et dont la *limite classique* fournit des Hamiltoniens f_i qui définissent un système complètement intégrable au sens classique.

Bohr, Sommerfeld, Einstein et les autres — Parmi les quelques notions dont j'aurai besoin dans ce texte pointent les noms de physiciens célèbres, fondateurs de la mécanique quantique. *Planck*, le premier, a compris que certains phénomènes physiques nécessitaient l'abandon douloureux de la théorie classique. En 1900 il annonce sa formule de radiation faisant intervenir des quanta d'énergie. Pourtant, Planck prétend ne pas comprendre la théorie quantique et laisse le soin à ses collègues de mettre sur pied l'arsenal adéquat. Quelques années après, en étudiant l'effet photoélectrique, *Einstein* réalise qu'il a besoin d'introduire des quanta d'énergie semblables à ceux de Planck, qui s'écrivent $\hbar v$, où v est un *entier* et \hbar est (à un facteur 2π près) une constante appelée désormais la constante de Planck. En 1913 Bohr confirme la formule de Planck en calculant la position des raies spectrales de l'atome d'hydrogène, mettant ainsi la communauté scientifique d'accord sur la nécessité d'une nouvelle théorie. Le physicien-mathématicien Sommerfeld généralise les résultats de Bohr au cas d'orbites elliptiques ainsi qu'au cas multidimensionnel avec des variables canoniques séparées.



M. Planck



A. Einstein



A. Sommerfeld

Cette règle de quantification dite de Bohr-Sommerfeld est le premier résultat *semi-classique*, dans la mesure où il se base sur un outil classique (des trajectoires périodiques) pour décrire un résultat quantique (la quantification des transitions d'énergie). Il est remarquable que cette "règle" précède l'invention de la mécanique quantique moderne en 1925-1926, années où *Schrödinger* écrit la théorie de l'atome d'hydrogène au moyen d'un opérateur différentiel, où *Dirac* explique rigoureusement la loi de Planck, et où *Heisenberg* propose son principe d'incertitude et la formulation « matricielle » de la mécanique quantique.

INTRODUCTION



N. Bohr





E. Schrödinger

Très vite, les fondements mathématiques de la mécanique quantique de Heisenberg en termes d'algèbres d'opérateurs sont proposés par *Von Neumann* et rassemblés dans le livre [141] en 1932. Planck, Einstein, Bohr, Heisenberg et Schrödinger ont chacun reçu le prix Nobel de physique.

En 1917, à la suite des travaux de Sommerfeld et d'Epstein (ce dernier a l'idée d'utiliser les techniques de Jacobi pour trouver des variables canoniques séparées), Einstein [60] propose de généraliser les règles de Bohr-Sommerfeld au cas multidimensionnel des systèmes intégrables. Cette approche a été d'abord complètement ignorée par le monde de la physique quantique, et ce probablement pour les deux raisons suivantes : en premier lieu, même si on sait depuis Liouville comment localement transformer un système complètement intégrable en un système aux variables séparées, il est très délicat d'incorporer des transformations canoniques générales comme celles de Liouville dans la théorie de Schrödinger⁽⁶⁾; l'autre raison, à mon avis, est que l'article d'Einstein est à la fois trop géométrique (dans le sens abstrait du terme) pour parler aux physiciens de l'époque, et trop vague pour intéresser les mathématiciens. Il contient pourtant de nombreuses idées redécouvertes bien plus tard par des mathématiciens comme Mineur et Arnold.

Certainement l'un des premiers mathématiciens à s'intéresser de près aux intégrales d'actions dans les systèmes intégrables, Mineur en 1935 a immédiatement reconnu leur application possible à une règle de quantification de type Bohr-Sommerfeld [107]. Malheureusement, comme Einstein en 1917, il n'en propose aucune justification mathématique autre que l'idée très générale que cette quantification, assurant une certaine robustesse aux objets considérés, doit s'appliquer à des invariants adiabatiques comme les intégrales d'action.

^{(6).} En outre, ce résultat local de Liouville ne donne pas de recette pratique pour calculer les intégrales d'action de Bohr-Sommerfeld.

MÉCANIQUE QUANTIQUE

En 1958, Keller ⁽⁷⁾ redécouvre enfin l'article d'Einstein et tente de le relier à l'équation de Schrödinger [90].

Analyse semi-classique — Même si la mécanique quantique a été construite pour pallier les insuffisances de la mécanique classique, sa formulation même repose sur cette dernière; la quantification des niveaux d'énergie de l'atome de Bohr est indissociable de l'analyse des trajectoires circulaires des électrons comme particules « classiques ». Certes on peut, après coup, développer (avec succès) une mécanique quantique abstraite basée sur l'approche « théorie des opérateurs » de Heisenberg et Von Neumann. Mais comment a-t-on déterminé la forme du potentiel dans l'équation de Schrödinger? On peut postuler des interactions élémentaires, vérifiées par l'expérience, et tout reconstruire sur la base de celles-ci. Mais si on cherche à expliquer ces « lois », il me semble que dans la vaste majorité des cas le potentiel est déterminé par analogie avec la mécanique classique. Développer une théorie mathématique rigoureuse de la limite semi-classique est, à mon sens, non seulement un outil technique intéressant, qui permet parfois d'en savoir davantage et de mieux calculer, mais également une nécessité philosophique qui justifie les fondements de mécanique quantique. Plus prosaïquement, mais dans le même ordre d'idées, il m'est arrivé d'entendre des physiciens affirmer que le semi-classique sert surtout à comprendre le quantique.

Je parlerai dans ce document de la "recette" semi-classique proposée par Bohr et Sommerfeld et qui permet vraiment de décrire le spectre des systèmes complètement intégrables (et pas seulement séparables, contrairement à une croyance assez répandue). Mais le lecteur ne doit pas penser que le semi-classique se restreint au cas intégrable. Les techniques semi-classiques pour des systèmes non complètement intégrables incluent par exemple la fameuse « formule des traces » de Gutzwiller [74] et Balian-Bloch [8], abondamment étudiée par de nombreux mathématiciens encore de nos jours, à la suite de Chazarain [25], Colin de Verdière [28] et Duistermaat-Guillemin [54].

La justification mathématique de ces recettes est en général délicate, même dans le cas intégrable. Les outils "élémentaires" d'analyse asymptotique qui permettent d'écrire l'équation de Schrödinger dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ donnent lieu à des équations souvent très compliquées, car il est difficile d'y retrouver les aspects géométriques de la mécanique classique. Le premier à s'être intéressé à mettre en place une théorie de « quantification asymptotique » de la mécanique classique est à ma connaissance Maslov dès les années 1960. On consultera avec intérêt son livre [102]. Cette époque voit également l'invention des opérateurs pseudo-différentiels qui servent immé-

^{(7).} Je passe ici sur plusieurs développements historiques comme les approches de Brillouin et Kramers en 1926. Dans la littérature physique, ce que j'appelle toujours la règle de Bohr-Sommerfeld et en général appelée la *quantification EBK* pour Einstein, Brillouin et Keller.

diatement pour démontrer le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. L'idée de les utiliser pour formaliser de façon satisfaisante l'approche de Maslov fait son chemin, en partie grâce à Duistermaat qui applique les puissantes méthodes de Hörmander, et qui est le premier à avoir examiné les conditions de Bohr-Sommerfeld dans ce contexte [51]. En même temps des mathématiciens comme Leray [95] et Arnold [3] comprennent le rôle géométrique de l'indice de Maslov que ce dernier avait introduit (à la suite de Keller) comme correction de la règle de Bohr et Sommerfeld.⁽⁸⁾

La théorie des opérateurs pseudo-différentiels et opérateurs intégraux de Fourier « à petit paramètre \hbar » est ensuite développée systématiquement et avec grand succès par Helffer, Robert, Sjöstrand et d'autres... C'est celle que j'utiliserai dans ce texte. À la suite de Duistermaat, le premier à avoir justifié rigoureusement l'utilisation des conditions de Bohr-Sommerfeld pour décrire le spectre d'un système complètement intégrable régulier est Colin de Verdière [31] dans le cas d'une variété compacte, suivi par Charbonnel [21] pour \mathbb{R}^n . Ces travaux se situent dans le cadre de la théorie pseudodifférentielle initiale dite *homogène* qui est moins intuitive du point de vue semi-classique. Le cas à petit paramètre a ensuite été traité par Charbonnel [22] au moyen de l'asymptotique du propagateur quantique. Une méthode plus proche de la formulation initiale de Bohr-Sommerfeld et basée sur la construction de quasi-modes est donnée dans [147]. C'est celle qui sera reprise ici (théorème 4.1.11).

Pour finir cette introduction et pour évoquer un sentiment que j'ai eu l'occasion d'éprouver à plusieurs reprises, je dirais que l'inconvénient principal de l'analyse pseudo-différentielle réside dans l'intrinsèque difficulté à définir les objets, ce qui est en grande partie cause d'une incompréhension presque totale de la part des physiciens. Tant qu'un effort ne sera pas fait de la part des mathématiciens pour vulgariser leur science, les physiciens continueront d'affirmer (non sans raison) que les seuls opérateurs de Schrödinger que l'on puisse rigoureusement traiter avec la règle de Bohr-Sommerfeld sont les systèmes *séparables* ⁽⁹⁾(ainsi l'atteste par exemple Gutz-

^{(8).} Bien entendu les physiciens savaient depuis longtemps que les règles de Bohr-Sommerfeld devaient en général être corrigées. Voici ce qu'en dit Heisenberg en 1924 : « *Il* s'avéra que, de prime abord, les formules déduites de la théorie de Bohr étaient incorrectes ; mais que, grâce à une petite modification de ces formules, on pouvait arriver à des équations nouvelles qui fournissaient apparenment, de façon précise, les résultats expérimentaux. C'est ainsi que l'on apprit à s'adapter progressivement aux difficultés qui se présentaient. »[77]. Mais le choses allaient vite à cette époque : Einstein affirmait encore en 1917 qu'« *il ne subsiste aucun doute sur le fait que pour les systèmes dynamiques périodiques à un degré de liberté la condition de quantification admet la forme* $\int pdq = nh$ ».

^{(9).} La définition d'un système *séparable* est délicate dans la mesure où, pour les pionniers de la mécanique quantique, la distinction entre séparable et intégrable n'est pas claire. Est séparable un système dynamique qui s'intègre facilement en choisissant des "bonnes" coordonnées dans l'espace des positions. La solution approchée correspondante de l'équation de Schrödinger est alors un produit de fonctions, chacune à une seule variable. Einstein discute ce point dans son article de 1917 [60].

PLAN DE CE LIVRE

willer en 1990 [75]).

Plan de ce livre

L'Art est long et le Temps est court.

BAUDELAIRE, Guignon (Les Fleurs du Mal)

Ce ouvrage se propose d'expliquer la théorie des systèmes intégrables classiques et quantiques dans une progression naturelle allant des résultats les plus locaux aux plus globaux. Il serait en partie erroné de penser qu'il suit un ordre historique. Les précurseurs de l'étude des systèmes dynamiques n'ont considéré que des exemples globaux ⁽¹⁰⁾, puisqu'ils sont antérieurs à l'invention du calcul infinitésimal (et donc de l'analyse locale)! La remarque vaut avec encore plus de force pour la mécanique quantique, puisque la notion de transformation canonique locale quantique est très récente et toujours considérée comme délicate : elle repose essentiellement sur l'analyse microlocale initiée par Hörmander dans les années 1960.

Ce n'est bien entendu pas le but de ce livre que de présenter en détail la variante semi-classique de l'analyse microlocale. Cela étant dit, le lecteur appréciera peut-être qu'on en rappelle malgré tout les principales propriétés. C'est le but du premier chapitre.

Trois exemples simples et représentatifs des préoccupations de ce livre sont exposés au deuxième chapitre.

Au troisième chapitre commence l'étude des systèmes intégrables proprement dite. Le chapitre est consacré à la compréhension locale dans l'espace des phases de la structure créée par la donnée d'un système intégrable. On y adopte le point de vue des formes normales.

Le quatrième chapitre présente l'aspect fondamental de la géométrie dite « semi-globale » qui s'intéresse à des ensembles invariants par le flot conjoint du système. Des invariants numériques apparaissent, liés à la topologie ou à la structure symplectique.

Le cinquième et dernier chapitre rassemble les résultats obtenus pour en déterminer les conséquences sur l'analyse ou la géométrie globale du système, en commençant par la théorie spectrale du spectre conjoint. On y trouve des résultats naturels concernant la globalisation des conditions de Bohr-Sommerfeld, ainsi que d'autres, plus inattendus, comme une formule de géométrie symplectique de type Duistermaat-Heckman où se manifeste la monodromie du système intégrable.

Le livre ne mentionne qu'un nombre très limité d'exemples. Le lecteur intéressé est invité à consulter les références pour les y dénicher. Outre les exemples fondamentaux du chapitre 2, il est bon néanmoins d'avoir à l'esprit qu'il existe deux grandes classes d'exemples : d'une part, ceux qui sont

^{(10).} Et c'est encore l'optique de nombreux ouvrages sur les systèmes intégrables.

obtenus comme *approximations intégrables* de systèmes plus compliqués, typiquement à l'aide d'une forme normale de type Birkhoff. Cette technique est d'ailleurs reconnue et appréciée par les physiciens (cf. [88],[58]). D'autre part on sait montrer qu'un certain nombre d'exemples classiques possèdent une « quantification exacte » où les intégrales du mouvement deviennent des opérateurs commutant exactement avec le Hamiltonien (voir par exemple les articles [135],[105]).

Remerciements

Ce livre est la métamorphose d'un mémoire d'habilitation. Je remercie Michèle Audin et Bernard Helffer qui m'ont encouragé à opérer cette transformation qui s'est révélée plus délicate que (naïvement) prévu!

Un grand merci également au rapporteur et à tous les collègues qui se sont donné la peine de lire (et corriger) les premières versions de ce livre.

> Vũ Ngọc San, Institut Fourier (CNRS-UJF) Saint-Martin-d'Hères, décembre 2006.

Chapitre 1

Introduction à l'analyse semi-classique

La mécanique quantique occupe une position très originale dans le rang des théories physiques elle contient la mécanique classique en tant que cas limite et, en même temps, elle a besoin de ce cas limite pour pouvoir être fondée.

LANDAU et LIFCHITZ, Mécanique Quantique [93]

Le but de ce chapitre est de rappeler les fondements de l'analyse semiclassique, en insistant sur la notion de microlocalisation. Si les résultats basiques seront cités sans preuve, certains énoncés moins standard sur la notion de front d'onde seront expliqués avec quelques détails. Je ne chercherai pas à retracer l'historique de l'analyse semi-classique⁽¹⁾ mais plutôt à introduire directement les objets qui seront utiles dans la suite du livre.

Objets classiques, objets quantiques. — L'*espace des phases* de la mécanique classique sera dans ce livre une variété M de classe C^{∞} , de dimension 2n, munie d'une forme symplectique ω . On rappelle que la forme symplectique est là pour implémenter la mécanique hamiltonienne : étant donnée une fonction $f \in C^{\infty}(M)$ — appelée *observable* classique, ou Hamiltonien—, on obtient une dynamique dite « classique » par le flot du champ de vecteurs hamiltonien correspondant \mathcal{X}_f , défini par dualité :

$$\omega(\mathcal{X}_f,\cdot) = -df.$$

Le crochet de Poisson associé à cette structure symplectique est $\{f,g\} = \mathcal{X}_f g = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g)$. Il munit l'ensemble des observables d'une structure d'algèbre de Lie, compatible avec la multiplication usuelle au sens de l'identité de Leibniz :

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}.$$

^{(1).} L'essai de Helffer [78] est une très bonne référence à ce sujet.

On dit que $\mathscr{A} = C^{\infty}(M)$ est munie d'une structure d'algèbre de Poisson.

Dans cet environnement, un *système complètement intégrable* sera en général donné par l'application moment $F = (f_1, ..., f_n)$, où les f_i sont des fonctions C^{∞} sur M à valeurs réelles, qui sont en involution : $\{f_i, f_j\} = 0$. On verra au chapitre suivant les différentes facettes de cette définition. Par exemple, certaines situations mettent plutôt en valeur, au lieu de l'application F, l'espace engendré par les f_i qui est une sous-algèbre commutative de \mathscr{A} .

Les hypothèses classiques étant posées, qu'est-ce que leur *quantification*? Le mot revêt maintenant dans la littérature mathématique des aspects très divers. Au sens premier, quantifier un système de mécanique classique c'est exhiber un système de mécanique quantique dont il est, en un sens à préciser, la « limite classique ». Le procédé de quantification possède donc un aspect formel et un aspect concret. L'aspect formel consiste à déterminer la nature de cette « limite ». La façon la plus naturelle à mon sens est la quantification dite par déformation : les observables quantiques sont vues comme déformations des Hamiltoniens classiques lorsqu'un certain paramètre \hbar cesse d'être nul. Ainsi, si \mathscr{A} désigne l'algèbre des Hamiltoniens classiques, l'algèbre quantique formelle est

$$\mathscr{A}\llbracket\hbar\rrbracket := \mathscr{A} + \hbar\mathscr{A} + \hbar^2\mathscr{A} + \cdots$$

Cette algèbre est supposée munie d'un produit associatif noté en général \star ou \star_{\hbar} qui mélange la multiplication usuelle et le crochet de Poisson de façon à satisfaire à l'axiome :

$$f \star g = fg + \frac{\hbar}{2i} \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Ainsi, d'une part le produit « étoile ⁽²⁾ » tend vers la multiplication usuelle lorsque $\hbar \rightarrow 0$, d'autre part si l'on introduit le crochet associatif $[f,g] = f \star g - g \star f$ on obtient l'identité dite parfois «relation de commutation de Dirac ⁽³⁾ » :

$$[f,g] = \frac{\hbar}{i} \{f,g\} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Formellement, on peut donc naturellement définir un *système complètement intégrable quantique* comme la donnée de *n* observables $f_j \in \mathscr{A}[\![\hbar]\!]$ vérifiant $[f_i, f_j] = 0.$

Remarque 1.0.1 Il existe évidemment des variantes et généralisations de la version que je présente de la quantification par déformation. Par exemple, on peut abandonner l'axiome de produit étoile pour demander uniquement la relation de commutation de Dirac. Plus importante est la généralisation

^{(2).} On dit en anglais « star-product ».

^{(3).} À la suite de Heisenberg, Dirac a été le premier à fonder la mécanique quantique sur ces aspects « non commutatifs ».

des constructions au cadre des *variétés de Poisson*. Puisqu'en effet rien ne dépend de la structure symplectique autrement que par le crochet de Poisson il est naturel de considérer le cadre d'une variété M simplement munie d'un crochet de Poisson — satisfaisant les identités de Jacobi et Leibniz. Une grande réussite de Kontsevich est d'avoir montré que cela suffisait pour obtenir en toute généralité l'existence d'un produit \star sur l'algèbre des fonctions C^{∞} [92].

Il se trouve que la quantification par déformation ne suffit pas pour faire de la « vraie » mécanique quantique. L'aspect concret du procédé de quantification consiste justement à obtenir des vrais opérateurs, c'est-à-dire à réaliser l'algèbre quantique $\mathscr{A}[[\hbar]]$ comme une algèbre d'opérateurs agissant sur un certain espace de Hilbert, permettant par exemple de traiter l'opérateur de Schrödinger $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x)$. C'est cet aspect concret, conjointement aux propriétés formelles, qui fait l'intérêt et la force de l'analyse semi-classique que ce chapitre tente de présenter.

Cependant, la quantification semi-classique n'est pas possible pour n'importe quelle variété symplectique M. L'algèbre des *opérateurs pseudo-différentiels* concerne uniquement le cas où M est un fibré cotangent sur une variété X de dimension n (on note $M = T^*X$), et c'est uniquement cette quantification que nous étudierons dans ce livre.

Lorsqu'on quantifie des fibrés cotangents, on ne se rend pas toujours compte que d'un point de vue géométrique la seule donnée de la forme symplectique est insuffisante. L'analyse semi-classique nécessite en réalité le choix d'une *primitive* de ω , c'est-à-dire une 1-forme α telle que $d\alpha = \omega$. Lorsque $M = T^*X$, il existe un choix canonique pour α : c'est la 1-forme dite de Liouville. Si (x_1, \ldots, x_n) sont des coordonnées locales pour X, et (ξ_1, \ldots, ξ_n) les coordonnées associées dans les fibres du cotangent (coordonnées qualifiées de « canoniques »), alors $\omega = \sum_i d\xi_i \wedge dx_i$ et

$$\alpha := \sum_i \xi_i dx_i.$$

Remarque 1.0.2 Au lieu de se restreindre aux espaces cotangents, on pourrait également accepter comme espaces classiques les variétés symplectiques compactes dites *préquantifiables*, que l'on quantifierait par la théorie des opérateurs de Toeplitz. L'analogue du α serait alors la 1-forme de connexion du fibré en droite préquantifiant. Il est tentant de conjecturer que tous les résultats que je présenterai pour $M = T^*X$ ont leur analogue étroit en termes d'opérateurs de Toeplitz sur des variétés compactes (voir le livre de Boutet de Monvel et Guillemin [15]). La différence se fera sentir sur le calcul des termes de type "sous-principaux". Charles [23] a déjà effectué un certain nombre de travaux dans cette direction.

1.1 Opérateurs *h*-pseudo-différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels font maintenant partie du paysage usuel des équations aux dérivées partielles ou de l'analyse sur les variétés. Mais cette familiarité peut se révéler trompeuse, car il existe une multitude de classes d'opérateurs pseudo-différentiels, chacune optimisée en vue de telle ou telle situation. Ce chapitre présente une classe simple et adaptée aux besoins des chapitres suivants, tout en usant de ce prétexte pour essayer de dégager les concepts communs et fondamentaux de la théorie.

La quantification de T^*X utilisée dans ce livre est celle des opérateurs dits « \hbar -pseudo-différentiels ⁽⁴⁾ », qu'on appelle parfois opérateurs pseudodifférentiels *semi-classiques*, par opposition à la théorie dite *homogène* présentée par exemple dans les ouvrages de Hörmander [86]. En réalité toute théorie pseudo-différentielle est de nature semi-classique; la théorie homogène choisit de fixer $\hbar = 1$ et de remplacer la limite « semi-classique » $\hbar \to 0$ par la limite $\xi \to \infty$, où ξ est la variable cotangente de T^*X .

Aspect formel

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, l'algèbre déformée $\mathscr{A}\llbracket\hbar\rrbracket = C^{\infty}(T^*X)\llbracket\hbar\rrbracket$ est représentée au moyen de la quantification dite de Weyl : à toute série formelle

$$a(x,\xi;\hbar) = a_0(x,\xi) + \hbar a_1(x,\xi) + \hbar^2 a_2(x,\xi) + \cdots$$

est associé un opérateur formel $A = Op^w(a)$ défini par l'intégrale :

$$(Au)(x) = (\operatorname{Op}^{w}(a)u)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-y,\xi\rangle} a(\frac{x+y}{2},\xi;\hbar)u(y)|dyd\xi|.$$
(1.1)

Le Hamiltonien formel *a* est appelé le *symbole de Weyl* de *A*. L'opérateur *A* est appelé le *quantifié de Weyl* de *a*.

La quantification de Weyl n'est pas l'unique façon d'associer un opérateur à un symbole, loin de là. Parmi d'autres choix naturels on trouve la « quantification à gauche » ou la « quantification à droite », qui sont les cas extrêmes de la famille de quantifications obtenues en remplaçant dans (1.1) le terme $\frac{x+y}{2}$ par le barycentre tx + (1-t)y. Le choix intermédiaire de Weyl possède de nombreuses propriétés agréables ⁽⁵⁾, comme celle de transformer un symbole réel en un opérateur formellement symétrique. Ainsi, si $a(x, \xi; \hbar)$ est un polynôme alors A est l'*opérateur différentiel obtenu en remplaçant* ξ *par* $\hat{\xi} := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ *et en moyennant toutes les façons d'ordonner l'écriture obtenue*. Par exemple, en dimension 1,

$$\underline{Op^w(x\xi)} = \frac{1}{2}(x\hat{\xi} + \hat{\xi}x) = \frac{\hbar}{i}(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}).$$

^{(4).} J'ai choisi dans ce livre de noter \hbar la constante semi-classique. Pour les physiciens, \hbar est reliée à la constante de Planck *h* par $h = 2\pi\hbar$.

^{(5).} Le livre [67] est une bonne référence à ce sujet.

1.1. OPÉRATEURS H-PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

En fait cette description caractérise entièrement la quantification de Weyl.

Puisqu'un opérateur se trouve ainsi associé à chaque élément de $\mathscr{A}[\![\hbar]\!]$, on récupère immédiatement un produit associatif sur $\mathscr{A}[\![\hbar]\!]$ en rapatriant le produit de composition des opérateurs. Ce produit noté \star vérifie les axiomes de produit-étoile sur $\mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$, et s'exprime par la formule dite de Moyal [159, 116]

$$a \star b = a \exp\left(\frac{\hbar}{2i}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi}x\right)\right)b,$$

où la flèche indique sur quelle fonction, *a* ou *b*, la dérivation doit opérer. L'exponentielle est vue ici comme série formelle : $\exp(\hbar c) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hbar^k c^k / k!$. Pour davantage de détails sur ces aspects le lecteur est invité à consulter l'article de Weinstein [158] ou les premiers chapitres du livre de Fedosov [66].

Aspect concret

La réalisation concrète de la quantification de Weyl permet de fournir de vrais opérateurs agissant sur $L^2(X)$, pour des symboles qui ne sont plus nécessairement polynomiaux. Elle repose sur une analyse fine des classes de symboles autorisés, qui doivent être stables par composition tout en respectant la graduation en \hbar .

Une fonction sur \mathbb{R}^d , dépendant de façon quelconque d'un paramètre réel \hbar , sera un *symbole* d'ordre zéro si lui-même et toutes ses dérivées sont bornées sur \mathbb{R}^{2n} , uniformément par rapport à \hbar . L'espace des symboles d'ordre zéro est noté $S^0(\mathbb{R}^d)$; on pose $S^k(\mathbb{R}^d) = \hbar^k S^0(\mathbb{R}^d)$ de sorte que $S^{k+1} \subset S^k$. On notera $S^{\bullet} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S^k$ et $S^{\infty} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} S^k$. S^{\bullet} est appelée une *classe* de symboles. On notera $\mathbb{C}_{\hbar} = S^{\bullet}(\{0\})$ l'anneau des symboles constants.

Un symbole $a(\hbar) \in S^k$ est dit *classique* lorsqu'il admet un développement asymptotique de la forme $\hbar^k a_0 + \hbar^{k+1} a_1 + \hbar^{k+2} a_2 + \cdots$, où $a_j \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$. Précisément, ceci veut dire que, pour tout $k' \ge 0$,

$$\left(a(\hbar) - \sum_{j=0}^{k'-1} a_j \hbar^{j+k}\right) \in S^{k+k'}.$$

Une fonction $a(x,\xi;\hbar)$ est dite un symbole *local* près d'un point *m* s'il existe une fonction $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(m) = 1$ et $\chi a \in S^k(\mathbb{R}^d)$.

Un opérateur linéaire continu N sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ dépendant de \hbar sera dit *négligeable* si sa norme $L^2(\mathbb{R}^n)$ est d'ordre \hbar^k pour tout k. On notera $N \in O(\hbar^\infty)$. Un opérateur P sur sur \mathbb{R}^n sera dit \hbar -pseudo-différentiel s'il s'écrit P = A + N, où N est négligeable et A est de la forme $A = Op^w(a)$ pour un $a \in S^k(\mathbb{R}^{2n})$. La formule (1.1) expriment la quantification de Weyl prend alors un sens pour u dans la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, mais on sait montrer⁽⁶⁾

^{(6).} C'est le théorème de Calderon-Vaillancourt; voir également la fin de cette section.

que pour $a \in S^{\bullet}$ elle s'étend pour définir un opérateur continu sur $L^{2}(\mathbb{R}^{n})$. L'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels à symbole dans $S^{k}(T^{*}\mathbb{R}^{n})$ sera noté $\hat{S}^{k}(\mathbb{R}^{n})$.

Exemple 1.1.1 Si, dans l'intégrale de (1.1), on choisit un symbole *a* ne dépendant que de ξ : soit $a(x, \xi; \hbar) = \psi(\xi)$, on obtient :

$$(Au)(x) = \mathcal{F}_{\hbar}^{-1}(\psi(\xi)(\mathcal{F}_{\hbar}u)(\xi)),$$

où \mathcal{F}_{\hbar} est la « transformation de Fourier semi-classique » définie par

$$(\mathcal{F}_{\hbar}u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{\hbar} \langle x,\xi \rangle} u(x) dx,$$

et dont l'inverse est

$$(\mathcal{F}_{\hbar}^{-1}v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\hbar} \langle x,\xi \rangle} v(\xi) d\xi.$$

Le nombre $(\mathcal{F}_{\hbar}u)(\xi)$ s'interprète comme le coefficient de la composante de *u* qui oscille à la fréquence $\xi/2\pi\hbar$. Autrement dit l'opérateur *A* réalise un *filtrage fréquentiel* en multipliant $(\mathcal{F}_{\hbar}u)$ par le filtre ψ et en reconstruisant le signal par la transformation de Fourier inverse. En termes de mécanique quantique on dira plutôt qu'il *localise en impulsion*.

Exemple 1.1.2 En prenant $\psi = 1$ dans l'exemple précédent on constate que l'identité est bien un opérateur pseudo-différentiel.

Exemple 1.1.3 Si maintenant $a(x,\xi;\hbar) = \chi(x)$, où χ est à support compact, on peut écrire

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^n} (\mathcal{F}_{\hbar}^{-1} 1)(x-y) \right) \chi(\frac{x+y}{2}) u(y) dy.$$

Mais $\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}(\mathcal{F}_{\hbar}^{-1}1)$ est la masse de Dirac en l'origine. On obtient donc

$$(Au)(x) = \chi(x)u(x) :$$

on a simplement écrit comme opérateur à noyau intégral l'opérateur de multiplication par χ . En d'autres termes l'opérateur *A localise en position*.

Il est remarquable de pouvoir fabriquer à partir d'un moule commun des opérateurs sachant localiser en position et en impulsion. C'est la base de l'analyse dite *microlocale* (voir plus loin).

On n'a pour le moment défini des opérateurs pseudo-différentiels que sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Mais si U et U' sont des ouverts relativement compacts de \mathbb{R}^n et $g : U \to U'$ un difféomorphisme, on peut transformer tout opérateur P par la formule

$$P' := (g^*)^{-1} \circ P \circ g^*.$$

1.1. OPÉRATEURS H-PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

On a noté g^* la composition $u \to u \circ g$. Une grande force de la théorie est que si P est un opérateur pseudo-différentiel, P' l'est également. En outre, dans le cas d'un symbole classique, le symbole principal de P' s'obtient à partir du symbole principal a_0 de P par la *transformation canonique associée* à g^{-1} :

$$a_0'(x,\xi) = a_0(g^{-1}(x), {}^t d_x g(\xi)).$$
(1.2)

C'est un cas particulier du théorème d'Egorov (voir plus loin, en particulier l'exemple 1.3.4).

Soit maintenant *X* une variété différentielle compacte munie d'une densité |dx|; on pourra donc dire qu'un opérateur *P* sur $L^2(X)$ est \hbar -pseudodifférentiel s'il existe une carte locale en tout point dans laquelle il est un \hbar -pseudo-différentiel pour un symbole local *a*. Les notions d'opérateurs négligeables et même de symbole classique sont invariantes par changement de carte ; dans le cas d'un symbole classique la formule (1.2) montre que le symbole principal a_0 est bien défini comme *fonction sur l'espace symplectique* $M = T^*X$. On le notera $\sigma(P)$ ou, plus couramment, par la lettre minuscule correspondante : $p = \sigma(P)$. Enfin, si l'on fait agir les pseudo-différentiels sur l'espace de Hilbert « intrinsèque » $\Omega^{\frac{1}{2}}(X)$ des demi-densités⁽⁷⁾, le *symbole sous-principal* est également bien défini comme étant le terme a_1 dans (1.1).

Calcul symbolique — Aussi bien sur \mathbb{R}^n que sur une variété compacte *X*, l'espace des opérateurs pseudo-différentiels est une algèbre graduée. Le fait que le produit de deux opérateurs pseudo-différentiels soit encore un opérateur pseudo-différentiel découle par exemple d'une méthode de phase stationnaire (une autre approche est expliquée dans le livre [46]). On montre les faits fondamentaux suivants :

 Le produit d'opérateurs d'ordre zéro est encore d'ordre zéro et son symbole principal est le produit des symboles principaux :

$$\sigma(P_1P_2) = \sigma(P_1)\sigma(P_2).$$

- Le crochet de commutation d'opérateurs d'ordre zéro est d'ordre 1 et son symbole principal est $\frac{1}{i}$ fois le *crochet de Poisson* des symboles principaux.

$$\sigma(\frac{i}{\hbar}[P_1,P_2]) = \{\sigma(P_1),\sigma(P_2)\}.$$

Ces propriétés (qui dans le cas \mathbb{R}^n se déduisent directement de la formule de Moyal) constituent ce qu'on appelle le "calcul symbolique"⁽⁸⁾ des opérateurs pseudo-différentiels. Elles sont encore cohérentes avec les axiomes

^{(7).} Un produit de deux demi-densités est par définition une densité, donc peut s'intégrer sur *X*. Voir le livre [53].

^{(8).} Cette expression est très maladroite, au moins en français; le "calcul des symboles" aurait déjà été plus clair. Malheureusement, la terminologie est consacrée depuis longtemps...

de la quantification par déformation. D'ailleurs, il est toujours possible de construire un produit \star *complet* à partir du produit associatif des opérateurs pseudo-différentiels : cela revient à définir le « symbole total » d'un opérateur [160]. Malheureusement ces symboles sont très peu utilisés, peut-être parce qu'ils ne sont pas définis de façon unique au-delà du sous-principal, dès que *X* n'est pas \mathbb{R}^n . Le lecteur intéressé par cette question pourra consulter le chapitre II du livre en ligne d'Epstein, Melrose et Mendoza [63].

La lutte des classes — L'opérateur de Schrödinger $P(\hbar) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$, à la base de (presque) toutes les questions qui motivent l'analyse semi-classique linéaire, n'entre pas dans notre classe de symboles puisque ni ξ ni — en général — V(x) ne sont bornés sur T^*X . En fait, il est bien connu que lorsque le potentiel V est confinant (ou même localement confinant) on peut pour un grand nombre de problèmes se ramener, au moyen d'une théorie pseudo-différentielle plus générale, à l'étude d'une troncature adéquate de $P(\hbar)$ qui, elle, entrera dans notre classe (voir par exemple [81]). Il faut donc voir les résultats présentés dans ce livre comme intervenant à ce moment-là de l'analyse.

La classe de symboles que nous avons introduite est probablement la plus simple qu'on puisse raisonnablement espérer et est adaptée à l'exposé des techniques essentielles de cet ouvrage. Mais je ne veux pas faire croire non plus que les classes plus évoluées n'en sont qu'un raffinement technique; le choix d'une classe dépend vraiment de la question qu'on veut traiter. En outre, pour un problème donné il est parfois utile de savoir jongler avec les différentes définitions (l'article [106] en est un bon exemple; dans une moindre mesure, nous serons amenés à le faire également).

Quelles sont les autres classes possibles? Pour simplifier, je mentionnerai juste qu'il en existe trois principaux types. La première est une classe *locale* comme celle qu'on a décrite plus haut, et qui s'appliquera à des problèmes locaux, convergents en classe C^{∞} ou analytique. La seconde classe, dite *semi-excitée*, est adaptée à des questions formelles, où l'on considère les séries de Taylor des symboles, sans se préoccuper de leurs propriétés de convergence ; une application typique concerne les formes normales de Birkhoff aux fonds de puits [128, 24]. Il existe enfin des classes dites *globales* qui s'intéressent au comportement à l'infini des symboles, et qui sont directement héritées des classes de Kohn-Nirenberg [91] et surtout Hörmander [85] avec de nombreuses variantes (voir par exemple [11],[127],[121], [79]). Une version simple, qu'on utilisera à plusieurs reprises, en est la suivante.

Si $X = \mathbb{R}^n$ et $N \in \mathbb{Z}$, on note $S^k(X, \langle z \rangle^N)$ ou simplement $S^k(\langle z \rangle^N)$ l'ensemble des fonctions $a(z;\hbar)$ qui sont C^{∞} en $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et telles que

pour tout
$$\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$$
, $|\partial_z^{\alpha} a(z)| \leq C_{\alpha} \hbar^k \langle z \rangle^N$. (1.3)

J'ai utilisé ici la notation standard $\langle z \rangle = (1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}$. Ainsi pour N = 0 on

note $\langle z \rangle^N \equiv 1$ et on a $S^k(X) = S^k(X, 1)$.

Si *X* est une variété compacte, on ne s'intéresse bien sûr qu'au comportement en la variable cotangente ξ , et ∂_{ξ}^{α} est remplacé par des dérivations selon des champs de vecteurs arbitraires.

Le grand avantage de la classe $S(\langle z \rangle^N)$ est qu'elle autorise des symboles à comportement polynomial en ξ et permet donc de traiter directement des opérateurs différentiels. J'énoncerai dans les paragraphes suivants des lemmes, utilisant ces classes, qui nous seront très utiles plus tard.

Pour davantage de détails sur les différentes classes d'opérateurs pseudodifférentiels, on pourra consulter par exemple [121, 46, 32].

Questions de normes — Il est remarquable que les opérateurs pseudo-différentiels dans $S^k(X, 1)$ sont *continus en norme* L^2 ; c'est l'objet du théorème de Calderon-Vaillancourt (pour une preuve, voir [121, théorème II-36] ou [46, theorem 7.11]). La norme L^2 sera bien adaptée à nos problématiques et c'est celle qui sera utilisée par défaut; cependant, ici ou là on aura besoin d'estimations de type C^k . Heureusement, si on accepte de « microlocaliser » (voir ci-dessous), de telles estimations sont automatiques, grâce aux injections de Sobolev. En effet, si une fonction u_{\hbar} vérifie $||u_{\hbar}||_{L^2} \leq Ch^N$ et $P(\hbar)$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est à support compact alors le calcul symbolique assure que le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}P(\hbar)$ est encore à support compact et donc dans S(1); par Calderon-Vaillancourt, $\left\|\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}P(\hbar)u_{\hbar}\right\|_{L^2} \leq C'h^N$, donc $\|P(\hbar)u_{\hbar}\|_{H^1} \leq C''h^{N-1}$. En répétant l'argument on voit que pour tout s, $||P(\hbar)u_{\hbar}||_{H^s} \leq C_s h^{N-s}$; les injections de Sobolev donnent donc pour tout r > n/2 et sur tout compact, $||P(\hbar)u_{\hbar}||_{C^{k}} \leq C_{k}h^{N-r-k}$. En particulier si $||u_{\hbar}||_{L^{2}} = O(h^{\infty})$, alors pour tout k, $\|P(\hbar)u_{\hbar}\|_{C^{k}}=O(h^{\infty}).$

1.2 Microlocalisation et front d'onde

Toute théorie pseudo-différentielle va de pair avec une notion de *microlocalisation*, c'est-à-dire de localisation dans l'« espace des phases » $M = T^*X$. On a vu comment les opérateurs pseudo-différentiels permettent de localiser en position ou en impulsion (exemples 1.1.1 et 1.1.3). En fait, on peut localiser arbitrairement dans l'espace des positions et impulsions. Mais dans ce cas, conformément au principe d'incertitude, le prix à payer est d'accepter de laisser \hbar devenir très petit. En effet on voit par intégration par parties que l'asymptotique de (Au)(x) est dominée par la valeur de l'intégrant sur la diagonale x = y. Donc modulo une erreur d'ordre $O(\hbar)$, l'opérateur Alocalise simplement sur le support du symbole principal $a_0(x, \xi)$.

Techniquement, il n'est pas aisé de comparer les différentes microlocalisations associées aux différentes classes de symboles; mais dans tous les cas où les objets classiques vivent dans des portions compactes de *M*, ces subtilités disparaissent pour laisser place à une notion simple qui est certainement fondamentale pour se forger une bonne intuition de la mécanique quantique.

La classe d'objets physiques (*fonctions d'onde*) que l'on pourra mesurer est définie par les observables à « microsupport » compact : une famille, indexée par \hbar , de distributions sur X à valeurs complexes (ou demi-densités distributions) u_{\hbar} sera admissible si, pour tout opérateur pseudo-différentiel $P(\hbar)$ dont le symbole de Weyl dans une carte locale est à support compact,

$$\exists N \in \mathbb{Z}, \qquad \|P(\hbar)u_{\hbar}\| = \mathcal{O}(\hbar^{N}).$$

Par le théorème de Calderon-Vaillancourt, les fonctions dans $L^2(X)$ indépendantes de \hbar sont admissibles.

Un opérateur pseudo-différentiel $P(\hbar) \in \hat{S}^0(X)$ est dit *elliptique* en $m \in M$ lorsque son symbole principal p ne s'annule pas en m. Une fonction d'onde u_{\hbar} sera dite *négligeable* ou $O(\hbar^{\infty})$ en un point $m \in M$ s'il existe un opérateur pseudo-différentiel $P(\hbar)$ elliptique en m tel que

$$\|P(\hbar)u_{\hbar}\| = O(\hbar^{\infty}). \tag{1.4}$$

Le complémentaire des points où u_{\hbar} est négligeable est appelé le *microsup*port ou front d'onde de u_{\hbar} , et noté $WF(u_{\hbar})$ (pour "wave front"). On trouve aussi la terminologie *ensemble de fréquences* ("frequency set"). Si l'on voit l'espace des phases T^*X comme un ensemble « temps-fréquence », le fait que $(x,\xi) \in WF(u_{\hbar})$ signifie que le signal u_{\hbar} admet une portion infinitésimale au temps x qui oscille à la fréquence $\xi/2\pi\hbar$. En mécanique, T^*X s'interprète plutôt comme un ensemble « position-impulsion ». Dans ce cas, la fonction d'onde u_{\hbar} admet en position x une portion infinitésimale qui est soumise à l'impulsion ξ .

Dès lors qu'on a défini le front d'onde, on peut parler d'égalité microlocale.

Définition 1.2.1 Soient u_{\hbar} et v_{\hbar} deux fonctions d'onde admissibles. On dit que u_{\hbar} est microlocalement égale à v_{\hbar} sur l'ouvert $\Omega \subset T^*X$ si

$$WF(u_{\hbar}-v_{\hbar})\cap\Omega=\emptyset.$$

On déduit de la définition du front d'onde que si $P(\hbar)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal p et u_{\hbar} une fonction d'onde vérifiant $P(\hbar)u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$, alors

$$WF(u_{\hbar}) \subset p^{-1}(0). \tag{1.5}$$

Une autre conséquence immédiate de cette définition et du calcul symbolique est que les opérateurs pseudo-différentiels sont *microlocaux* au sens où pour tout opérateur pseudo-différentiel $Q(\hbar)$,

$$WF(Q(\hbar)u_{\hbar}) \subset WF(u_{\hbar}).$$

1.2. MICROLOCALISATION ET FRONT D'ONDE

On peut également introduire une notion d'égalité microlocale pour les opérateurs pseudo-différentiels eux-mêmes. En mimant la définition du front d'onde, on dira qu'un opérateur pseudo-différentiel $Q(\hbar)$ est négligeable en un point $m \in T^*M$ si, pour un opérateur pseudo-différentiel $P(\hbar)$ elliptique en m,

$$\|P(\hbar)Q(\hbar)\| = O(\hbar^{\infty})$$

On dira donc que deux opérateurs pseudo-différentiels $Q_1(\hbar)$ et $Q_2(\hbar)$ sont **microlocalement égaux** en *m* lorsque $Q_2(\hbar) - Q_1(\hbar)$ est negligeable en *m*.

On verra plus loin (lemme 1.2.5) que si $||P(\hbar)u_{\hbar}|| = O(\hbar^{\infty})$ pour un certain $P(\hbar)$ elliptique en (x_0, ξ_0) , alors c'est encore le cas pour n'importe quel opérateur elliptique en ce même point, pourvu que son symbole soit à support assez petit. La conséquence est qu'on est assez libre de fixer l'opérateur « test » $P(\hbar)$. Ceci assure la cohérence des différentes notions d'égalité microlocale : si u_{\hbar} et v_{\hbar} sont microlocalement égaux en m, et de même pour $Q_1(\hbar)$ et $Q_2(\hbar)$, alors $Q_1(\hbar)u_{\hbar}$ et $Q_2(\hbar)v_{\hbar}$ sont encore microlocalement égaux en m. Il suffit d'écrire

$$P(Q_1u_{\hbar}-Q_2v_{\hbar})=P(Q_1-Q_2)u_{\hbar}+PQ_2(u_{\hbar}-v_{\hbar}).$$

Une façon pratique de déterminer le front d'onde dans \mathbb{R}^{2n} consiste à choisir l'opérateur test *P* avec un symbole de la forme $\chi(x)\psi(\xi)$, où χ et ψ sont des troncatures. Au niveau du symbole principal, cela revient à calculer

$$\mathcal{F}_{\hbar}^{-1}\left(\psi(\xi)(\mathcal{F}_{\hbar}(\chi u_{\hbar}))(\xi)\right). \tag{1.6}$$

Puisque $(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_{\hbar}$ est unitaire on voit que le front d'onde est déterminé par le comportement asymptotique de la fonction $\xi \mapsto |\mathcal{F}_{\hbar}(\chi u_{\hbar})|(\xi)$. Si $\chi = \chi_{x_0}$ localise en $x = x_0$, on obtient ainsi une fonction de deux variables (x_0, ξ) dont le graphe s'appelle le *spectrogramme* de u_{\hbar} . Il permet de représenter u_{\hbar} dans l'espace des phases.

Exemple 1.2.2 Les fonctions oscillantes de type « BKW » ⁽⁹⁾ constituent une classe importante de fonctions d'ondes qui apparaissent naturellement lorsqu'on cherche à résoudre de façon approchée l'équation de Schrödinger :

 $\left(-\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x)\right)u_{\hbar}(x) = 0$ (voir par exemple le cours de Voros [144]). Elles s'écrivent sous la forme suivante :

$$u_{\hbar}=a(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)},$$

où *a* et *S* sont des fonctions réelles (qu'on peut déformer en leur rajoutant des termes $\mathcal{O}(\hbar)$, pas nécessairement réels). Pour déterminer leur front d'onde il suffit (quitte à remplacer *a* par χa) d'étudier le comportement lorsque \hbar tend vers zéro de l'intégrale

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^n}a(x)e^{\frac{i}{\hbar}(-\langle x,\xi\rangle+S(x))}dx.$$

^{(9).} Pour Brillouin, Kramers et Wentzel, 1926.

La technique habituelle pour traiter ces « intégrales oscillantes » est celle de la *phase stationnaire*. La partie facile de la méthode, appelée aussi *phase non stationnaire*, consiste à remarquer que lorsque la dérivée de la phase ne s'annule pas on peut intégrer par partie à volonté pour faire sortir des puissances arbitraires de \hbar . Le terme dominant provient donc seulement du lieu où la dérivée s'annule, c'est-à-dire $\xi = dS(x)$, et on obtient :

$$WF(u_{\hbar}) \subset \{(x, dS(x)) \in T^*X; a(x) \neq 0\}.$$
 (1.7)

Cette inclusion est en fait une égalité. Pour montrer ceci on utilise la méthode de la phase stationnaire qui donne un développement asymptotique complet de l'intégrale (voir [86, volume 1, p.215]). Il y a cependant une subtilité : la méthode requiert la non nullité du déterminant hessien de la phase, car ce dernier apparaît au dénominateur du développement asymptotique obtenu. Pourtant, dans notre cas la condition $|S''(x_0)| \neq 0$ n'a pas lieu d'être. En réalité pour une fonction BKW il est plus naturel de regarder la double intégrale donnée par (1.6) : on obtient une intégrale oscillante dont la phase $\varphi(x; y, \xi) = \langle x - y, \xi \rangle + S(y)$ possède un Hessien (dans les variables (y, ξ)) qui est toujours non dégénéré.

La formule (1.7) est illustrée en figure 1.1.

★

Remarque 1.2.3 Dans la définition du front d'onde, seul importe le symbole principal de l'opérateur test *P*. Il en résulte que ce front d'onde est, d'une certaine façon, déterminé à une résolution de l'ordre de \hbar . On peut préciser cette idée en montrant que le front d'onde peut être calculé au moyen de symboles qui n'admettent pas nécessairement un développement en puissances de \hbar mais qui sont minorés par une constante strictement positive dans un voisinage de taille \hbar^{γ} , $\gamma < 1$ autour du point (x_0, ξ_0) testé. Par exemple, on peut prendre la gaussienne ou état cohérent $\chi_{x_0} = (\hbar \pi)^{-n/4} e^{-(x-x_0)^2/2\hbar}$, qui localise aussi bien en position qu'en impulsion dans un domaine de taille $\sqrt{\hbar}$ (c'est l'optimum du principe d'incertitude). Le spectrogramme associé s'appelle *représentation de Husimi*⁽¹⁰⁾ de la fonction d'onde u_{\hbar} . C'est elle qu'on a utilisée pour la figure 1.1.

Le front d'onde $WF(u_{\hbar})$ est défini au moyen de la notion d'ellipticité des symboles en chaque point de T^*X ; il est en principe suffisant pour toute l'étude qui va suivre puisqu'elle concerne toujours des portions compactes de l'espace des phases. Il se trouve que cette assertion n'est pas complètement exacte... Le point d'achoppement va concerner l'étude des formes normales. Si la théorie est adaptée pour décrire la conjugaison d'un système donné avec un système dit en forme normale, elle se révèle insuffisante pour étudier la forme normale elle-même. Celle-ci, en effet, est en général un système « simple » : typiquement, un système d'opérateurs différentiels sur

^{(10).} Kodi Husimi est un physicien japonais. Comme ne l'indique pas forcément cette translittération à l'ancienne, son nom se prononce à peu près [Hou-chi-mi].



FIGURE 1.1: Représentation de Husimi de la fonction $u_{\hbar} = e^{\frac{i}{\hbar}x^4/4}$. On a superposé le front d'onde théorique qui est le graphe de la fonction $x \mapsto x^3$.

 \mathbb{R}^n , dont les symboles sont polynomiaux en ξ . L'étude du comportement du front d'onde lorsque ξ tend vers l'infini est absolument nécessaire pour caractériser les solutions de ces systèmes modèles.

Pour avoir une théorie de microlocalisation vraiment complète, on doit donc introduire la notion d'« ellipticité à l'infini » d'un symbole. Cette notion s'exprime de façon naturelle dans les classes $S(\langle z \rangle^N)$. Un symbole dans $S(\langle z \rangle^N)$ est dit « elliptique à l'infini » en un point (x_0, ξ_0) (on dit aussi « au sens de Hörmander ») lorsque $|p(x,\xi)| > C\langle \xi \rangle^N$ pour x dans un voisinage de x_0 et ξ dans un *voisinage conique* de ξ_0 avec $||\xi||$ assez grand. Ainsi, conformément à cette terminologie, une fonction d'onde u_\hbar sera dite négligeable à l'infini en (x_0, ξ_0) lorsqu'il existe un opérateur pseudo-différentiel $P(\hbar)$ dans $\hat{S}(1)$ elliptique à l'infini⁽¹¹⁾ en (x_0, ξ_0) vérifiant $(1.4) : ||P(\hbar)u_\hbar|| = O(\hbar^\infty)$. En prenant en compte ces deux type d'ellipticité on obtient comme dans [32] la définition du microsupport généralisé $\widetilde{WF}(u_\hbar)$ comme un sous-ensemble de $\overline{T^*X}$, le compactifié à l'infini (en chaque fibre) du fibré cotangent T^*X . Le fait rassurant suivant vient alors compléter notre intuition du front d'onde :

Lemme 1.2.4 Soit (u_{\hbar}) une famille admissible et U un ouvert de X. Alors, $||u_{\hbar}|| = O(\hbar^{\infty})$ sur tout compact $K \subset U$ si et seulement si la projection de son microsupport généralisé le long de $\overline{T^*X} \to X$ est disjointe de U.

Démonstration. Supposons $||u_{\hbar}|| = O(\hbar^{\infty})$ sur tout $K \subset U$. Soit (x, ξ) un point de $\overline{T^*U}$, soit $K \subset U$ un compact contenant x et soit $P(\hbar)$ un opérateur pseudo-différentiel de $\hat{S}(1)$ elliptique en (x, ξ) . Enfin, soit $\chi \in C_0^{\infty}(U)$ une fonction valant 1 sur K. Alors $P(\hbar)\chi$ est encore elliptique en (x, ξ) . Par le théorème de continuité des opérateurs pseudo-différentiels, $||P(\hbar)\chi u_{\hbar}|| \leq C ||\chi u_{\hbar}|| = O(\hbar^{\infty})$. Donc $(x, \xi) \notin \widetilde{WF}(u_{\hbar})$.

^{(11).} c'est-à-dire avec N = 0.

Montrons maintenant la réciproque. Par hypothèse, $\overline{T^*U} \subset \overline{T^*X}$ est disjoint de $\widetilde{WF}(u_{\hbar})$. Donc il existe un recouvrement ouvert fini Ω_i de $\overline{T^*U}$ et pour chaque *i* un opérateur pseudo-différentiel $P_i \in \hat{S}(1)$, elliptique sur U_i , tel que

$$||P_i u_{\hbar}|| = O(\hbar^{\infty}).$$

Soit $\alpha_i \in C_0^{\infty}(T^*X)$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement U_i , et pour chaque *i* soit $\hat{\alpha}_i$ un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal α_i . On peut toujours supposer que p_i , le symbole principal de P_i , est strictement positif sur U_i , et $\alpha_i p_i \ge 0$ globalement. Soit

$$P:=\sum_i \hat{\alpha_i} P_i,$$

de sorte que $||Pu_{\hbar}|| = O(\hbar^{\infty})$. D'autre part il existe C > 0 tel que $\sum_{i} \alpha_{i} p_{i} \ge C$ globalement sur $T^{*}U$. Donc, en utilisant le calcul symbolique, P admet un inverse modulo $O(\hbar^{\infty})$, agissant sur $L^{2}(U)$: un opérateur pseudo-différentiel borné Q tel que $||QP - I||_{L^{2}(U)} = O(\hbar^{\infty})$. Appliquant ceci à u_{\hbar} , on obtient $||u_{\hbar}||_{L^{2}(U)} = O(\hbar^{\infty})$.

Il est très commode de tester le front d'onde au moyen d'opérateurs qui localisent aux endroits voulus de l'espace des phases. C'est ce que fait le lemme suivant, énoncé dans le cas $X = \mathbb{R}^n$ pour simplifier (on utilise alors la quantification de Weyl).

Lemme 1.2.5 Soient u_{\hbar} une famille admissible et $m \in \overline{T^* \mathbb{R}^n}$. Alors, $m \notin \widetilde{WF}(u_{\hbar})$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert Ω de m dans $\overline{T^* \mathbb{R}^n}$ tel que, pour toute fonction $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ à support dans Ω ,

$$\|Op^w(\chi)u_{\hbar}\| = O(\hbar^{\infty}).$$

Démonstration. Si $m \notin \widetilde{WF}(u_{\hbar})$, il existe un opérateur pseudo-différentiel P elliptique en m tel que $||Pu_{\hbar}|| = O(\hbar^{\infty})$. Soit Ω un petit voisinage de m sur lequel P est uniformément elliptique. Grâce au calcul symbolique on peut construire un opérateur pseudo-différentiel Q tel que, au sens des symboles de Weyl sur Ω , $Q = P^{-1}$. Donc si χ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole de Weyl supporté à l'intérieur de Ω , $\chi(QP) = \chi + O(\hbar^{\infty})$, au sens des symboles de Weyl. Appliquant u_{\hbar} on obtient $||\chi u_{\hbar}|| = O(\hbar^{\infty})$.

La réciproque est immédiate au vu de la définition du front d'onde (équation (1.4)).

Corollaire 1.2.6 Un opérateur pseudo-différentiel $Q(\hbar)$ est négligeable en un point $m \in \mathbb{R}^{2n}$ si et seulement si son symbole de Weyl est $O(\hbar^{\infty})$ au voisinage de m.

Ces lemmes fournissent un moyen pratique pour montrer la construction suivante, qu'on utilisera à plusieurs reprises (proposition 3.2.12 et théorème 3.3.16). Elle montre que sous certaines hypothèses géométriques une solution microlocale peut s'étendre en une vraie solution modulo $O(\hbar^{\infty})$.



FIGURE 1.2: Construction d'une solution de $Pv_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$

Lemme 1.2.7 Soient P_1, \ldots, P_ℓ des opérateurs pseudo-différentiels sur $X = \mathbb{R}^n$ dans une classe $S(\langle z \rangle^N)$, $N \in \mathbb{Z}$, de symboles principaux p_1, \ldots, p_ℓ . Soient Ω un ouvert de T^*X et u_h une famille admissible de fonctions d'ondes solution microlocale dans Ω de

$$P_i u_\hbar = 0 \qquad \forall j = 1, \dots, \ell$$

Supposons que Ω contienne strictement un ensemble de la forme

$$\Omega_0 := \{ (x,\xi); \quad x \in U, \ f_1(x) \leq \|\xi\| \leq f_2(x) \}$$

(pour un ouvert borné U et des fonctions continues f_1 , f_2 de U dans \mathbb{R}) tel que l'ensemble

$$\{(x,\xi) \in \Omega; x \in U \text{ et } p_i(x,\xi) = 0 \forall j\}$$

soit dans l'intérieur ⁽¹²⁾ de Ω_0 (voir la figure 1.2). Alors il existe une famille admissible v_{\hbar} , microlocalement égale à u_{\hbar} sur Ω_0 et telle que

$$\|Pv_{\hbar}\|_{L^{2}(U)} = O(\hbar^{\infty}).$$

Démonstration. On travaille sur T^*U (et on remplace Ω par $\Omega \cap T^*U$). Soit $\chi \in C^{\infty}(T^*U)$ valant 1 sur Ω_0 et 0 en dehors de Ω . On pose alors $v_{\hbar} := \hat{\chi}^2 u_{\hbar}$, avec $\hat{\chi} := Op^w(\chi)$.

Montrons que v_{\hbar} est un bon candidat.

1. v_{\hbar} est microlocalement égale à u_{\hbar} sur Ω_0 . Il suffit pour le voir d'appliquer le lemme 1.2.5 à $(1 - \hat{\chi}^2)u_{\hbar}$.

2. Puisque $POp^{w}(\chi) \in \hat{S}(1)$, le calcul symbolique implique

$$\widetilde{WF}(Pv_{\hbar}) = \widetilde{WF}(P\hat{\chi}(\hat{\chi}u_{\hbar})) \subset \widetilde{WF}(\hat{\chi}u_{\hbar}) \subset \Omega.$$

^{(12).} Attention, si f_1 s'annule, l'intérieur de Ω_0 n'est pas $\{f_1(x) < \|\xi\| < f_2(x)\}$.

3. Enfin sur le complémentaire de Ω_0 dans Ω , il existe (par continuité des f_i) une constante $c_0 > 0$ telle que $\sum_j p_j^2 > c_0$. Mais puisque $\sum_j P_j^2 u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ microlocalement sur Ω , on en déduit par ellipticité que $u_h = O(\hbar^{\infty})$ sur $\Omega \setminus \Omega_0$. Donc v_{\hbar} également.

Donc le microsupport de Pv_{\hbar} n'est ni dans Ω_0 (point 1.), ni en dehors de Ω (point 2.), ni entre les deux (point 3.). Sa projection sur U est donc vide, et le résultat découle du lemme 1.2.4.

La notion de microlocalisation est importante, car elle permet de voir les fonctions d'onde comme les sections d'un faisceau au-dessus de $\overline{T^*X}^{(13)}$, celui des distributions admissibles modulo celles qui sont négligeables (autrement dit le pré-faisceau associé est celui qui à tout ouvert Ω de $\overline{T^*X}$ associe l'espace des distributions admissibles modulo l'égalité microlocale sur Ω). Le support d'une section est par définition son microsupport. C'est un faisceau en \mathcal{D} -modules, où \mathcal{D} est l'anneau des opérateurs pseudo-différentiels modulo les opérateurs négligeables. On l'appellera le (pré-)faisceau des *microfonctions*. Un cas particulier de l'action de \mathcal{D} sur les microfonctions est simplement la multiplication par un « scalaire » $c_{\hbar} \in \mathbb{C}_{\hbar}$.

Quantification de \hbar ? — On n'a pas précisé dans quel ensemble variait \hbar . Si on veut éviter des problèmes techniques, il nous faudra admettre des ensembles assez arbitraires, variant selon les constructions, et dont la seule caractéristique importante est qu'en fin de compte ils s'accumulent en 0. On sait bien que même si les opérateurs sont définis pour \hbar variant dans un intervalle contenant l'origine, il se peut que les solutions d'une équation de la forme $Pu_{\hbar} = 0$ n'existent que pour un certain sous-ensemble discret de valeurs de ħ. Certains spécialistes considèrent ce phénomène comme primordial dans l'analyse semi-classique et ceux-là risquent d'être ennuyés par le manque de précisions à ce sujet dans la suite du texte. La raison est la suivante. Nous nous intéresserons principalement au spectre des opérateurs, ou plus généralement à l'existence de solutions d'équations de la forme $P^E u_{\hbar}^E = 0$, où P^E dépend d'un paramètre réel E. On sera alors en mesure de reporter le problème de la quantification de \hbar sur celui, qui me semble physiquement plus pertinent, de la quantification de l'« énergie » *E*.

1.3 Opérateurs *ħ*-Intégraux de Fourier

On a vu comment l'analyse semi-classique fournit une représentation concrète de la quantification des observables classiques par des opérateurs pseudo-différentiels. La théorie acquiert encore davantage de souplesse en permettant également la représentation des *transformations canoniques* au

^{(13).} Dans la suite on oubliera souvent la compactification des fibres puisqu'on n'utilisera ce formalisme de faisceaux que pour des parties compactes de T^*X .

moyen encore une fois d'opérateurs à noyau intégral appelés opérateurs \hbar -intégraux de Fourier ou simplement opérateurs intégraux de Fourier⁽¹⁴⁾. Si les opérateurs pseudo-différentiels étaient basés sur la transformation de Fourier \mathcal{F}_{\hbar} les opérateurs intégraux de Fourier, eux, admettent comme noyau intégral des fonctions oscillantes plus générales.

Intégrales oscillantes — Une classe importante de fonctions d'onde est constituée par les « intégrales oscillantes » de Duistermaat-Hörmander-Maslov, appelées aussi *distributions lagrangiennes*, qui sont une généralisation naturelle des fonctions BKW, elles-même généralisations de la notion d'ondes planes $x \mapsto e^{i\langle x,\xi \rangle/\hbar}$.

On a déterminé à la section précédente le front d'onde d'une fonction BKW du type $u_{\hbar}(x) = a(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$ (exemple 1.2.2). Donnons-en une interprétation géométrique. Une onde plane est associée à une vitesse constante ξ . L'espace { $\xi = \text{const}$ } est une *sous-variété lagrangienne* de l'espace des phases des variables (x, ξ) , c'est-à-dire une sous-variété Λ de dimension n, telle la forme symplectique $\omega = d\xi \wedge dx$, restreinte à Λ , s'annule. Une fonction BKW plus générale possède des vitesses ξ qui dépendent de x : son front d'onde est le graphe de dS, et c'est encore une variété lagrangienne. ⁽¹⁵⁾ L'idée des distributions lagrangiennes sera de considérer ces fonctions u_{\hbar} comme vivant sur leur variété lagrangienne, plutôt que sur la base X.

De façon générale, prenons le problème dans l'autre sens et partons de Λ , une sous-variété lagrangienne locale de $M = T^*X$. La restriction à Λ de la 1forme de Liouville α (telle que $d\alpha = \omega$) est donc fermée; soit *S* une primitive locale de α , c'est-à-dire une fonction définie sur Λ telle que $dS = \alpha$, les deux membres étant vus comme des 1-formes sur Λ . On appellera *symbole elliptique oscillant* sur Λ toute demi-densité sur Λ de la forme

$$\sigma(\lambda;\hbar) = e^{\frac{i}{\hbar}(c(\hbar) + S(\lambda)) + i\Phi(\lambda;\hbar)}\rho(\lambda),$$

où $c(\hbar) \in S^0(\{0\})$ et $\Phi \in S^0(\Lambda)$ sont des symboles classiques de terme principal réel, et ρ est une demi-densité strictement positive.

On voit en particulier que si Λ est une sous-variété lagrangienne quelconque de M munie d'une demi-densité ρ , il existe un symbole elliptique oscillant sur Λ , défini pour tout \hbar près de 0, si et seulement si la *classe de cohomologie* de de Rham $[\alpha] \in H^1(\Lambda, \mathbb{R})$ est nulle.⁽¹⁶⁾

^{(14).} Je me permettrai en général d'oublier le qualificatif « \hbar - », aussi bien pour les opérateurs intégraux de Fourier que pour les opérateurs pseudo-différentiels.

^{(15).} Dans T^*X un petit calcul montre que le graphe d'une 1-forme β sur X est lagrangien si et seulement si $d\beta = 0$. Ici $\beta = dS$ est bien fermée!

^{(16).} On verra plus tard qu'on peut affaiblir cette hypothèse en demandant par exemple $[\alpha] \in H^1(\Lambda, 2\pi\hbar\mathbb{Z})$, ce qui suppose soit qu'on se restreigne à un sous-ensemble discret de valeurs de \hbar adéquates, soit qu'on autorise la lagrangienne Λ à se « déplacer légèrement autour de sa position initiale » en fonction de \hbar . Voir le chapitre 4, page 94.

32

Comment associer à ces symboles dits « lagrangiens » une distribution admissible sur X sur laquelle on pourrait faire agir des opérateurs pseudodifférentiels? Lorsque Λ est projetable sur X, un symbole oscillant donne lieu naturellement à une fonction oscillante sur X. C'est le cas bien sûr des fonctions BKW du type $u_{\hbar} = a(x)e^{iS(x)/\hbar}$, ou plutôt $a(x)e^{iS(x)/\hbar} |dx|^{\frac{1}{2}}$. Dans le cas général apparaissent des *caustiques*, qui sont les points de Λ où la projection sur X n'est pas un difféomorphisme local. Néanmoins à un symbole oscillant quelconque, on sait associer une intégrale oscillante par la méthode de Maslov-Hörmander-Duistermaat [102],[86], [51], [53]⁽¹⁷⁾. Si Λ est compact on obtient des familles admissibles dont le front d'onde est précisément Λ . ⁽¹⁸⁾ En outre, la classe des intégrales oscillantes est invariante par opérateurs pseudo-différentiels. L'idée à la base de cette construction, due probablement à Maslov, est d'utiliser la transformation de Fourier pour se ramener au cas « projetable ». Ainsi en dimension 1, lorsque Λ ne se projette plus sur l'espace des variables *x*, elle se projette localement sur l'espace des variables ξ : il existe une fonction $T(\xi)$ telle que $\Lambda = (-T'(\xi), \xi)$. On introduit alors la fonction BKW correspondante $v_{\hbar}(\xi) = b(\xi)e^{\frac{i}{\hbar}T(\xi)}$, qu'on exprime en variables x par la transformation de Fourier normalisée

$$u_{\hbar}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} (\mathcal{F}_{\hbar}^{-1} v_{\hbar})(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar} (x\xi + T(\xi))} b(\xi) d\xi$$

Aux points où $T''(\xi) \neq 0$ la phase stationnaire montre qu'on retrouve une fonction BKW de phase $S(x) = x\xi + T(\xi)$, où ξ est donné implicitement par $x = -T'(\xi)$. Et on a bien

$$S'(x) = \xi + x \frac{\partial \xi}{\partial x} + T'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi.$$

Exemple 1.3.1 La fonction d'Airy est l'intégrale semi-convergente

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\frac{\xi^3}{3} + x\xi)} d\xi$$

Par le changement de variables $\xi \mapsto \xi/\hbar^{\frac{1}{3}}$ on obtient une intégrale oscillante

$$u_{\hbar}(x) := \frac{1}{\hbar^{1/6}} \operatorname{Ai}(\frac{x}{\hbar^{2/3}}) = \frac{1}{2\pi\hbar^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{\xi^3}{3} + x\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi\hbar^{\frac{1}{2}}} \mathcal{F}_{h}^{-1}(e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\xi^3}{3}})$$

★

dont le front d'onde est la parabole $\{x = -\xi^2\}$ (voir la figure 1.3).

^{(17).} Ce dernier ouvrage est une très bonne référence sur les opérateurs intégraux de Fourier homogènes.

^{(18).} Si Λ n'est pas compact elles restent faiblement admissibles dans le sens où on les rend admisibles par l'action d'un opérateur pseudo-différentiel dont le noyau est à support compact, telle la troncature $u_{\hbar} \mapsto \mathcal{F}_{\hbar}^{-1}\psi(\xi)\mathcal{F}_{\hbar}(\chi u_{\hbar})$. On s'autorisera parfois une telle généralisation.



FIGURE 1.3: À gauche, le graphe de la fonction de Airy semiclassique pour $\hbar = 1/100$; à droite, sa représentation de Husimi et son front d'onde superposés. Cette intégrale oscillante est le modèle local associé à la singularité en x = 0 de la projection $(x = -\xi^2, \xi) \mapsto x$ (appelée *singularité pli*).

La méthode générale de Hörmander (adaptée au cadre à petit paramètre \hbar par Duistermaat) généralise l'emploi de ces transformations de Fourier partielles en intégrant une phase qui dépend d'un paramètre additionnel $\theta \in \mathbb{R}^N$ qui joue le rôle de la variable de Fourier (la dimension minimale N étant égale au corang maximal de la différentielle de la projection de Λ sur X). On obtient des intégrales du type

$$u_{\hbar}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} a(x,\theta;\hbar) e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(x,\theta;\hbar)} d\theta,$$

où *a* et φ sont des symboles classiques dont les termes principaux $a_0 := a(\cdot, \cdot; 0)$ et $\varphi_0 := \varphi(\cdot, \cdot; 0)$ sont réels. La fonction φ_0 est appelée la *phase* de l'intégrale oscillante, et la méthode de Hörmander implique que son Hessien est non dégénéré. En écrivant

$$\mathcal{F}_{\hbar}u_{\hbar} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n+N/2}} \int a(x,\theta;\hbar) e^{\frac{i}{\hbar}(-\langle x,\xi\rangle + \varphi(x,\theta;\hbar))} d\theta d\xi$$

on devine aisément que par la méthode de la phase stationnaire le front d'onde sera l'ensemble des $(x, \xi) \in T^*X$ tels qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$\xi = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x,\theta), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}(x,\theta) = 0, \quad \text{et} \quad a_0(x,\theta) \neq 0.$$
(1.8)

Opérateur intégraux de Fourier — Les intégrales oscillantes apparaissent en général dès que l'on cherche un *quasimode*, c'est-à-dire une solution approchée d'un système pseudo-différentiel $Pu_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$. Nous verrons au chapitre suivant qu'elles sont même inévitables dans le cas d'un système complètement intégrable. Pourtant, elles seront dans ce livre souvent dissimulées : l'utilisation d'*opérateurs intégraux de Fourier* permet de les transformer systématiquement en fonctions modèles qui génériquement sont des simples constantes. Bien entendu, il n'y a pas de miracle, et les opérateurs intégraux de Fourier eux-mêmes, sortes de « boîtes noires », sont construits à base d'intégrales oscillantes.

Étant donnée une transformation canonique χ entre deux variétés symplectiques $M = T^*X$ et $M' = T^*X'$, le graphe de χ est une sous-variété lagrangienne de $M \times M'$ pour la forme symplectique « $\omega - \omega'$ ». On note parfois $M \times \overline{M'}$ cette variété symplectique. De façon plus générale on appelle *relation canonique* toute sous-variété lagrangienne de $M \times \overline{M'}$.

Associé à cette relation canonique, un *opérateur intégral de Fourier* $U(\hbar)$ est un opérateur linéaire de $\Omega^{\frac{1}{2}}(X')$ dans $\Omega^{\frac{1}{2}}(X)$ admettant un noyau qui est une intégrale oscillante associée au graphe de χ .

Cette simple définition n'est pas du tout anodine. En particulier elle implique qu'un opérateur intégral de Fourier va transporter le front d'onde d'une distribution u_{\hbar} par sa transformation canonique sous-jacente. Cette propriété ainsi que le théorème d'Egorov énoncé plus bas justifient qu'on qualifie ces opérateurs intégraux de Fourier de « transformations canoniques quantifiées ».

Exemple 1.3.2 Considérons sur \mathbb{R}^{2n} la « rotation de 90° » : $\chi(x,\xi) = (-\xi, x)$. Sur $\mathbb{R}^{2n}_{\{x,\xi\}} \times \overline{\mathbb{R}^{2n}_{\{x',\xi'\}}}$, la 1-forme canonique est $\alpha - \alpha' = \xi dx - \xi' dx'$. Sa restriction au graphe de χ s'écrit donc $-x'dx - xdx' = -d(\langle x, x' \rangle)$. On en déduit que la transformation de Fourier semi-classique

$$\mathcal{F}_{\hbar}(u)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int e^{-i\langle x, x' \rangle / \hbar} u(x') dx'$$

est un opérateur intégral de Fourier associé à χ .

Exemple 1.3.3 On a écrit dans l'exemple 1.1.2 l'opérateur identité comme un opérateur pseudo-différentiel. C'est également un opérateur intégral de Fourier, associé à la transformation canonique identité. En effet par la formule $Id = \mathcal{F}_{h}^{-1}\mathcal{F}_{h}$ on voit que formellement son noyau intégral est

★

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-x',\xi\rangle}d\xi.$$

En comparant à (1.8) on reconnaît une intégrale oscillante associée à la lagrangienne (non compacte !) $\{(x, x' = x, \xi, -\xi)\} \subset T^*(X \times X')$. En faisant attention au signe, on identifie $T^*(X \times X')$ à $T^*X \times \overline{T^*X'}$ par le symplectomorphisme $(x, x', \xi, \xi') \mapsto (x, \xi, x', -\xi')$. L'image de cette lagrangienne est bien le graphe de l'identité qui, contrairement au cas de la rotation de 90°, n'est pas projetable sur $X \times X'$.

34
Exemple 1.3.4 On généralise l'exemple précédent en considérant une application $g : X \to X'$ (penser à un changement de variables). Elle induit un opérateur $g^* : u_h \mapsto u_h \circ g$, dont le noyau est l'intégrale oscillante

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{i}{\hbar}\langle g(x)-x',\xi\rangle}d\xi$$

La variété lagrangienne correspondante dans $T^*X \times \overline{T^*X'}$ est

$$\{(x,\xi) = {}^{t}dg(x)(\xi'), x' = g(x),\xi')\},\$$

où ${}^{t}dg(x)(\xi') := \xi'(dg(x))$. Lorsque *g* est un difféomorphisme elle s'écrit également $\{(x,\xi,g(x),{}^{t}dg(x)^{-1}(\xi))\}$: c'est le graphe du difféomorphisme symplectique naturel de T^*X dans T^*X' relevant *g*.

Par recollement on peut souvent construire des opérateurs intégraux de Fourier globaux même lorsque la relation canonique n'admet pas de phase globale. Mais comme on l'a vu pour les intégrales oscillantes, il existe une restriction : en général, il existera un opérateur intégral de Fourier global si et seulement si la restriction de la 1-forme canonique « $\alpha - \alpha'$ » au graphe de χ est cohomologiquement triviale. Si χ est un symplectomorphisme de M, cela veut dire qu'en plus de préserver ω il doit également préserver les intégrales de α le long de tout chemin fermé — et cette condition ne dépend que de la classe d'homologie du chemin.

Définition 1.3.5 On dira qu'un symplectomorphisme χ d'un ouvert de T^{*}X dans un ouvert de T^{*}X' est **exact** si $\chi^* \alpha' - \alpha$ est une 1-forme exacte, où α et α' sont les 1-formes canoniques de T^{*}X et T^{*}X', respectivement.

Cette condition d'exactitude sera cruciale dans l'obtention des conditions de Bohr-Sommerfeld au chapitre 4.

Il se trouve que ce point important n'est pas souvent explicite dans la littérature, en particulier celle issue des travaux de Hörmander. La raison pour laquelle cette remarque n'apparaît pas dans les travaux de Hörmander est que celui-ci considère la théorie dite *homogène*, sans petit paramètre \hbar . Or dans cette théorie, les variétés lagrangiennes considérées sont coniques, c'est-à-dire homogènes par rapport à l'action de \mathbb{R}^+ dans les fibres de T^*X . Puisque la 1-forme canonique α elle-même est homogène de degré 1 par rapport à cette action, on peut écrire, en notant Ξ le champ de vecteur de l'action infinitésimale de \mathbb{R}^+ ,

$$\alpha = \mathcal{L}_{\Xi}(\alpha) = \iota_{\Xi} d\alpha + d\iota_{\Xi} \alpha.$$

Puisque Ξ est tangent à notre variété lagrangienne Λ et $d\alpha = \omega$, on voit que le premier terme du membre de droite est nul sur Λ . Mais le deuxième l'est également par définition de α qui ignore l'espace tangent aux fibres.

Donc $\alpha_{\uparrow\Lambda} = 0$; il s'ensuit que tous les symplectomorphismes homogènes sont exacts!⁽¹⁹⁾

1.4 Théorème d'Egorov

Dans la théorie semi-classique, un des résultats les plus fondamentaux, qu'on utilisera à volonté, est que les opérateurs intégraux de Fourier se comportent bien en regard de ce qu'on attend de la « quantification » des relations canoniques. C'est le contenu de la version semi-classique suivante du « théorème d'Egorov » (nommé ainsi d'après [59]).

Théorème 1.4.1 ([59, 86]) Soit $U(\hbar)$ un opérateur intégral de Fourier (microlocal) associé au symplectomorphisme χ et $P(\hbar)$ un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal p. Alors $U(\hbar)^{-1}P(\hbar)U(\hbar)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal $p \circ \chi^{-1}$.

Comme beaucoup de résultats microlocaux, ce théorème a été d'abord étudié dans la théorie homogène. On en trouve une version semi-classique accompagnée d'une preuve complète dans le livre de Robert [121]. Voir également [32].

Même si sa preuve est un peu technique, la signification de ce théorème est claire si on pense à l'action de $U(\hbar)^{-1}P(\hbar)U(\hbar)$ sur une intégrale oscillante u_{\hbar} en terme de front d'onde. Par $U(\hbar)$, le front d'onde de u_{\hbar} est transporté selon χ^{-1} . Puis agit l'opérateur $P(\hbar)$, qui ne déplace pas le front d'onde, mais le « tronque » au moyen de son symbole principal p. Enfin par U^{-1} le front d'onde retrouve sa position initiale. Au total il ne se déplace pas, mais subit l'action d'un opérateur pseudo-différentiel de symbole $p \circ \chi^{-1}$.

On comprend l'intérêt d'un tel résultat pour l'établissement de formes normales. De même qu'un Hamiltonien classique est ramené à une forme normale par une transformation canonique, un Hamiltonien quantique sera normalisé au moyen d'une conjugaison par un opérateur intégral de Fourier.

Le terme sous-principal — Malgré la célébrité du théorème d'Egorov il est difficile de trouver des renseignements concernant la transformation du symbole sous-principal. Le symbole sous-principal n'est en général pas équivariant, mais on peut vérifier la construction suivante : en chaque point $m \in M$ soit C_m la courbe intégrale du flot de p passant par m. On définit sur C_m la 1-forme (fermée) κ_{C_m} dite « sous-principale » par $\kappa_{C_m}(\mathcal{X}_p) = -p_1$, où \mathcal{X}_p est le champ de vecteurs hamiltonien associé à p et p_1 est le symbole sous-principal de $P(\hbar)$. (Ramenée en arrière par la paramétrisation du flot, c'est la 1-forme sur $\mathbb{R} \ll p_1 dt$ ».) Alors, la conjugaison par un opérateur

^{(19).} Tous ces aspects « coniques » sont traités en détail dans le livre de Duistermaat [53].

intégral de Fourier préserve la classe de cohomologie $[\kappa_{C_m}] \in H^1(C_m, \mathbb{R})$. Évidemment, cela n'apporte une information intéressante que lorsque C_m est fermée : les intégrales du sous-principal le long des trajectoires périodiques de *p* sont invariantes par conjugaison. Dans le cas limite où *m* est un point fixe du flot, c'est bien la valeur du sous-principal en ce point qui est invariante.

Enfin comme Weinstein l'avait remarqué [155], étant donné un symplectomorphisme exact⁽²⁰⁾ χ , et sous l'hypothèse de l'annulation d'un cocycle de Maslov, il existe un opérateur intégral de Fourier associé qui laisse invariant le sous-principal de tous les $P(\hbar)$ (c'est-à-dire ne fait que le transporter par χ). En réalité on peut trouver un $U(\hbar)$ qui transforme la forme sousprincipale en un autre représentant de sa classe de cohomologie en rajoutant à κ_{C_m} la 1-forme $df_{\uparrow C_m}$ où f est une fonction fixée quelconque sur M. Savoir si tous les représentants de la classe de cohomologie sont atteints dépend a*priori* de la forme globale des trajectoires du flot. En particulier si p a un flot périodique on peut toujours conjuguer $P(\hbar)$ par un opérateur intégral de Fourier pour rendre son symbole sous-principal constant sur chaque orbite.

Mentionnons déjà que cette 1-forme sous-principale joue un rôle important dans les systèmes complètement intégrables, puisqu'elle se généralise en une 1-forme fermée sur les feuilles du feuilletage lagrangien, et apparaît dans les conditions de quantification du spectre.

Remarque 1.4.2 On appelle parfois théorème d'Egorov un cas particulier très important, celui où l'opérateur intégral de Fourier en question est un *propagateur* ⁽²¹⁾ : $U(\hbar) = \exp(-itP(\hbar)/\hbar)$, où $P(\hbar)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal *p*. L'opérateur $U(\hbar)$ est alors associé à la transformation canonique donnée par le *flot hamiltonien classique* de *p* au temps *t*. Une question délicate est de comparer les limites $t \to \infty$ et $\hbar \to 0$! Δ

Calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier— Le théorème d'Egorov se réduit à un cas particulier du calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier, que je ne pense pas nécessaire de développer ici, en particulier parce qu'il présente un certain nombre de difficultés techniques. Les résultats fondamentaux sont les suivants.

- 1. La composée de deux opérateurs intégraux de Fourier est encore un opérateur intégral de Fourier, associé à la composition des relations canoniques.
- 2. Les opérateurs pseudo-différentiels sont les opérateurs intégraux de Fourier associés à la relation identité.

^{(20).} Weinstein ne le montre que pour un symplectomorphisme homogène (et donc exact) mais le résultat est encore valable dans le sens plus faible qui a été introduit ici.

^{(21).} C'est d'ailleurs cet énoncé qui est démontré dans [121] (théorème IV-10).

3. On peut définir le *symbole principal* d'un opérateur intégral de Fourier; il est donné par les deux premiers termes de la phase du symbole oscillant du noyau, et il est indépendant de la représentation choisie pour l'intégrale oscillante.

Les points 1 et 2 donnent le théorème d'Egorov. Le troisième point, plus délicat, repose de façon essentielle sur la théorie de Hörmander et Duistermaat-Hörmander. Le symbole principal contient en réalité trois termes. Le premier, en $\frac{1}{\hbar}$, contient simplement l'information géométrique qui détermine la relation canonique. Le deuxième, en \hbar^0 , est une phase arbitraire. Le dernier, également en \hbar^0 , est un indice de Maslov. La somme de ces trois termes est bien définie, comme section d'un certain fibré en droites audessus du graphe de la relation canonique [10]. On appelle ce fibré le fibré de Keller-Maslov; il a été formalisé probablement pour la première fois par Leray [95]⁽²²⁾.

^{(22).} Mais le livre de Leray n'est pas aisé à lire, car tout y est exprimé en termes de changements de repères, sans mentionner explicitement la géométrie du fibré.

Chapitre 2

Exemples fondamentaux de systèmes intégrables

Avec toutes les merveilles du monde Qui sont là Simplement sur la terre Offertes à tout le monde Éparpillées Émerveillées elles-mêmes d'être de telles merveilles

PRÉVERT, Pater Noster (Paroles)

Il est sûrement bénéfique d'avoir des exemples simples à l'esprit lorsqu'on lit un texte mathématique. Non contents d'aider à la compréhension des différents concepts et calculs, ils se révèlent souvent être des modèles représentant, au moins dans certains aspects caractéristiques, un comportement typique. Je présente ici trois de ces exemples, qui me semblent mériter cette appréciation, sans aucune prétention à l'originalité.

2.1 L'oscillateur harmonique

Il le fut dès les débuts de la mécanique ; au vu des publications actuelles, il l'est toujours sans conteste. Tout laisse à croire qu'il le sera encore longtemps : l'oscillateur harmonique est l'exemple incontournable de la mécanique classique, et encore davantage de la mécanique quantique.

L'oscillateur classique

On parlera ici d'oscillateur harmonique simple : classiquement, c'est le système qui décrit le mouvement d'une masse ponctuelle *m* le long d'un axe, soumise à une force de rappel $\vec{F} = -kx$, où *k* est une constante et *x* est le vecteur élongation (à partir de la position au repos). L'équation de Newton $m\ddot{x} = -kx$ admet pour solution générale $x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}t} + \varphi)$, où *A* et φ

sont des constantes déterminées par les conditions initiales. L'énergie $E = \frac{1}{2}(kx^2 + mv^2)$, où $v = \dot{x}$, est conservée. L'exemple standard est le mouvement d'une masse attachée à un ressort de raideur k, si on suppose le ressort parfaitement élastique (pas de dissipation d'énergie) et si on néglige toute autre force.

On s'intéressera dans ce livre à la formulation Hamiltonienne du système. La variable conjuguée à *x* n'est pas la vitesse *v* mais la *quantité de mouvement* p = mv. L'espace des phases $\mathbb{R}^2 = \{(x, p)\}$ est muni de la forme symplectique canonique $dp \wedge dx$. La fonction Hamiltonienne *H* associée à l'équation de Newton est l'énergie $E = \frac{1}{2}(kx^2 + p^2/m)$, vue comme fonction de la position et de la quantité de mouvement. En remplaçant, dans la formule donnant *E*, *x* par $x/(km)^{1/4}$, et en introduisant $p = \xi(km)^{1/4}$, on obtient de nouvelles variables canoniques avec lesquelles

$$H(x,\xi) = E = \frac{1}{2}\omega(\xi^2 + x^2), \quad \text{avec } \omega = \sqrt{k/m}.$$

C'est cette forme-là que j'aurai en tête dans ce livre lorsque j'évoquerai l'*oscillateur harmonique*. La façon la plus commode pour le manipuler est d'introduire la variable complexe $z = (x + i\xi)/\sqrt{2}$, de sorte que $H(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\omega |z|^2$. L'équation du flot s'écrit alors simplement

$$\dot{z} = -i\omega z$$
,

qui s'intègre immédiatement en $z(t) = z(0)e^{-i\omega t}$. L'origine z = 0 est un point fixe ; l'espace des phases privé de l'origine est feuilleté par des lagrangiennes invariantes qui sont les cercles H(z) = E, E > 0.

Comme tout système hamiltonien indépendant du temps sur une variété symplectique de dimension 2, l'oscillateur harmonique est bien entendu complètement intégrable. Le Hamiltonien H tient lieu d'« application moment ». Son image est la demi-droite positive : le zéro étant l'image du point fixe, et toute valeur strictement positive étant l'image du cercle invariant correspondant.

Dans l'espace symplectique \mathbb{R}^{2n} , je continuerai d'appeler oscillateur harmonique⁽¹⁾ tout Hamiltonien de la forme

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \omega_j (\xi_j^2 + x_j^2).$$

C'est le modèle d'un équilibre stable. En effet, on a le résultat suivant de classification symplectique :

^{(1).} Certains ouvrages réservent le nom d'oscillateur harmonique au cas où toutes les fréquences ω_i sont égales.



FIGURE 2.1: Les cercles invariants dans l'espace des phases de l'oscillateur harmonique.

Proposition 2.1.1 Toute forme quadratique q définie positive sur \mathbb{R}^{2n} est un oscillateur harmonique : il existe des réels $\omega_j > 0$ et des coordonnées linéaires symplectiques (x, ξ) dans lesquelles

$$q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \omega_j (\xi_j^2 + x_j^2).$$

Cette proposition est connue depuis longtemps (le livre [84] cite Weierstraß). Sa preuve est simple mais pas complètement immédiate. C'est un très bon exercice pour réviser son algèbre linéaire symplectique. Par exemple, on peut procéder ainsi :

Démonstration. Notons ω la forme symplectique standard sur \mathbb{R}^{2n} . La forme quadratique q, étant définie positive, munit \mathbb{R}^{2n} d'une structure euclidienne. Si on note Ω l'endomorphisme tel que

$$\omega(x,y) = q(x,\Omega y), \tag{2.1}$$

alors Ω s'écrit, dans une base *q*-orthonormée, comme une matrice antisymétrique, inversible. Il est classique (et facile) de trouver une matrice orthogonale *P* telle que $P^{-1}\Omega P$ devient diagonale par bloc, chaque bloc étant de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$
(2.2)

pour un réel $\lambda > 0$. Pour s'en convaincre, on étend d'abord q en une forme hermitienne sur \mathbb{C}^{2n} , et on remarque que l'antisymétrie de Ω implique que toutes ses valeurs propres sont imaginaires pures. Si u est un vecteur propre associé à $i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le fait que Ω soit à coefficients réels implique que \bar{u} est vecteur propre pour la valeur propre $-i\lambda$. On peut alors définir l'espace réel $E_{\pm\lambda}$ de dimension 2 engendré par $v = u + \bar{u}$ et $w = i(u - \bar{u})$. Alors $E_{\pm\lambda}$ est stable par Ω et la matrice de la restriction de Ω est précisément de la forme (2.2). Grâce à (2.1), on voit que v et w sont q-orthogonaux. On les normalise, et on conclut par récurrence en considérant le *q*-orthogonal de $E_{\pm\lambda}$, qui est stable par Ω . Remarquez qu'on peut toujours choisir $\lambda > 0$.

D'après (2.1), la matrice de la forme symplectique ω possède une structure similaire par bloc. En posant, pour chaque bloc, $\tilde{v} = v/\sqrt{\lambda}$ et $\tilde{w} = w/\sqrt{\lambda}$, on a

$$\omega(\tilde{v},\tilde{w}) = \frac{1}{\lambda}\omega(v,w) = \frac{1}{\lambda}q(v,\Omega w) = -q(v,v) = -1.$$

On obtient donc une base canonique, qui reste orthogonale pour q, mais pas orthonormée. Précisément, la restriction de q à un bloc s'écrit, dans les coordonnées (x, ξ) associées,

$$q(x,\xi) = \frac{1}{\lambda}(x^2 + \xi^2).$$

Ça termine la preuve.

Une variante de cette preuve, qui utilise un argument variationnel, est décrite dans [84].

On peut appréhender ce résultat sous un autre angle en introduisant une notion importante : une *structure complexe J* associée au couple (q, ω) . La matrice *A* devient alors anti-hermitienne pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle = q(\cdot, \cdot) + i\omega(\cdot, J \cdot)$. Il suffit alors de la diagonaliser sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ en base unitaire. Voir à ce sujet le livre [10].

À l'instar du cas unidimensionnel⁽²⁾, un oscillateur harmonique sur \mathbb{R}^{2n} est toujours complètement intégrable. La famille des oscillateurs $q_j = \frac{\omega_j}{2}(x_j^2 + \tilde{\zeta}_i^2)$, j = 1, ..., n est commutative pour le crochet de Poisson. On peut donc choisir comme application moment

$$F = (q_1, \ldots, q_n) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n.$$

Son image est un polyèdre convexe : le cône $\{(q_1, ..., q_n); q_j \ge 0, \forall j\}$. On dira que le point fixe à l'origine est de type *complètement elliptique*. On verra que cette application moment est le modèle de tout système intégrable au voisinage d'un point fixe dont le linéarisé est de type complètement elliptique (théorème de Vey-Eliasson 3.3.7). Ce résultat fait de l'oscillateur harmonique l'outil fondamental pour les systèmes *toriques*, qui ne possèdent que des singularités de type elliptique (voir chapitre 5).

L'oscillateur quantique

On appelle oscillateur harmonique quantique le quantifié de Weyl d'un oscillateur harmonique classique. C'est simplement l'opérateur différentiel

^{(2).} C'est-à-dire dans \mathbb{R}^2 ... En physique on se réfère souvent au nombre de *degrés de liberté*, qui est la dimension de l'espace des positions *x*.

2.1. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

obtenu en remplaçant formellement ξ_j par $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Soit

$$\hat{H} = Op^{w}(H) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \omega_{j} \left(-\hbar^{2} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{j}^{2}} + x_{j}^{2} \right) \in S^{0}(\langle z \rangle^{2}).$$

L'étude spectrale de \hat{H} , comme opérateur non borné agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, essentiellement auto-adjoint à partir de $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, est bien connue. Elle ne nécessite évidemment pas l'emploi des théorèmes généraux sur les opérateurs pseudo-différentiels.

Proposition 2.1.2 L'opérateur \hat{H} a un spectre purement discret : il existe une base complète de fonctions propres $\psi_{\alpha} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, telles que

$$\hat{H}\psi_{\alpha}=E_{\alpha}\psi_{\alpha},$$

avec $E_{\alpha} = \hbar(\langle \omega, \alpha \rangle + |\omega|/2).$

On a noté $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{j=1}^n \omega_j \alpha_j$ et $|\omega| = \sum_{j=1}^n |\omega_j|$. Pour démontrer ce résultat il suffit d'étudier le cas unidimensionnel; en outre, on peut facilement se débarrasser du \hbar par le changement d'échelle spatiale $x \mapsto \sqrt{\hbar}x$. Il reste donc à examiner l'opérateur $\hat{H} = -\frac{1}{2}(\frac{d^2}{dx^2} + x^2)$ agissant sur un domaine de $L^2(\mathbb{R})$. On montre classiquement que les solutions sont les *polynômes d'Hermite*, et les valeurs propres correspondantes $E_n = n + 1/2$. N'importe quel livre de mécanique quantique (comme [93]) nous fournira les détails. Mais très peu de ces ouvrages montrent la complétude de cette base. On peut consulter pour ceci le livre [134], ou encore les notes de cours [64].

La façon la plus agréable d'obtenir formellement le même résultat est d'introduire l'analogue quantique des variables complexes z et \bar{z} , avec $z = (x + i\xi)/\sqrt{2}$. Ce sont les opérateurs de *création* et d'*annihilation*

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right)$$
 et $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)$,

qui vérifient

$$\hat{H} = a^*a + \frac{1}{2}.$$

Partant alors de l'observation que l'opérateur \hat{H} est positif et que a^* (respectivement a) envoie une fonction propre pour la valeur propre λ en une fonction propre pour la valeur propre $\lambda + 1$ (respectivement $\lambda - 1$), on conclut facilement. L'idée sous-jacente est que le spectre est obtenu sans calcul (c'est-à-dire sans passer par la représentation de Schrödinger), directement à partir des « postulats » de la quantification. C'est de cette façon que Heisenberg et Dirac avaient interprété la théorie quantique, avant Schrödinger.

Pour obtenir une preuve rigoureuse de la proposition, sans introduire les polynômes d'Hermite, on peut également invoquer l'analyse fonctionnelle des espaces de Sobolev (ou la théorie spectrale générale des opérateurs de Schrödinger) qui dit que l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ est borné inférieurement et possède une résolvante compacte. Son spectre est donc purement discret, et les manipulations des opérateurs *a* et *a*^{*} suffisent alors pour conclure.

Mais, à mon avis, ce n'est pas la méthode la plus élégante, au moins du point de vue de la mécanique quantique. Les opérateurs de création et d'annihilation sont représentés de façon optimale dans *l'espace de Bargmann*. C'est le sous-espace fermé \mathcal{H} de l'espace à poids $L^2(\mathbb{R}^2; e^{-|z|^2/2})$ formé des fonctions holomorphes sur \mathbb{R}^2 (identifié à \mathbb{C}). Par la transformation de Bargmann, qui est un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R})$ dans \mathcal{H} , l'opérateur a^* devient alors la multiplication par z tandis que a est simplement $\frac{\partial}{\partial z}$. On a donc

$$\hat{H} = z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2},$$

et chaque monôme z^n , $n \in \mathbb{N}$, est évidemment un vecteur propre pour la valeur propre $n + \frac{1}{2}$. Sa norme est $\sqrt{n!}$, et il est relativement aisé de montrer que la famille $(z^n/\sqrt{n!})$ est complète dans \mathcal{B} . Tous les détails se trouvent dans l'article original de Bargmann [9], et également dans [134].

L'importance de l'oscillateur harmonique quantique réside dans le fait qu'il réalise une bonne approximation d'un système quantique près de son niveau d'énergie le plus bas, qui correspond souvent à un équilibre stable, de type complètement elliptique. Si l'on tient compte des perturbations de cet équilibre, en utilisant la *forme normale de Birkhoff*, on obtient une approximation excellente pour des énergies relativement élevées (voir l'article [24]).

Dans ce livre, on s'intéressera plutôt à la propriété de complète intégrabilité quantique de l'oscillateur harmonique : les opérateurs unidimensionnels $\hat{q}_j = \frac{1}{2}(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2)$ commutent deux-à-deux. Il est alors naturel de définir le *spectre conjoint* des \hat{q}_j , qui servira de modèle pour l'étude des systèmes intégrables au voisinage d'un point fixe elliptique. Voir le théorème 3.3.16 et les sections 4.2 et 5.5.

2.2 Le double puits

L'oscillateur harmonique était le prototype d'un système évoluant sagement au fond d'un puits de potentiel. Corsons un peu la chose en rajoutant un deuxième puits, situé dans une même gamme d'énergie. Même à un degré de liberté, de tels systèmes deviennent beaucoup plus délicats à traiter. D'un point de vue quantique, on tombe sur le phénomène d'*effet tunnel* qui permet de franchir la *barrière de potentiel* séparant les deux puits. Évidemment, le double puits a été très étudié. Il reste étonnant de constater que tout n'a pas encore été clarifié à son sujet. En ce qui concerne le propos de ce livre, le fait essentiel est que, contrairement à l'oscillateur harmonique, les systèmes à double puits possèdent un point d'équilibre instable (le sommet de la barrière de potentiel) donnant lieu à une *dynamique hyperbolique*.

Le double puits classique

On obtient un système mécanique sur \mathbb{R} très simple, présentant un équilibre instable hyperbolique, en considérant une masse ponctuelle soumise à un potentiel présentant un double puits. Ainsi, sur $\mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}$ on définit

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}m\xi^2 + V(x),$$

où *V* est une fonction C^{∞} , confinante (par exemple $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$), possédant exactement un maximum local non dégénéré. On supposera que le maximum local est atteint en x = 0, avec V(0) = 0. En outre, quitte à modifier les unités de longueur, on pourra supposer que m = 1. L'exemple le plus simple est le double puits symétrique $V(x) = -x^2 + x^4$. Voir la figure 2.2. Un tel potentiel est le prototype d'un chemin réactionnel simple :



FIGURE 2.2: Un potentiel à double puits.

chaque puits correspond à un état stable et le maximum local est la « barrière de potentiel » correspondant à l'apport d'énergie nécessaire pour passer d'un état à l'autre.

Le point situé au sommet de cette barrière, muni d'une vitesse nulle, est un point fixe de la dynamique classique, de type hyperbolique : il existe des coordonnées symplectiques (x', ξ') dans l'espace des phases \mathbb{R}^2 telles que le hessien de H à l'origine soit la forme quadratique

$$H''(0)(x',\xi') = Cx'\xi', \qquad C > 0.$$

Pour se convaincre de cette affirmation, il suffit de remarquer que $H''(0) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \alpha x^2)$, avec $\alpha = -V''(0) > 0$, et de faire les changements $x = x''/\alpha^{1/4}$, $\xi = \alpha^{1/4}\xi''$, puis $x' = \frac{x'' + \xi''}{\sqrt{2}}$, $\xi' = \frac{\xi'' - x''}{\sqrt{2}}$.

On dit que l'origine de \mathbb{R}^2 est une *singularité hyperbolique* pour *H*. Considérons maintenant *H* comme une application moment pour le système. Son image est une demi-droite, ouverte vers $+\infty$, comprenant trois valeurs particulières (les valeurs critiques de *H*) : deux valeurs négatives pour les singularités elliptiques correspondant aux deux fonds de puits, et l'origine, correspondant au point fixe hyperbolique. L'agencement des *fibres* de *H* dans l'espace des phases est bien connu, et décrit par la figure 4.6, page 105. La fibre singulière $H^{-1}(0)$, ou *séparatrice*, a la forme d'un « huit ». Du point central partent deux trajectoires homoclines, qui sont les seules orbites non périodiques du système.

Le double puits quantique

Considérons l'opérateur différentiel sur R :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

C'est un opérateur de Schrödinger, qui est ici le quantifié de Weyl de *H*. Sa théorie spectrale, comme opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R})$, a été abondamment étudiée. On sait que, puisque *V* est confinant, \hat{H} est essentiellement auto-adjoint et à résolvante compacte (voir par exemple [43]). Toujours est-il que, même dans le cas du puits symétrique, on ne connaît pas le spectre de façon explicite ⁽³⁾. Une difficulté intrinsèque réside dans la compréhension du passage d'un spectre « simple », correspondant aux énergies supérieures à celles de la séparatrice, vers le spectre négatif pour lequel on s'attend à observer les effets de « tunnel quantique » entre les deux puits de potentiel (figure 2.3). Cette transition a été étudiée en détail, avec essentiellement le même outillage que celui présenté dans ce livre, par Colin de Verdière et Parisse [34, 35, 36]. Elle n'est pas spécifique au double puits ; au contraire, elle est universelle ⁽⁴⁾ pour les singularités de type hyperbolique. Voir le théorème 3.3.17 et la section 4.2.

2.3 Le pendule sphérique

J'ai déjà parlé du pendule dans l'introduction. Cet exemple a motivé une bonne partie de mes premiers travaux sur les systèmes intégrables. C'est

^{(3).} Consulter l'article de Voros [143] pour une foule de détails et conjectures.

^{(4).} À des invariant numériques près, dépendant de chaque exemple.



FIGURE 2.3: Le spectre du double puits symétrique. (Calcul numérique avec $\hbar = 0,01$.) On a tracé ici les valeurs propres en ordre croissant en fonction de leur indice, de façon à observer la transition entre le régime des doublets (énergies négatives) et celui du spectre simple (énergies positives).

que, malgré sa simplicité, il présente au moins deux avantages. D'une part il possède une caractéristique géométrique importante : la monodromie, qui le distingue sans conteste de tous les systèmes à un degré de liberté. D'autre part, à l'instar du double puits et contrairement à l'oscillateur harmonique, son spectre est non explicite. À ce titre, il peut jouer non seulement le rôle d'exemple type, mais aussi celui d'application non triviale des techniques développées dans ce livre. En particulier, le fait, conjecturé par Cushman et Duistermaat dans [40], que la monodromie classique se détecte facilement dans le spectre quantique, est un joli succès de la théorie.

Le pendule classique

C'est le pendule du professeur Tournesol!⁽⁵⁾ On considère le système mécanique d'une masse ponctuelle, libre de se déplacer sans frottement à la surface d'une sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, soumise à la seule force de la pesanteur (un champ gravitationnel uniforme dans \mathbb{R}^3). L'espace des phases est le cotangent $T^*S_R^2$, qui, une fois qu'on munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne

^{(5).} Au moins si la main ne tremble pas et si la ficelle reste tendue en permanence, ce qui enlève évidemment un certain charme au problème...

standard, et qu'on identifie S_R^2 à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, s'écrit :

$$T^*S_R^2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; \|u\|^2 = R^2, \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Si *m* est la masse et *g* l'intensité du champ de pesanteur, supposé dirigé vers l'axe des *z* négatifs, le Hamiltonien du système s'écrit, à une constante près donnée par le zéro de l'énergie potentielle,

$$H(u,v) = \frac{1}{2}m \|v\|^2 + gz.$$

Le difféomorphisme $(u, v) \mapsto (\alpha u, \alpha^{-1}v)$ envoie symplectiquement $T^*S^2_R$ dans $T^*S^2_{\alpha R}$; en choisissant $\alpha = (g/m)^{1/3}$ on constate que le Hamiltonien devient

$$H(\tilde{u}, \tilde{v}) = m^{1/3} g^{2/3} \left(\frac{1}{2} \| \tilde{v} \|^2 + \tilde{z} \right)$$

Ceci étant dit, on prendra pour simplifier g = m = R = 1. On remarque que le système est invariant par rotation autour de l'axe des *z*. Ceci signifie que la composante verticale du moment cinétique est une *intégrale du mouvement* :

$$I(u,v) = \langle v \wedge u, e_z \rangle.$$

On a noté e_z le vecteur vertical unitaire, de sorte que $z = \langle u, e_z \rangle$. Le système est donc complètement intégrable, avec pour application moment

$$F = (I, H) : T^* S^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Le flot engendré par *I* est la rotation uniforme autour de l'axe vertical ; il définit donc une action de S^1 qui laisse *H* invariant. On pourrait ainsi, comme le feraient la plupart des ouvrages, *réduire* le système au moyen de cette intégrale. La philosophie de ce livre est que c'est une mauvaise idée ! Ou encore, de façon plus honnête, que cette réduction ⁽⁶⁾ ne *suffit pas* à comprendre le système. L'action de S^1 étant non libre (les pôles sont évidemment des points fixes), l'espace réduit n'est pas une variété lisse. Tout choix naturel de coordonnées réduites risque de cacher les singularités. Bien entendu, l'argument est le même pour le passage standard en coordonnées polaires. Mais ici, la géométrie à côté de laquelle on risque de passer est plus subtile : elle comprend l'existence d'une *monodromie* non triviale. Ce sujet est développé aux sections 5.3 et 5.4.

Contentons-nous pour le moment de déterminer les caractéristiques de l'image de l'application moment F = (I, H). Cette étude procède de calculs élémentaires que je me permets de transcrire ici de façon assez détaillée, avec pour commencer les *singularités* du système, c'est-à-dire les points de l'espace des phases où *dF* n'est pas surjective.

^{(6).} Au moins faite de façon naïve. Une autre approche est utilisée dans [39].

Proposition 2.3.1 *Les singularités de l'application moment du pendule sphérique sont les suivantes.*

- 1. dH(u, v) = 0 si et seulement si v = 0 et u est l'un des pôles $(u = \pm e_z)$. De même,
- 2. dI(u, v) = 0 si et seulement si v = 0 et u est l'un des pôles $(u = \pm e_z)$. Enfin,
- 3. dF(u, v) est de rang 1 si et seulement si

$$z + \lambda^2 = 0, \quad v = \lambda^{-1} u \wedge e_z, \tag{2.3}$$

pour un réel $\lambda \neq 0$.

Les pôles correspondent donc à des points fixes de la dynamique conjointe de H et I, et il existe des trajectoires qui sont des cercles horizontaux situés à une latitude arbitraire de l'hémisphère sud, parcourus à vitesse angulaire constante (7).

Cette proposition est énoncée également dans l'article [52]. **Démonstration.** Il s'agit de tester la différentielle dF(u, v) sur l'espace tangent ⁽⁸⁾

$$TT^*S^2 = \left\{ \begin{array}{ll} (u,v,U,V) \in (\mathbb{R}^3)^4; & \|u\|^2 = 1, \quad \langle u,v \rangle = 0, \\ \langle u,U \rangle = 0, \quad \langle U,v \rangle + \langle u,V \rangle = 0 \end{array} \right\}.$$

On sous-entend que les différentielles sont prises au point (u, v, U, V). Ainsi

$$dH = \langle v, V \rangle + \langle U, e_z \rangle.$$

Si on restreint l'équation dH = 0 au sous-espace tangent qui satisfait à la contrainte U = 0 on voit que $\langle v, V \rangle = 0$. Le vecteur *V* étant arbitraire dans le plan orthogonal à *u*, on peut le prendre égal à *v*, ce qui implique v = 0.

Il reste $\langle U, e_z \rangle = 0$. Le vecteur U étant arbitraire dans le plan orthogonal à u, on voit que u doit être vertical : $u = \pm e_z$. Réciproquement, on vérifie que $(u = \pm e_z, v = 0)$ résout bien l'équation. Le premier point est donc démontré. Le deuxième point cède de manière analogue.

Il reste à résoudre l'équation $dI = \lambda dH$ pour $\lambda \neq 0$. Elle s'écrit

$$\langle V \wedge u + v \wedge U, e_z \rangle = \lambda(\langle v, V \rangle + \langle U, e_z \rangle).$$
(2.4)

En restreignant à $\{U = 0\}$ on obtient

$$\langle V \wedge u, e_z \rangle = \lambda \langle v, V \rangle,$$

^{(7).} Ces trajectoires particulières étaient connues de Huygens.

^{(8).} On pourrait également utiliser les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes qui définissent T^*S^2 dans \mathbb{R}^6 .

qui peut se récrire, par antisymétrie du produit mixte,

$$\langle e_z \wedge u + \lambda v, V \rangle = 0$$

Le vecteur *V* étant arbitraire dans le plan orthogonal à *u*, on en déduit que $e_z \wedge u + \lambda v$ est colinéaire à *u*. Mais, puisque $e_z \wedge u$ et *v* sont toujours orthogonaux à *u*,

$$e_z \wedge u = -\lambda v. \tag{2.5}$$

En réinjectant ceci dans l'équation (2.4), V disparaît, et on obtient ⁽⁹⁾, pour tout U orthogonal à u,

$$\langle v \wedge U - \lambda U, e_z \rangle = 0 = - \langle v \wedge e_z + \lambda e_z, U \rangle,$$

et donc $v \wedge e_z + \lambda e_z$ doit être colinéaire à u. En remplaçant v par son expression (2.5) et en développant le double produit vectoriel ⁽¹⁰⁾, on trouve que $(\langle u, e_z \rangle / \lambda + \lambda) e_z$ doit être colinéaire à u. Si u était vertical, l'équation (2.5) impliquerait v = 0, donc on aurait dF = 0 par les premiers points de la proposition, ce qui est exclu ici. Donc $\langle u, e_z \rangle / \lambda + \lambda = 0$, ce qui est l'équation voulue. On vérifie facilement la réciproque.

On verra que *l'image de l'application moment*, appelée parfois diagramme de bifurcations, joue un rôle extrêmement important dans l'étude de tout système intégrable. Cette image est maintenant facile à décrire.

Proposition 2.3.2 *L'image de* F = (I, H) *est le domaine connexe, contenant l'origine, délimité par les courbes*

$$\lambda \mapsto \left(I = \frac{1}{\lambda} - \lambda^3, H = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{3\lambda^2}{2}\right), \qquad \lambda \in [-1, 0[\cup]0, 1].$$
(2.6)

Cette courbe est l'ensemble des points critiques de rang 1 de F, sauf pour le point (0, -1) qui, avec le point (0, 1), constituent les deux images des points critiques de rang 0. (Voir la figure 2.4.)

Démonstration. Puisque *z* est une fonction minorée sur S^2 , il est clair que les ensembles de niveau H = E, pour une constante *E* quelconque, sont tous compacts. Ils sont non vides dès que $E \ge -1$. D'après la proposition précédente, les seuls points critiques de *H* sont les pôles, correspondant aux valeurs $H(\pm e_z, 0) = \pm 1$. En dehors de ces valeurs, l'hypersurface $H^{-1}(E)$ est lisse et compacte, et *I* y prend donc des valeurs bornées. Puisque les points fixes de *I* sur ces hypersurfaces sont justement donnés par l'équation $dI = \lambda dH$, ils sont d'après la proposition précédente de la forme (2.3), pour un $\lambda \neq 0$. On calcule facilement les valeurs de *H* et *I* en ces points : ce sont

^{(9).} On aurait obtenu la même équation en faisant directement V = 0 dans (2.4), mais elle n'aurait *a priori* été valable que pour les vecteurs *U* vérifiant $\langle u, U \rangle = 0$ et $\langle U, v \rangle = 0$. (10). $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$.



FIGURE 2.4: Image de l'application moment du pendule sphérique.

celles données par (2.6). Donc pour une énergie *E* fixée, il y a exactement deux λ correspondants (de signes opposés) et donc deux points critiques de *I* sur $H^{-1}(E)$. Ce sont donc le maximum et le minimum de *I*, ce qui prouve bien la proposition.

Il est clair, au moins physiquement, que le pôle sud de la sphère est un point d'équilibre stable pour la dynamique de H. En fait on peut dire plus : il est également stable pour la dynamique de I. De façon précise, on dira que ce point est de type *elliptique-elliptique* pour l'application moment (I, H) (voir la section 3.3). Donc, au voisinage de ce point fixe, le système intégrable se comporte comme un oscillateur harmonique...

À l'inverse, il est tout aussi évident que le pôle nord est un point d'équilibre *instable* pour *H* (figure 2.5). Mais il ne l'est pas pour *I*... Du point de vue de l'application moment F = (I, H), cette notion d'instabilité semble nettement moins intuitive.

Proposition 2.3.3 Il existe des coordonnées symplectiques ⁽¹¹⁾ (x, y, ξ, η) sur l'espace tangent au point $p = (e_z, 0)$ dans lesquelles les Hessiens H''(p) et I''(p) s'écrivent :

$$I''(p) = x\eta - y\xi$$

$$H''(p) = x\xi + y\eta.$$

On dira que p est une singularité de type *foyer-foyer*. Pour une combinaison linéaire générique de I et H, p est un point hyperbolique dont les trajectoires proches s'éloignent en spiralant sur la variété instable, et convergent

^{(11).} C'est-à-dire telles que la forme symplectique s'écrit $\omega = d\xi \wedge dx + d\eta \wedge dy$.



FIGURE 2.5: Trajectoires du pendule sphérique. Le système étant complètement intégrable, elles sont toutes *quasi-périodiques*. À gauche, le pendule oscille autour du pôle sud. C'est le mouvement d'une (petite) bille lâchée dans un bol. À droite, la bille est posée au sommet de la sphère, et très légèrement poussée. On observe une précession lente autour de l'axe vertical.

en spiralant de la même façon sur la variété stable. Cette singularité est responsable de la non-trivialité de la monodromie pour le pendule sphérique (cf. section 5.4).

Démonstration. Si $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ sont des coordonnées canoniques sur $T^*\mathbb{R}^3$, (x, y, ξ, η) sont de bonnes coordonnées canoniques sur l'espace tangent au pôle nord, les coordonnées restantes étant déterminées par

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad \tilde{\zeta} = \frac{-x\tilde{\zeta} - y\eta}{z}.$$

On en déduit immédiatement les formes quadratiques

$$H''(p) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 - x^2 - y^2)$$

$$I''(p) = \xi y - x\eta.$$

Dans les nouvelles coordonnées symplectiques

$$ilde{x}=rac{(\xi+x)}{\sqrt{2}},\quad ilde{\xi}=rac{(\xi-x)}{\sqrt{2}},\quad ilde{y}=rac{(\eta+y)}{\sqrt{2}},\quad ilde{\eta}=rac{(\eta-y)}{\sqrt{2}},$$

on obtient précisément la forme voulue.

Pour finir l'étude des singularités, il faudrait examiner la courbe des points critiques de rang 1. Ce sont des singularités de type *transversalement elliptique* : il existe une combinaison linéaire des fonctions I et H dont le Hessien est un oscillateur harmonique à une dimension. L'étape suivante est l'étude de F comme fibration lagrangienne singulière. Une bonne partie

 \square

de ce livre est dédiée à cette question. Il s'agit de comprendre la géométrie des fibres elles-mêmes, et leur agencement les unes par rapport aux autres. Ainsi, on décrouvrira au fil de la lecture les propriétés suivantes : si $c \in \mathbb{R}^2$ est une valeur régulière de F, la fibre correspondante $F^{-1}(c)$ est un *tore de dimension* 2 (théorème de Liouville-Arnold-Mineur) ; la fibre correspondante à un point sur la courbe des points critiques de rang 1 est un *cercle* (un tore dont l'un des cycles a uniformément dégénéré en un point) ; enfin la fibre correspondante au point foyer-foyer est un *tore pincé* (un tore dont un cycle fixé ⁽¹²⁾ dégénère en un point).

Le pendule quantique

La sphère S^2 étant munie de sa structure riemannienne standard, on considère le laplacien $-\Delta$, qui est un opérateur non borné, auto-adjoint et positif sur $L^2(S^2)$. On forme ainsi

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + z,$$

où *z* désigne ici l'opérateur de multiplication par *z*, agissant comme opérateur auto-adjoint borné de $L^2(S^2)$.

Pour chaque \hbar , \hat{H} est une perturbation bornée de $-\frac{\hbar^2}{2}\Delta$, donc la théorie spectrale est aisée : \hat{H} est semi-borné inférieurement, à résolvante compacte, et possède donc un spectre purement discret, formé de valeurs propres tendant vers l'infini.

L'opérateur de moment cinétique vertical

$$\hat{l} = rac{\hbar}{i} \left(y rac{\partial}{\partial x} - x rac{\partial}{\partial y}
ight) = rac{\hbar}{i} rac{\partial}{\partial heta}$$
 ,

où θ est l'angle polaire autour de l'axe vertical de la sphère, *commute* avec \hat{H} comme opérateur différentiel. Par ellipticité à l'infini, les espaces propres de \hat{H} (qui sont tous de dimension finie) sont formés de fonctions dans $C^{\infty}(S^2)$. L'opérateur \hat{I} étant symétrique sur $C^{\infty}(S^2)$, il agit sur les espaces propres de \hat{H} comme une matrice hermitienne. On peut donc diagonaliser simultanément \hat{H} et \hat{I} sur une base orthonormée complète de $L^2(S^2)$, et on constate en passant en coordonnées polaires que les valeurs propres de \hat{I} sont des entiers relatifs ⁽¹³⁾. Par contraste, les valeurs propres de \hat{H} sont aussi peu explicites que celles du double puits. Et en plus, leur agencement vis-à-vis des nombres quantiques magnétiques est vraiment surprenant...

L'ensemble des couples (λ_I, λ_H) tels que, pour un vecteur $\psi \in L^2(S^2)$ non nul,

$$\hat{H}\psi = \lambda_H \psi$$

 $\hat{I}\psi = \lambda_I \psi,$

^{(12).} C'est-à-dire une trajectoire périodique donnée.

^{(13).} Entiers qu'on nomme parfois nombres quantiques magnétiques [159]

est appelé le *spectre conjoint* de \hat{I} et \hat{H} (voir section 5.1). Dans la limite semiclassique $\hbar \rightarrow 0$, ce spectre conjoint s'inscrit parfaitement dans l'image de l'application moment classique (figure 2.6⁽¹⁴⁾). Un des buts majeurs de ce livre est d'approfondir cette analogie entre le spectre conjoint, de nature quantique, et cette image de *F*, qu'on appelle parfois le *spectre classique*.



FIGURE 2.6: Spectre conjoint du pendule sphérique superposé avec l'image de l'application moment. Ici $\hbar = 0, 1$. On observe une structure en réseau, qui est localement identifiable, mais globalement non triviale... Explications en section 5.3 !

^{(14).} Pour calculer le spectre de la figure 2.6 de façon numérique, on a écrit la matrice de \hat{H} dans la base des harmoniques sphériques. Ces fonctions étant des vecteurs propres pour \hat{I} , on peut se restreindre aux sous-espaces propres correspondants, ce qui donne une famille de matrices, toutes de taille toujours infinie. La propriété de confinement de l'énergie montre que les solutions microlocales d'énergie bornée sont microlocalisées dans un compact de l'espace des phases, ce qui rend pertinent le spectre obtenu par diagonalisation numérique d'une troncature de ces matrices à une taille finie. Cette technique standard est efficace numériquement, mais n'apporte aucun élément de compréhension de la structure fine ou globale du spectre. Les techniques semi-classiques que j'essaie de décrire dans ce livre sont développées en grande partie pour tenter de comprendre ces spectres conjoints... Malheureusement, sauf peut-être pour les situations où \hbar est vraiment très petit, je n'oserai pas affirmer que les formules semi-classiques qu'on obtient sont plus performantes numériquement que la méthode matricielle!

Chapitre 3 Théorie Locale

Le phénomène passe. Je cherche les lois. Il y a des hommes qui ne sont pas des types. Les types ne sont pas des hommes. Il ne faut pas se laisser dominer par l'accidentel.

Lautréamont, Poésies, II

Dans toute la théorie de systèmes dynamiques, la possibilité d'une analyse locale des solutions est évidemment cruciale, il n'y a pas lieu d'insister sur ce point. D'ailleurs je ne connais guère de branche des mathématiques qui ne profitent pas de procédés de localisation. Dans le domaine qui nous intéresse, l'analyse locale se fait en général au moyen de *formes normales* qui s'appliqueront aussi bien au système classique qu'à son homologue quantique. Avant d'énoncer ces différentes formes normales, il me semble intéressant de dire quelques mots de nature plus ou moins heuristique (et plus ou moins standard) sur la « philosophie » des formes normales.

3.1 Formes normales : un point de vue heuristique

Cette section expose des résultats de nature souvent heuristique. Néanmoins, certaines constructions sont parfaitement rigoureuses et seront réutilisées par la suite. Pour éviter toute confusion, les énoncés rigoureux seront tous repris explicitement dans une des sections suivantes.

Un point $m \in M$ étant fixé, la notation (M, m) caractérisera la catégorie des germes en m. Par exemple, $C^{\infty}(M, m)$ désignera l'algèbre des germes de fonctions C^{∞} en m.

Que veut-on? — L'idée très générale d'une forme normale est la suivante : on a un groupe de transformations *G* agissant sur un ensemble ⁽¹⁾ *X*, et on se pose deux questions. D'abord, quelles sont les orbites de *G*? En particulier

^{(1).} dans toute cette section et uniquement dans cette section, l'ensemble X n'a rien à voir avec l'espace des positions des systèmes semi-classiques, introduit page 15.

quelles sont les "plus grosses" orbites, celles dans lesquelles risque de tomber un élément "générique" de X? Enfin, et c'est souvent le plus important en pratique, quels sont les représentants les plus "simples" dans chaque orbite? Le théorème qu'on énonce alors est : « étant donné un élément $x \in X$ ayant telles propriétés, alors il est dans telle orbite; il est donc l'image par un élément de G d'un élément x_0 "simple" ».

Il faut remarquer que sous la terminologie de formes normales on englobe en réalité les problèmes de type *linéarisation* où les transformations sont du type "changement de coordonnées" avec les problèmes de *classification* où c'est l'orbite comme objet abstrait qui est mise en valeur.

Cette philosophie est mise en œuvre dans la théorie des singularités des fonctions différentiables. Par exemple, *X* est l'ensemble des germes de fonctions d'une variété (M, m) dans une autre (N, n), tandis que le groupe pertinent est $G = \text{Diff}(M, m) \times \text{Diff}(N, n)$: on s'autorise des changements de variables à la source et au but.

Le théorème de Darboux est le premier exemple de forme normale locale en géométrie symplectique. L'ensemble X est alors celui des germes de formes symplectiques sur (M, m) et G est le groupe des germes de transformations canoniques. Là, il n'y a qu'une seule orbite... (ce qui ne sera plus le cas au niveau semi-global – voir la section suivante.)

Algèbres de Lie — Le cas de la géométrie hamiltonienne (classique ou quantique) est particulièrement plaisant puisqu'il entre - au moins formellement – dans la situation où *G* est un groupe de Lie agissant par l'action adjointe sur son algèbre de Lie $X = \mathfrak{G}$. (Plus généralement, G est un sousgroupe de \tilde{G} et agit sur l'algèbre de Lie de \tilde{G} .) Dans le cas classique, on pourra prendre pour G le groupe des symplectomorphismes locaux et X est alors l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens, qui s'identifie localement à l'algèbre de Poisson des fonctions lisses (modulo les constantes). Dans le cas quantique, *G* est le groupe des opérateurs unitaires agissant par conjugaison sur les opérateurs auto-adjoints. Pour faire du semi-classique il suffit de remarquer que l'ensemble de opérateurs intégraux de Fourier est bien le "groupe de Lie" des opérateurs pseudo-différentiels. Bien entendu tout ceci reste formel dans la mesure où groupes et algèbres considérés sont de dimension infinie. Néanmoins, on sait depuis longtemps faire fonctionner la machine lorsque l'algèbre X est vue comme limite projective de sous-algèbres de dimension finie (telle l'algèbre $C^{\infty}(M, m)$ au moyen de la graduation donnée par les troncatures de la série de Taylor). Le groupe G n'est alors jamais utilisé directement, mais seulement ses approximations de dimensions finies. C'est le cas notamment de ce qu'on appelle la forme normale de Birkhoff. Une approche des formes normales dans cet esprit est donnée par exemple dans la thèse de Broer [18] ou dans le dernier chapitre de ma thèse [145]. Elle se révèle extrêmement fructueuse aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique semi-classique, comme en témoignent par exemple les travaux de Sjöstrand [128] ou de Zelditch [162, 163].

La forme normale de Birkhoff en dimension 1 — Comme apéritif à se mettre en bouche, examinons le cas d'un système hamiltonien à un seul degré de liberté, au voisinage d'un point fixe.

On considère \mathbb{R}^2 , muni de sa structure symplectique canonique. Soit $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ telle que f(0) = 0 et df(0) = 0. On suppose que la hessienne q = f''(0) est une forme quadratique non dégénérée. C'est un exercice facile de montrer qu'il existe des coordonnées linéaires *symplectiques* (x, ξ) dans lesquelles

$$q = \frac{C}{2}(x^2 + \xi^2)$$
, ou $q = Cx\xi$

avec dans les deux cas une constante $C \neq 0$.

L'action du groupe symplectique sépare donc l'ouvert des formes quadratiques non dégénérées en deux orbites : celle dite *elliptique* (dont la forme normale est $\frac{1}{2}(x^2 + \xi^2)$), et celle dite *hyperbolique* (dont la forme normale est $x\xi$).

Que peut-on espérer de plus ? Birkhoff (à la suite de Poincaré) a résolu la question de la normalisation de la *série formelle de Taylor* de *f*, notée $[\![f]\!]$, sous l'action des difféomorphismes symplectiques formels. Le résultat est très simple : il existe des coordonnées symplectiques formelles (x, ξ) et une fonction formelle $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\llbracket f \rrbracket(x,\xi) = \varphi(q(x,\xi)).$$

Si l'on n'aime pas l'adjectif « formel », l'énoncé équivalent est : pour tout entier N > 0, il existe un changement de variables symplectiques polynomial χ , et un polynôme φ , tels que

$$f \circ \chi = \varphi \circ q + \mathcal{O}(x,\xi)^N.$$

Démonstration. La preuve est simple et instructive. On commence par appliquer le résultat de classification linéaire, de sorte qu'on peut supposer que

$$f(x,\xi) = q(x,\xi) + \mathcal{O}(x,\xi)^3.$$

Ensuite, on construit χ de façon récursive. Supposons qu'on ait déjà obtenu

$$f(x,\xi) = \varphi_{N-1} \circ q(x,\xi) + r_N(x,\xi), \qquad r_N \in \mathcal{O}(x,\xi)^N.$$

On cherche alors χ comme une déformation de l'identité, de façon à préserver $\varphi_{N-1} \circ q$ modulo $\mathcal{O}(x,\xi)^N : \chi = Id + \mathcal{O}(x,\xi)^{N-1}$. L'astuce consiste à construire χ comme le flot au temps t = 1 d'un Hamiltonien polynomial $g = \mathcal{O}(x,\xi)^N$: soit $\chi = \exp(\mathcal{X}_g)$, où \mathcal{X}_g est le champ de vecteurs hamiltonien associé à *g*. Autrement dit, on déplace le problème dans *l'algèbre de Lie* du groupe symplectique (formel)⁽²⁾. On a alors⁽³⁾

$$f \circ \exp(\mathcal{X}_g) = f + \{\mathcal{X}_g, f\} + \mathcal{O}(x, \xi)^{N+1} = f + \{\mathcal{X}_g, q\} + \mathcal{O}(x, \xi)^{N+1}.$$

Si l'on arrive à résoudre l'équation :

$$r_N = \{q, \mathcal{X}_g\} + h \circ q, \tag{3.1}$$

où les polynômes inconnus sont g et h, on a gagné : $f \circ \exp(\mathcal{X}_g) = \varphi_N \circ q + \mathcal{O}(x,\xi)^{N+1}$, avec $\varphi_N = \varphi_{N-1} + h$. Supposons d'abord q hyperbolique. Alors, cette équation est très facile à résoudre, en développant tous les polynômes sur la base $x^{\alpha}\xi^{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. En effet

$$\{x\xi, x^{\alpha}\xi^{\beta}\} = (\alpha - \beta)x^{\alpha}\xi^{\beta}.$$

L'opérateur $g \mapsto \{q, g\}$ est donc diagonal dans cette base, ce qui implique que l'espace des polynômes homogènes en (x, ξ) de degré donné N se scinde en une somme directe du noyau et de l'image de cet opérateur. Décomposer r_N selon cette somme revient exactement à résoudre (3.1). En effet, si $\alpha = \beta$, le monôme $x^{\alpha}\xi^{\beta}$ est bien une fonction de q!

Le cas elliptique fonctionne de la même façon si on introduit les coordonnées complexes $z = (x + i\xi)/\sqrt{2}$ et $\bar{z} = (x - i\xi)/\sqrt{2}$. En effet $q = Cz\bar{z}$, et le même calcul s'applique, dans la base $z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}$ (ou, mieux, sa partie réelle $(z^{\alpha}\bar{z}^{\beta} + \bar{z}^{\alpha}z^{\beta})/2$).

Remarque 3.1.1 L'équation (3.1) s'appelle *équation cohomologique*. On verra qu'elle s'interprète comme la décomposition d'une forme fermée en une somme d'un *cobord* ($\{q, g\}$) et d'un représentant « normalisé » du H^1 (ici la fonction $h \circ q$).

L'histoire ne s'arrête pas là. En utilisant le procédé de resommation de Borel⁽⁴⁾, on fait mieux que la forme normale de Birkhoff : il existe un difféo-

^{(2).} Les premières approches de la forme normale de Birkhoff utilisaient plutôt la représentation d'un symplectomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 par sa fonction génératrice ([4]) : si $S(x,\xi')$ est une fonction C^{∞} , on définit l'ensemble des (x,ξ,x',ξ') tels que $x' = \frac{\partial S}{\partial\xi'}$ et $\xi = \frac{\partial S}{\partial x}$. On verifie que cet ensemble est une relation canonique, car la restriction de $\xi dx - \xi' dx'$ est égale à la forme exacte (et donc fermée) : $dS - d(x'\xi')$. Sous une hypothèse de transversalité, c'est donc le graphe d'un symplectomorphisme. Cette transversalité est vérifiée pour la fonction $S = x\xi'$ pour laquelle on obtient le graphe de l'identité. Ceci étant, il se trouve que l'application de ces fonctions génératrices pour les formes normales donne souvent lieu à des calculs plus compliqués que la méthode du flot.

^{(3).} Formellement, on a même $f \circ \exp(\mathcal{X}_g) = f + \{\mathcal{X}_g, f\} + \frac{1}{2}\{\mathcal{X}_g, \{\mathcal{X}_g, f\}\} + \cdots$, qui provient de la formule générale, dans un groupe de Lie, pour la dérivée *ad* de l'action adjointe $Ad : Ad_{\exp X} = \exp ad_X$.

^{(4).} Le procédé de Borel permet de resommer toute série formelle en une fonction C^{∞} dont la série de Taylor sera la série formelle initiale. Pour l'appliquer à χ , on remarque que cette transformation symplectique a été construite comme flot au temps 1 d'un certain Hamiltonien. il suffit donc d'appliquer la resommation de Borel à ce Hamiltonien.

morphisme symplectique C^{∞} , χ , et une fonction C^{∞} , f, tels que

$$f \circ \chi - \varphi \circ q$$

soit une fonction *plate* à l'origine de \mathbb{R}^2 . (On appelle fonction plate à l'origine une fonction dont toutes les dérivées s'y annulent.)

Ce n'est toujours pas le résultat ultime... Il se trouve qu'on peut en fait rendre toutes ces séries convergentes. Autrement dit, on peut faire en sorte que la fonction plate ci-dessus soit nulle dans un voisinage de l'origine ! Dans le cas hyperbolique, c'est ce qu'on appelle le théorème de Sternberg (voir [72]). Le cas général est résolu par le « lemme de Morse isochore » de [37]. Ce résultat est surprenant, car il ne se généralise pas tel quel aux dimensions supérieures⁽⁵⁾, alors que les deux premiers énoncés « formels » de la forme normale de Birkhoff le permettent, modulo quelques hypothèses de généricité. Mais ce résultat de normalisation C^{∞} se généralise au cas complètement intégrable (théorème d'Eliasson 3.3.7).

La "variété" de tous les systèmes intégrables — Venons-en maintenant plus précisément au problème des systèmes intégrables. Par une construction toujours formelle (mais qui peut, à l'instar de la forme normale de Birkhoff, se réaliser par approximations de dimension finie – voir par exemple une variante dans [131] – ainsi que dans un cadre purement algébrique – on trouve une construction proche dans [126, 69]) il est joli de voir comment les équations à résoudre peuvent s'interpréter en termes de cohomologie d'algèbres de Lie.

Qu'est-ce qu'un système complètement intégrable? Plusieurs notions sont possibles, selon qu'on s'intéresse à un Hamiltonien particulier, à un ensemble d'intégrales en involution, à la fibration singulière associée, au feuilletage lagrangien correspondant, ou même à une feuille particulière de ce feuilletage. Pour chacun de ces cas la question de la classification se pose différemment et les réponses sont bien entendu diverses. Modulo ces variantes, notre vision est assez proche des références [33, 131, 126, 69].

On note *G* le groupe des (germes de) difféomorphismes symplectiques de (M, m), et son algèbre de Lie & est vue comme l'algèbre de Poisson des (germes de) fonctions lisses sur *M* modulo les constantes. Comme on veut contrôler les constantes (on veut savoir si deux fonctions commutent, pas si le crochet est constant) on va travailler sur l'algèbre de Poisson un peu plus grosse des germes de fonctions lisses sur $M : X = C^{\infty}(M, m)$ (on peut remplacer C^{∞} par analytique).

On s'intéressera dans ce texte particulièrement au *feuilletage lagrangien* défini par un système complètement intégrable. Un système complètement intégrable est donné par une *sous-algèbre abélienne* de X de dimension n, c'est-à-dire un espace vectoriel **f** engendré par n fonctions en involution

^{(5).} Sauf pour le cas purement hyperbolique, par le théorème de Sternberg.

 f_1, \ldots, f_n dont les différentielles sont *presque partout indépendantes*. Le feuilletage (singulier) associé est l'ensemble des fibres { $f_i = \text{const}_i$ }; il est bien sûr indépendant du choix de la base de **f**. À quelles conditions dirons-nous que deux telles algèbres définissent le même feuilletage local? Comme on le verra bientôt (proposition 3.2.7), la réponse est facile lorsque le feuilletage est *régulier* : deux telles sous-algèbres $\mathbf{f} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ et $\mathbf{g} = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ ont le même feuilletage si et seulement s'il existe un difféomorphisme local χ de \mathbb{R}^n tel que

$$(g_1,\ldots,g_n)=\chi(f_1,\ldots,f_n).$$

Il serait tentant de reprendre la même définition pour les feuilletages singuliers, et c'est ce qui est fait en général dans le cadre algébrique [140, 69]. Malheureusement, cela empêcherait d'avoir la linéarisation symplectique locale C^{∞} des singularités comprenant, entre autres, des blocs hyperboliques (voir le théorème d'Eliasson 3.3.7). On dira donc seulement que **f** et **g** ont le même feuilletage local près d'un point *m* (et on notera **f** ~ **g**) si et seulement si les éléments de **f** sont constants le long des feuilles de **g**, ce qui dans le cas lagrangien s'écrit de façon symétrique

$$\{f_i, g_i\} = 0$$
 près de m , $\forall i, j$.

Lorsque *m* est régulier pour **f** et **g**, cette condition est équivalente à la précédente (c'est encore une conséquence de Darboux-Carathéodory). Si on note $C_{\mathbf{f}} = \{h \in C^{\infty}(M,m), \{h, \mathbf{f}\} = 0\}$ le *commutant (local) de* **f**, cette condition s'écrit $\mathbf{g} \subset C_{\mathbf{f}}$ ou de façon équivalente $\mathbf{f} \subset C_{\mathbf{g}}$. Par l'identité de Jacobi, $C_{\mathbf{f}}$ est une sous-algèbre de Lie de *X*. Le point essentiel lorsque les différentielles des f_i (ou des g_i) sont presque partout indépendantes (on dit parfois que le feuilletage associé est presque régulier) est alors que $C_{\mathbf{f}}$ est *abélienne* (proposition 3.2.5). Cela implique en particulier

$$(\mathbf{f} \sim \mathbf{g}) \iff (C_{\mathbf{f}} = C_{\mathbf{g}}).$$
 (3.2)

On peut arguer que cette définition est trop faible, car elle oublie un certain nombre d'informations sur la structure locale des générateurs de **f** ou **g**. Par exemple, le feuilletage (*a priori* régulier) des droites horizontales de $\mathbb{R}^2 = \{x, \xi\}$ peut être défini (entre autres) par les fonctions ξ ou ξ^3 . Selon la définition 3.2, on a $\xi \sim \xi^3$. Si l'on n'admet pas cela, on peut introduire une notion plus forte insistant sur la notion de générateurs : on dira que **f** et **g** sont *fortement équivalents* lorsqu'ils engendrent le même C_f (ou C_g)-module ; plus précisément, on utilisera l'équivalence associée à l'action du groupe $GL(n, C_f)$ des germes de matrices inversibles à coefficients dans C_f , définis au voisinage de *m* :

$$(\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}) \iff \exists N \in \mathrm{GL}(n, C_{\mathbf{f}}), \quad \mathbf{f} - \mathbf{f}(m) = N \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}(m)).$$
 (3.3)

(Au membre de droite, le point (\cdot) indique la multiplication matricielle — pour laquelle les coefficients sont des fonctions — de *N* avec le *n*-vecteur $(g_1 - g_1(m), \dots, g_n - g_n(m))$. On a fait l'abus de notation⁽⁶⁾ d'identifier les algèbres **f** et **g** avec une de leurs bases. Le résultat est bien sûr indépendant d'un tel choix de base.)

Une première remarque rassurante : on voit facilement que l'équivalence forte $\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$ implique l'équivalence faible $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$.

Lorsque *m* est régulier pour **f** et **g** les deux équivalences coïncident. On verra que c'est encore le cas si *m* est un point singulier *non dégénéré* au sens d'Eliasson (voir section 3.3).

Exposons maintenant la construction formelle annoncée. Si $L_0 \simeq \mathbb{R}^n$ est l'algèbre de Lie commutative de dimension *n* type, l'ensemble \mathcal{CI}_r^1 de toutes les sous-algèbres de *X* définissant un système complètement intégrable est un "ouvert dense" de l'espace des homomorphismes de Lie de L_0 dans *X*. L'espace de modules de tous les feuilletages complètement intégrables est alors par définition

$$\mathcal{FI} = \mathcal{CI}_r^1 / \sim .$$

L'équivalence utilisée ici (et dans la suite de cette discussion) est, au choix, l'équivalence faible ou l'équivalence forte. Les différences seront mentionnées en lieu utile.

Soit $C^1 = (\mathbb{R}^n)^* \otimes X = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, X)$ l'espace des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans X. Il est pratique de voir un élément $\mathbf{f} \in C^1$ comme une 1-forme constante sur \mathbb{R}^n à valeurs dans X. La considérant maintenant comme une 1-forme de connexion sur un éventuel fibré principal, il est naturel d'introduire sa courbure : si $\mathbf{f} = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$, alors

$$\kappa(\mathbf{f}) = \sum_{i < j} \{f_i, f_j\} dx_i \wedge dx_j.$$

Notons encore $C_r^1 \subset C^1$ l'"ouvert dense" des **f** telles que les différentielles des f_i sont presque partout indépendantes et soit $\tilde{\kappa}$ la restriction de κ à C_r^1 ; alors $C\mathcal{I}_r^1 = \tilde{\kappa}^{-1}(0)$. Donc

$$\mathcal{FI} = \tilde{\kappa}^{-1}(0) / \sim$$

Il est clair que \mathcal{FI} est un espace singulier. Par exemple, lorsqu'on restreint tout aux fonctions quadratiques (et donc aux champs hamiltoniens linéaires), \mathcal{FI} est une variété algébrique composée de strates lisses de différentes dimensions.

Regardons maintenant ce que l'on peut dire en général au voisinage d'un système donné. Soit donc $[\mathbf{f}] \in \mathcal{FI}$ un feuilletage complètement intégrable. Soit \mathbf{f} un représentant : \mathbf{f} est un homomorphisme de Lie de L_0 dans X. On peut ainsi faire agir L_0 sur X par représentation adjointe : $L_0 \times X \ni (\ell, g) \rightarrow {\mathbf{f}}(\ell), g \in X$, ce qui fait de X un L_0 -module. Il est naturel de penser à introduire le complexe de Chevalley-Eilenberg associé

^{(6).} et on le fera encore souvent...

(au moins jusqu'en degré 2) : $C^q(L_0, X) = \text{Hom}(L_0^{\wedge q}, X)$ est l'espace des application *q*-linéaires alternées de L_0 dans X, ces derniers étant vus comme simples espaces vectoriels (et on convient que $C^0(L_0, X) = X$). On note d_f la différentielle associée : comme dans [26], pour une 0-cochaîne $g \in X$, la 1-cochaîne $d_f(g)$ est $d_f(g)(\ell) = \{\mathbf{f}(\ell), g\}, \ell \in L_0$ tandis que pour une *k*-cochaîne ϕ la k + 1 cochaîne $d_f(\phi)$ est

$$d_{\mathbf{f}}(\phi)(\ell_1,\ldots,\ell_{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \{ \mathbf{f}(\ell_i), \phi(\check{\ell}_i) \}, \quad \ell_i \in L_0,$$

où $\check{\ell}_i = (\ell_1, ..., \check{\ell}_i, ..., \ell_{k+1}).$

Notons $\mathcal{O}_{\mathbf{f}} = C_{\mathbf{f}}$ si l'on s'intéresse à l'équivalence faible et au contraire $\mathcal{O}_{\mathbf{f}} = \mathbb{R} \oplus \langle C_{\mathbf{f}}^n, \mathbf{f} - \mathbf{f}(m) \rangle \mathbf{q}$ dans le cas de l'équivalence forte (\mathbb{R} désigne ici les fonctions constantes : $M \to \mathbb{R}$ et $\langle C_{\mathbf{f}}^n, \mathbf{f} - \mathbf{f}(m) \rangle$ désigne l'ensemble des fonctions de la forme $\sum_i a_i (f_i - f_i(m))$ avec $a_i \in C_{\mathbf{f}}$). L'espace $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ est toujours une sous-algèbre de Poisson commutative de X. Puisque L_0 agit trivialement sur $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$, l'algèbre de Lie quotient $X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ se voit munie d'une structure de L_0 -module. On définit le nouveau complexe de Chevalley-Eilenberg associé : $C^q(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}) = \operatorname{Hom}(L_0^{\wedge q}, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}})$ est l'espace des application q-linéaires alternées de L_0 dans $X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$, muni de la différentielle notée $\overline{d}_{\mathbf{f}}$. Ceci étant posé, le "complexe" qui semble le plus adapté est une mixture de $C^{\bullet}(L_0, X)$ et $C^{\bullet}(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}})$ (complexe est un terme un peu pédant puisqu'on ne s'intéressera qu'aux termes de degré 1... Mais malgré tout il semble qu'on puisse donner un sens aux autres degrés : voir [126]). Le complexe en question, noté $C^{\bullet}(\mathbf{f})$, est le suivant :

$$0 \longrightarrow X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}} \xrightarrow{\bar{d}_{\mathbf{f}}} C^{1}(L_{0}, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}) \xrightarrow{\partial_{\mathbf{f}}} C^{2}(L_{0}, X) \xrightarrow{d_{\mathbf{f}}} C^{3}(L_{0}, X) \xrightarrow{d_{\mathbf{f}}} \cdots$$

où $\partial_{\mathbf{f}}$ est défini par le diagramme suivant, où tous les petits triangles sont commutatifs ($C^k(L_0, \mathcal{O}_{\mathbf{f}})$ est toujours dans le noyau de $d_{\mathbf{f}}$) :



(Les complexes s'arrêtent bien sûr en degré $n : C^{\geq n+1}(L_0, .) = 0$). Les cocycles et cobords sont notés de façon standard : par exemple $Z^k(L_0, X)$, $B^k(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}})$ et $B^k(\mathbf{f})$. Les espaces de cohomologie sont notés $H^k()$. On a alors la description formelle de l'espace tangent à \mathcal{FI} en [**f**] :

$$T_{[\mathbf{f}]}\mathcal{FI} = Z^{1}(\mathbf{f}) = Z^{1}(L_{0}, X) / Z^{1}(L_{0}, \mathcal{O}_{\mathbf{f}}).$$
 (3.4)

3.1. FORMES NORMALES : UN POINT DE VUE HEURISTIQUE

En effet le $\partial_{\mathbf{f}}$ d'une 1-cochaîne $\alpha \in C^1(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}})$ s'écrit

$$\partial_{\mathbf{f}}\alpha(g,h) = \{\mathbf{f}(g), \alpha(h)\} - \{\mathbf{f}(h), \alpha(g)\},\$$

alors que l'application linéaire tangente à κ est

$$T_{\mathbf{f}}\kappa: \mathcal{C}^1 \to \wedge^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes X$$

$$g_1 dx_1 + \dots + g_n dx_n \mapsto \sum_{i < j} \left(\{g_i, f_j\} + \{f_i, g_j\} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Donc quitte à munir L_0 d'une base (e_1, \ldots, e_n) qui l'identifie à \mathbb{R}^n et à poser $f_i = \mathbf{f}(e_i)$ (et $\alpha(e_i) = g_i$), on voit que

$$Z^{1}(\mathbf{f}) = \ker T_{\mathbf{f}} \kappa / \mathcal{O}_{\mathbf{f}},$$

qui est bien l' "espace tangent" formel de \mathcal{FI} . (Dans cette formule on a écrit abusivement $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ pour signifier les applications linéaires de \mathbb{R}^n dans $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$, qui sont bien sûr incluses dans ker $T_{\mathbf{f}}\kappa$).

Supposons un moment qu'on se restreigne aux feuilletages réguliers ; on peut grâce au théorème de Darboux-Carathéodory 3.2.2 introduire des variables (x_1, \ldots, x_n) symplectiquement conjuguées aux (f_1, \ldots, f_n) et identifier un élément de $C^k(L_0, X)$ à une *k*-forme différentielle sur *M* ; par exemple pour les 1-formes : $(g_1, \ldots, g_n) \mapsto g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n$. La différentielle d_f est alors la différentielle extérieure standard par rapport aux variables *x* (c'està-dire restreinte aux feuilles du feuilletage). Le choix d'une petite surface Σ transverse au feuilletage en *m* permet donc d'identifier $Z^1(L_0, X)$ aux applications lisses $\Sigma \ni \sigma \to Z^1_{dRh}(\Lambda_{\sigma}, \mathbb{R})$, où Λ_{σ} est la feuille locale contenant σ . On retrouve ainsi la description de Weinstein de l'espace des sous-variétés lagrangiennes [157].

Comme on va le voir, $B^1(\mathbf{f})$ et $H^1(\mathbf{f})$ ont également une interprétation géométrique.

Retour aux formes normales — Considérons maintenant l'action du groupe *G* des difféomorphismes symplectiques (locaux). *G* agissant naturellement sur *X* en respectant la structure de Poisson, il agit également sur $C\mathcal{I}_r^1$. En outre l'action de *G* étant compatible avec la relation d'équivalence (faible ou forte) $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$, elle se restreint naturellement au quotient \mathcal{FI} . Soit $[\mathbf{f}] \in \mathcal{FI}$ et notons $G([\mathbf{f}])$ son orbite (locale) sous l'action de *G*. L'espace tangent $T_{[\mathbf{f}]}G([\mathbf{f}])$ est formellement l'orbite de $[\mathbf{f}]$ sous l'action adjointe de l'algèbre de Lie \mathfrak{G} ou X :

$$T_{[\mathbf{f}]}G([\mathbf{f}]) = \{L_0 \ni \ell \to \{h, \mathbf{f}(\ell)\} \mod \mathcal{O}_{\mathbf{f}} \mid h \in X\}.$$

Autrement dit,

$$T_{[\mathbf{f}]}G([\mathbf{f}]) = B^1(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}) = B^1(\mathbf{f}).$$

L'espace de cohomologie $H^1(\mathbf{f})$ est donc vu comme l'espace *normal* à l'orbite de $[\mathbf{f}]$ sous *G*.

Or une forme normale pour **f** est un système f_0 tel qu'il existe une transformation $g \in G$ telle que

$$g^*\mathbf{f} \sim \mathbf{f_0}.\tag{3.5}$$

Donc par une coïncidence lexicale inappropriée $H^1(L_0, X/\mathcal{O}_f)$ qui est l'espace normal contient les directions *ne pointant pas* vers des formes normales pour **f**. En langage algébrique c'est l'espace des déformations infinitésimales (non triviales) de [**f**]; en termes de singulariste, cela représente la versalité de [**f**].

Méthode de Moser et équation cohomologique — Supposons qu'on veuille prouver une forme normale du type (3.5). Suivant l'idée de la fameuse *méthode de Moser* [114], appliquée à notre contexte, on peut être tenté de construire *a priori* un chemin différentiable \mathbf{f}_t reliant \mathbf{f}_0 à \mathbf{f} et à chercher un chemin associé g_t dans le groupe G vérifiant $g_0 = Id$ et

$$\forall t \in [0,1], \quad g_t.\mathbf{f}_t \sim \mathbf{f_0}.$$

Ainsi, la transformation g_1 répondra à la question. Une condition nécessaire pour espérer appliquer cette méthode est évidemment que f_0 et f soient dans la même classe d'"homotopie" (et même d'isotopie). L'étape préliminaire est donc de trouver une classification grossière permettant de distinguer les classes d'isotopies. Ceci étant réglé, on différencie par rapport à t pour obtenir une équation dans l'espace tangent à \mathcal{FI} en $[f_0]$:

$$\frac{d}{dt}(g_t.\mathbf{f}_t) \in Z^1(L_0, \mathcal{O}_{\mathbf{f}_0}),$$

qui s'écrit encore

$$\{\mathbf{f_0}, S_t\} + \frac{d}{dt}(\mathbf{f}_t) \circ g_t \in \mathcal{O}_{\mathbf{f_0}},$$

où S_t est le Hamiltonien associé au flot de g_t^{-1} . En termes cohomologiques, il s'agit de résoudre

$$d_{\mathbf{f}_0}S_t = -\frac{d}{dt}(\mathbf{f}_t) \circ g_t \quad \in Z^1(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}_0}).$$

Il est en général difficile de résoudre directement cette équation, même si dans un certain nombre de cas des astuces existent. Les formules telles qu'elles sont écrites ici ne servent en général que dans un cadre formel. En effet, on est très souvent amené à considérer dans un premier temps l'équation à t = 0 (par exemple si l'on cherche une solution formelle en t — ou en \hbar , dans le cas semi-classique), qui devient

$$d_{\mathbf{f}_0}S_0 = -\frac{d}{dt}(\mathbf{f}_t)_{\restriction t=0}$$

Autrement dit, on cherche à montrer que le cocycle $-\frac{d}{dt}(\mathbf{f}_t)_{|t=0}$ est un cobord. Cette équation s'appelle *l'équation cohomologique*. On trouve parfois aussi le terme d'équation homologique. En optique géométrique, elle correspond à une équation de transport.

En réalité je ne connais pas d'exemple de méthode de Moser *directe* pour normaliser un système complètement intégrable lorsqu'on quitte la catégorie formelle. Le problème est peut-être qu'il est difficile de trouver *a priori* un chemin simple \mathbf{f}_t (l'interpolation linéaire ne marche pas : \mathcal{FI} n'est pas un ouvert d'un espace vectoriel). On procède souvent en deux temps ; d'abord, on obtient une forme normale sous l'action du groupe plus gros de tous les difféomorphismes, et ceci par des constructions géométriques souvent à base d'algèbre linéaire. Enfin, on applique la méthode de Moser pour "symplectifier" la forme normale obtenue, ce qui consiste à envoyer la forme symplectique déformée sur la forme symplectique initiale par un difféomorphisme qui respecte le feuilletage. On a gagné en particulier le fait que l'espace des formes symplectiques est, lui, un ouvert d'un espace vectoriel. Une telle méthode est utilisée par exemple dans [10, 62].

3.2 Points réguliers

Soit *M* une variété symplectique de dimension 2*n*, et (f_1, \ldots, f_n) un système complètement intégrable sur $M : f_i \in C^{\infty}(M)$ et $\{f_i, f_j\} = 0$. Soit $F = (f_1, \ldots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ l'application moment.

Définition 3.2.1 Un point $m \in M$ est dit régulier pour F si dF(m) est de rang maximal n. Autrement dit, $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n(m) \neq 0$.

Par le théorème de submersion locale, les fibres $F^{-1}(c)$ pour c proche de F(m) sont localement des sous-variétés de dimension n près d'un point régulier m. La structure locale des points réguliers des systèmes complètement intégrable est très simple. Elle est en fait entièrement décrite par le théorème classique suivant :

Théorème 3.2.2 (Darboux-Carathéodory) Si m est régulier, F est symplectiquement conjuguée près de m à la fibration linéaire (ξ_1, \ldots, ξ_n) sur l'espace symplectique linéaire \mathbb{R}^{2n} muni des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ et de la forme symplectique canonique $\sum_i d\xi_i \wedge dx_i$.

Autrement dit, il existe des fonctions ϕ_1, \ldots, ϕ_n sur M telles que

$$(\phi_1, \ldots, \phi_n, f_1 - f_1(m), \ldots, f_n - f_n(m))$$

soit un système de coordonnées canoniques au voisinage de m.

Démonstration. On peut supposer F(m) = 0. Au voisinage de m, le feuilletage associé au système est lagrangien et régulier ; on peut donc trouver une section locale Σ lagrangienne et transverse au point m (pour cela il suffit du théorème de Darboux classique et d'un peu d'algèbre linéaire). Les fonctions (f_1, \ldots, f_n) définissent une action locale $\varphi_{(t_1,\ldots,t_n)}$ de \mathbb{R}^n sur M, agissant localement librement sur chaque feuille. On choisit $\phi_1(p), \ldots, \phi_n(p)$ comme étant les temps nécessaires à cette action pour arriver en p partant sur Σ . On a donc $\{f_i, \phi_i\} = 1$. Enfin les sous-variétés $\phi = \text{const étant les images d'une}$ lagrangienne par un flot symplectique sont elles-mêmes lagrangiennes, ce qui assure $\{\phi_i, \phi_i\} = 0$.

En toute logique, le nom de Liouville devrait être associé à ce théorème, puisque bien avant Darboux et Carathéodory, Liouville donne une formule explicite et très élégante pour les fonctions ϕ_i . Ce résultat publié en 1855 [98] fournit une résolution locale du flot de tout Hamiltonien complètement intégrable (et éventuellement dépendant du temps) en un point régulier du feuilletage en terme de la fameuse 1-forme de Liouville $\sum_i \xi_i dx_i$. En ce sens il implique le théorème de Darboux-Carathéodory comme corollaire, même si la formulation de Liouville est plus compliquée.

Le théorème de Darboux-Carathéodory permet de répondre à un certain nombre de questions évoquées au paragraphe précédent (3.1). Rappelons-les brièvement.

Définition 3.2.3 Soit $\mathbf{f} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ un système complètement intégrable. Le **commutant** de \mathbf{f} est l'ensemble des fonctions commutant avec toutes les f_i . On le note $C_{\mathbf{f}}$.

Il faut préciser qu'on verra en général C_f comme un (pré-)faisceau, dans le sens où on parlera du commutant « sur un ouvert », en signifiant que la propriété de commutation n'est requise que sur cet ouvert.

Lemme 3.2.4 Localement près d'un point régulier, $C_{\mathbf{f}}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$, où $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer Darboux-Carathéodory.

Proposition 3.2.5 C_f est une algèbre de Poisson commutative.

Démonstration. C'est une algèbre de Lie en vertu de l'identité de Jacobi. C'est une algèbre de Poisson grâce à l'identité de Leibniz. Par le lemme précédent, elle est commutative au voisinage des points réguliers, donc partout.

Définition 3.2.6 On dit que deux systèmes complètement intégrables \mathbf{f} et \mathbf{g} sont faiblement équivalents, et on note $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$, lorsque $C_{\mathbf{f}} = C_{\mathbf{g}}$.

f et **g** sont **faiblement équivalents** si et seulement si $\mathbf{f} \subset C_{\mathbf{g}}$ (ou $\mathbf{g} \subset C_{\mathbf{f}}$) : cette assertion découle de la proposition 3.2.5. Le lemme 3.2.4 implique la caractérisation suivante, qui sera fausse dans le cas singulier :

Proposition 3.2.7 Si m est régulier pour **f** et **g**, alors ils sont équivalents si et seulement si $(f_1, \ldots, f_n) = \varphi(g_1, \ldots, g_n)$, où φ est un difféomorphisme local de \mathbb{R}^{n} .

Dans ce cas, l'équivalence faible est identique à l'équivalence forte (voir le paragraphe 3.3 plus bas).

Enfin, le théorème de Darboux-Carathéodory justifie le lien expliqué au paragraphe 3.1 entre les complexes de déformation associés à f et le complexe de de Rham sur les feuilles lagrangiennes. En particulier, au voisinage d'un point régulier, $H^1(\mathbf{f}) = 0$.

Semi-classique

Le théorème de Darboux-Carathéodory admet un analogue semi-classique tout aussi simple mais tout aussi efficace. Sa première démonstration dans le cadre des opérateurs pseudo-différentiels homogènes est due à Colin de Verdière [29] (même si le cas n = 1 est déjà traité par Duistermaat et Hörmander [56]).

On se donne *n* opérateurs \hbar -pseudo-différentiels P_1, \ldots, P_n sur $M = T^*X$ qui commutent deux à deux (globalement, ou microlocalement dans un ouvert : $[P_i, P_i] = O(\hbar^{\infty})$). On note maintenant *p* l'application moment classique correspondant aux symboles principaux p_i , tandis que

$$P = (P_1, \ldots, P_n)$$

est appelée application moment quantique, ou fibration quantique.

Théorème 3.2.8 Si m est régulier, P est microlocalement conjuguée près de m à la

fibration $(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$ agissant sur \mathbb{R}^n Autrement dit, il existe un opérateur intégral de Fourier U défini près de m et microlocalement unitaire tel que $U(P_j - p_j(m))U^{-1} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ microlocalement près de m.

Démonstration. Soit χ le symplectomorphisme donné par le théorème de Darboux-Carathéodory, et U_0 un opérateur intégral de Fourier le quantifiant près de *m*. Le résultat est ainsi obtenu modulo des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre \hbar . Pour corriger cette erreur on conjugue de nouveau par un opérateur pseudo-différentiel de la forme $\exp(iA)$, où A est un \hbar opérateur pseudo-différentiel. Comme on ne désire qu'un résultat microlocal (à $O(\hbar^{\infty})$ près), il suffit de montrer qu'il existe un voisinage de *m* dans lequel on peut résoudre à tout ordre en \hbar , ce qui est un simple exercice. \Box

Remarque 3.2.9 Il n'est pas nécessaire que *P* soit auto-adjointe. À partir du moment où le symbole principal *p* est réel, le théorème s'applique encore, mais le caractère unitaire de $U(\hbar)$ est perdu.

En relation avec la théorie générale des formes normales racontée au paragraphe 3.1, on observe les quatre faits suivants :

1. ici, on ne désire pas autoriser d'équivalences entre deux fibrations : le symbole \sim est vraiment remplacé par = ;

2. le problème est bien posé (car il est formel) dans le cadre « action d'une algèbre de Lie par représentation adjointe »;

3. l'équation cohomologique, ne faisant intervenir qu'un ordre en \hbar à la fois, est en réalité une équation classique sur les symboles principaux;

4. la cohomologie associée est ici isomorphe à la cohomologie de de Rham, et donc localement triviale : l'équation cohomologique est toujours résoluble. (Le fait qu'il existe un voisinage universel provient par exemple de la formule de Poincaré pour intégrer une forme fermée.)

De ce point de vue on voit que la démonstration (non détaillée ici) suit parfaitement le schéma abstrait des formes normales, même s'il est probablement bien plus court et plus simple de l'écrire directement. Je dis « probablement », car il faut tout de même se rendre compte que le membre de droite des n équations que l'on obtient correspond simplement à une 1-forme fermée, ce qui est déjà une géométrisation du problème...

Dans la suite des évènements, les points 2. et 3. seront toujours vérifiés (voir le théorème 3.2.10 ci-dessous); plus subtils seront les analogues des points 1. et 4.

Le théorème de Darboux-Carathéodory semi-classique permet d'introduire de façon parfaitement parallèle au cas classique les notions d'équivalences de feuilletages. En bref, on note **P** l'espace vectoriel sur **R** engendré par les P_i . Le commutant semi-classique $\hat{C}_{\mathbf{P}}$ est l'ensemble des opérateurs commutant avec les P_i (éventuellement microlocalement sur un ouvert). On montre alors que $\hat{C}_{\mathbf{P}}$ est une algèbre de Poisson commutative [148]. Deux systèmes **P** et **Q** sont dits faiblement équivalents lorsqu'ils ont même commutant. Au voisinage de points réguliers pour les deux, cela revient à dire qu'il existe un symbole classique local $\varphi \in S^0(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , dont le terme principal est un difféomorphisme local de \mathbb{R}^n , tel que $P = \varphi(Q)$ microlocalement près de *m*.

On peut même aller plus loin et introduire le complexe de déformation associé à un système complètement intégrable **P**. Si \hat{X} désigne le faisceau des opérateurs pseudo-différentiels à symboles classiques et de degré maximum zéro modulo équivalence microlocale, on voit **P** comme une représentation de l'algèbre de Lie commutative de dimension *n* type L_0 dans \hat{X} (agissant par crochet $S \rightarrow \frac{i}{\hbar}[P_j, S]$), ce qui fait de \hat{X} ou \hat{X}/\hat{C}_P un L_0 -module. On définit comme au paragraphe 3.1 les complexes associés et le complexe mixte $C^{\bullet}(\mathbf{P})$. Soit **p** le système classique correspondant aux symboles principaux

3.2. POINTS RÉGULIERS

de P. On montre alors le résultat suivant :

Théorème 3.2.10 Si $H^1(\mathbf{p}) = 0$, et la restriction du symbole principal $\sigma : \hat{C}_{\mathbf{P}} \to C_{\mathbf{p}}$ est surjective, alors $H^1(\mathbf{P}) = 0$.

Démonstration. Il est assez raisonnable de demander une preuve diagrammatique ; en voici une. On utilise les trois suites exactes suivantes, qui font intervenir l'application "symbole principal" σ et les inclusions naturelles $\hbar \hat{X} \subset \hat{X}$ et $\hbar \hat{C}_{\mathbf{P}} \subset \hat{C}_{\mathbf{P}}$. La première suite exacte décrit la propriété fondamentale du symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel :

$$0 \longrightarrow h\hat{X} \longrightarrow \hat{X} \xrightarrow{\sigma} X \longrightarrow 0 .$$
 (3.6)

Pour la seconde, on utilise l'hypothèse de surjectivité de σ :

$$0 \longrightarrow h\hat{C}_{\mathbf{P}} \longrightarrow \hat{C}_{\mathbf{P}} \xrightarrow{\sigma} C_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0.$$
(3.7)

Enfin la troisième est une conséquence des deux premières :

$$0 \longrightarrow \hbar(\hat{X}/\hat{C}_{\mathbf{P}}) \longrightarrow \hat{X}/\hat{C}_{\mathbf{P}} \xrightarrow{\bar{\sigma}} X/C_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0.$$
(3.8)

La surjectivité de $\bar{\sigma}$ découle simplement de celle de σ dans (3.6) ; le fait que la suite soit exacte au centre utilise la surjectivité de σ dans (3.7). En utilisant les deux suites exactes courtes (3.6) et (3.8), on en déduit de façon très standard une suite exacte longue en cohomologie, à l'aide du diagramme suivant :

On obtient ainsi

$$0 \longrightarrow \hbar H^{0}(\mathbf{P}) \longrightarrow H^{0}(\mathbf{P}) \longrightarrow H^{0}(\mathbf{p}) \longrightarrow$$

$$(3.10)$$

$$\longrightarrow \hbar H^{1}(\mathbf{P}) \longrightarrow H^{1}(\mathbf{P}) \longrightarrow H^{1}(\mathbf{p}) \longrightarrow \hbar H^{2}(\mathbf{P}) \longrightarrow \cdots$$

Venons-en au théorème : si $H^1(\mathbf{p}) = 0$, on a donc un morphisme surjectif, commutant avec \hbar (car induit par l'inclusion $\hbar \hat{X} \subset X$) : $\hbar H^1(\mathbf{P}) \rightarrow H^1(\mathbf{P})$. Donc tout élément de $H^1(\mathbf{P})$ est d'ordre \hbar . En itérant, il est d'ordre h^N pour N quelconque ; donc, il est nul (les éléments de \hat{X} ne sont définis que modulo $O(\hbar^{\infty})$).

On peut également préférer une preuve plus directe; la voici. On se donne un 1-cocycle dans $Z^1(\mathbf{P})$, c'est-à-dire *n* opérateurs pseudo-différentiels Q_j tels que $[P_i, Q_j] + [Q_i, P_j] = 0$. On cherche à montrer que c'est un cobord, ce qui revient à trouver un $F \in \hat{X}$ et des $C_j \in \hat{C}_{\mathbf{P}}$ vérifiant l'équation cohomologique

$$\frac{i}{\hbar}[P_j,F] = Q_j + C_j.$$

Puisque $H^1(\mathbf{p}) = 0$ et que σ envoie $Z^1(\mathbf{P})$ dans $Z^1(\mathbf{p})$, on peut résoudre l'équation au niveau des symboles principaux : il existe $f \in X$, $c_j \in C_{\mathbf{p}}$ tels que

$$\{p_j, f\} = q_j + c_j,$$

où $q_j = \sigma(Q_j)$. En utilisant l'hypothèse de surjectivité de σ , on peut trouver des opérateurs pseudo-différentiels $C_j \in \hat{C}_P$ tels que $\sigma(C_j) = c_j$. En choisissant maintenant un opérateur pseudo-différentiel F_0 de symbole principal f on a

$$\frac{i}{\hbar}[P_j, F_0] = Q_j + C_j + \hbar R_j$$

pour un $R_j \in \hat{X}$. Puisque $C_j \in C_Q$, on vérifie facilement que R_j est encore un 1cocycle. Il suffit dont de résoudre l'équation cohomologique pour ce nouveau cocycle... En réitérant la procédure on voit qu'on finit par obtenir un F de la forme $F_0 + \hbar F_1 + \hbar^2 F_2 + \cdots$ qui est solution à un ordre arbitraire en \hbar , ce qui nous suffit.

Par la version classique de Darboux-Carathéodory, on voit que les hypothèses sont vérifiées au voisinage d'un point régulier. Ce théorème permet de comprendre pourquoi les formes normales qu'on décrit dans ce livre et qui sont stables dans le sens où le H^1 qui intervient est trivial donnent toujours lieu à leur analogue semi-classique. Voir le théorème 3.2.11 suivant.

L'hypothèse sur la surjectivité du symbole principal est cruciale, mais semble un peu technique. Elle sera vérifiée dans les cas qu'on rencontrera, mais je n'ai pas d'argument général à son sujet. Il serait certainement intéressant de s'y attarder davantage.

On peut formaliser le lien très important entre l'annulation du H^1 et l'existence d'une forme normale semi-classique étendant une forme normale classique, de la façon suivante.

Théorème 3.2.11 Soient **f** et **g** deux systèmes complètement intégrables classiques et soit χ un symplectomorphisme exact ⁽⁷⁾ défini sur un ouvert Ω de M tel que, sur

^{(7).} cf. la définition 1.3.5 page 30.
Ω,

$$\chi^* \mathbf{f} \sim \mathbf{g}$$
 .

Supposons en outre

$$H^1(\mathbf{f}) = 0 \; .$$

Soit **G** un système complètement intégrable semi-classique tel que $\sigma(\mathbf{G}) = \mathbf{g}$, et tel que $\sigma : \hat{C}_{\mathbf{G}} \to C_{\mathbf{g}}$ soit surjectif. Alors pour tout système complètement intégrable semi-classique **F** avec $\sigma(\mathbf{F}) = \mathbf{f}$, il existe un opérateur intégral de Fourier U associé à χ tel que, microlocalement sur Ω ,

$$U\mathbf{F}U^{-1}\sim\mathbf{G}$$

Comme le résultat est encore valable pour l'équivalence forte, que nous utiliserons à la section suivante (théorème 3.3.3), et que la preuve est essentiellement la même, je la diffère pour le moment.

Solutions microlocales

Parmi les autres (multiples) applications du théorème de Darboux-Carathéodory, on s'intéressera particulièrement au fait qu'il permet de décrire l'espace des *solutions microlocales* de *P* agissant sur le faisceau des microfonctions : les familles u_{\hbar} admissibles telles que Pu_{\hbar} a un microsupport vide audessus d'un certain ouvert. On sait déjà que les microfonctions solutions de $Pu_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ sont microlocalisées sur l'ensemble de niveau $\bigcap_i \{p_i = 0\}$ (c'est une conséquence directe de la définition du microsupport : cf (1.4), (1.5), page 24). On a beaucoup mieux :

Proposition 3.2.12 ([147]) Si m est un point régulier de p et p(m) = 0, l'espace ⁽⁸⁾ des solutions microlocales du système

$$P_i u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$$
 près de m

est un \mathbb{C}_{\hbar} -module libre de rang 1, engendré par U⁻¹1, où U est un opérateur intégral de Fourier comme dans le théorème 3.2.8 et 1 une fonction d'onde microlocalement égale à 1 près de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$.

Rappelons que C_{\hbar} désigne les symboles constants de la théorie semiclassique. En d'autres termes, la proposition indique que les solutions sont forcément du type "BKW" : des distributions associées à une lagrangienne ; en l'occurrence il s'agit bien entendu de la sous-variété lagrangienne $\cap_i \{p_i = 0\}$. Il se trouve que cette lagrangienne est également la variété engendrée par le flot des p_i . Une conséquence importante est que le microsupport est invariant par le flot hamiltonien conjoint des p_i .

Démonstration *de la proposition*. La preuve se fait en trois étapes :

^{(8).} pour être plus précis, on devrait dire « au-dessus de $p^{-1}(0)$, le faisceau des solutions microlocales est un faisceau en C_{\hbar} -modules libres de rang 1, etc. »

1. On applique Darboux-Carathéodory semi-classique (théorème 3.2.8), ce qui ramène le problème à l'étude des solutions microlocales au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ du système $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial u_{\hbar}}{\partial x_i} = O(\hbar^{\infty})$.

2. Montrons que les seules solutions de ce système sont les « constantes admissibles », c'est-à-dire les distributions microlocalement constantes près de 0 et à croissance modérée en \hbar . Soit u_{\hbar} une telle solution (par exemple $u_{\hbar} \equiv 1$ au voisinage de 0 est évidemment solution). On peut alors appliquer le lemme 1.2.7. En effet, la surface d'énergie commune $\cap_i \{p_i = 0\}$ est, dans ces coordonnées, la lagrangienne $\xi = 0$, qui vérifie bien sûr les hypothèses requises. On obtient donc une famille (v_{\hbar}) (qu'on peut choisir à support compact en x) telle que

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial v_{\hbar}}{\partial x_{j}}=w_{j,\hbar}, \qquad \text{où } \|w_{j,\hbar}\|=O(\hbar^{\infty}).$$

3. En intégrant explicitement cette équation par la formule de Poincaré on constate que v_{\hbar} est égale à une constance c_{\hbar} plus une famille admissible (\tilde{w}_{\hbar}) avec $\|\tilde{w}_{\hbar}\| = O(\hbar^{\infty})$. Donc $c_{\hbar} \in \mathbb{C}_{\hbar}$ et $v_{\hbar} = c_{\hbar}$, microlocalement près de 0. \Box

Forme sous-principale — Soit $(P_1, ..., P_n)$ un système complètement intégrable quantique, et $p = (p_1, ..., p_n)$ l'application moment classique correspondante. Soit Λ_c une composante connexe de la fibre $p^{-1}(c)$. On définit sur les points réguliers de Λ_c une 1-forme κ_c dite *sous-principale* par

$$\kappa_c(\mathcal{X}_{p_j}) = -r_j, \tag{3.11}$$

où r_i est le symbole sous-principal de P_i .

Proposition 3.2.13 La forme sous-principale κ_c sur Λ_c est une 1-forme fermée. Si on conjugue les P_j par un opérateur pseudo-différentiel, κ_c est modifiée par l'addition d'une 1-forme exacte.

Démonstration. Soit $m \in \Lambda_c$ un point régulier. Appliquons le théorème de Darboux-Carathéodory (classique) au voisinage de m. Puisque κ_c est définie par $\kappa_c(\frac{\partial}{\partial x_j}) = -r_j$, on voit qu'elle est fermée en tant que 1-forme sur le plan lagrangien ξ = const si et seulement si $\frac{\partial r_j}{\partial x_k} = \frac{\partial r_k}{\partial x_j}$, pour tout $j, k = 1, \ldots, n$, ce qui s'écrit encore $\{r_j, p_k\} = \{r_k, p_j\}$. Or cette égalité découle de la commutation $[P_j, P_k] = 0$.

Pour montrer le dernier point, prenons *V* un opérateur pseudo-différentiel elliptique en *m*, et notons $P'_j = V^{-1}P_jV$. Puisque P_j et P'_j ont le même symbole principal, on peut écrire $P' = P + \hbar Q$, où $Q = (Q_1, ..., Q_n)$, chaque Q_j étant un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0. L'égalité VP' = PV s'écrit aussi

$$[P_i, V] = \hbar V Q_i.$$

En prenant les symboles principaux, on obtient $\frac{1}{i}\{p_j, v\} = vq_j$, qui devient $\{p_j, w\} = q_j$ si l'on pose $v = e^{iw}$ près de *m*. Notons r'_j et κ' les symboles sous-principaux et la forme sous-principale de *P'*. On a $r'_j = r_j + q_j$, ce qui s'écrit

$$\kappa' = \kappa + dw,$$

où dw désigne la différentielle de w comme fonction sur Λ_c .

On verra comment la classe de cohomologie de κ_c (ou éventuellement une variante désingularisée) intervient dans les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld.

Remarque 3.2.14 Il n'est pas nécessaire de se restreindre aux points réguliers pour parler de la cohomologie de κ_c . La condition $\{r_j, p_k\} = \{r_k, p_j\}$ dit exactement que κ_c est fermée comme 1-cochaîne dans $Z^1(L_0, C^{\infty})$ ou $Z^1(\mathbf{p})$ (voir l'équation (3.4) page 62). La forme sous-principale correspond bien à une *déformation infinitésimale* de \mathbf{p} , le paramètre de déformation étant ici \hbar . \triangle

Remarque 3.2.15 Dans beaucoup d'exemples de systèmes intégrables, et en particulier pour ceux du chapitre 2 : oscillateur harmonique, potentiel à double puits et pendule spécifique, les symboles sous-principaux sont nuls. Pourtant la forme sous-principale demeure un objet utile, car elle permet d'étudier la théorie spectrale du système dans des fenêtres de spectre de taille $O(\hbar)$. Ainsi, dans les équations

$$(P_j - \hbar \lambda_j) u_\hbar = O(\hbar^\infty),$$

il est commode faire entrer λ_j dans le symbole sous-principal, et de voir le système comme dépendant de façon paramétrique des λ_j .

3.3 Points singuliers

La théorie des singularités des systèmes intégrables (même classiques) n'est certainement pas achevée. J'essaie de présenter ici une vision personnelle de l'état de l'art.

L'étude des singularités des systèmes intégrables est fondamentale pour diverses raisons. En premier lieu, de par la façon même dont on se donne un système intégrable : n fonctions sur une variété, on s'attend (sauf cas exceptionnels) à la présence automatique de singularités. D'autre part, ces fonctions définissent un système dynamique tel que leurs singularités correspondent aux points fixes et aux équilibres relatifs du système, qui sont

bien entendu une des caractéristiques principales de la dynamique. D'un point de vue semi-classique, on sait en outre que les fonctions d'ondes importantes comme les fonctions propres du système ont un microsupport invariant par la dynamique classique; donc, d'une certaine façon que je ne détaillerai pas (il faut parler de mesure semi-classique), celles qui sont associées à une lagrangienne critique se concentrent autour des singularités hyperboliques (voir par exemple [34] et les travaux de Toth [136]). Cette concentration se manifeste d'un part par la croissance de la norme des fonctions propres (voir par exemple [137]) et d'autre part par l'augmentation de la densité locale des valeurs propres (voir la figure 4.11 page 113 et les articles [35, 147, 38]).

Feuilletages singuliers

On peut s'intéresser aux singularités d'un système hamiltonien soit par l'étude du flot des champs de vecteurs — c'est l'aspect « système dynamique » soit par celle des fonctions hamiltoniennes qui le définissent — c'est alors l'aspect « feuilletage » qui prévaut. Dans le cas des systèmes complètement intégrables, les deux aspects sont équivalents, car les champs de vecteurs des *n* fonctions f_1, \ldots, f_n forment une base des espaces tangents des feuilles du feuilletage $f_i = \text{const}_i$, au moins aux points réguliers. J'aurai toujours tendance à privilégier l'étude du feuilletage qui met davantage en évidence la géométrie du problème.

Cependant, les feuilletages qui nous intéressent sont *singuliers*, et la notion même de feuilletage singulier est assez délicate. De façon générale, ces feuilletages sont du type de Stefan-Süßmann [130] : les feuilles sont définies par une distribution intégrable de champs de vecteurs. Mais ils sont davantage : d'une part ils sont hamiltoniens, et d'autre part ils sont *presque réguliers* dans le sens où les feuilles singulières ne peuvent pas remplir un domaine de mesure strictement positive. On peut avoir à l'esprit le cas du potentiel à double puits (section 2.2), où toutes les feuilles sont des cercles, sauf une, qui est un « 8 », c'est-à-dire une immersion d'un cercle avec un point double.

Avant de chercher à classifier ces feuilletages, il faut décider d'une relation d'équivalence acceptable. Lors de la discussion du paragraphe 3.1, on a défini la notion d'équivalence faible (définition 3.2.6), montré qu'elle était insuffisante pour les points singuliers, et introduit une équivalence plus forte, qui est la suivante :

Définition 3.3.1 Deux systèmes \mathbf{f} et \mathbf{g} sont dits fortement équivalents en un point $m \in M$ lorsque, au voisinage de m,

$$(f_1 - f_1(m), \dots, f_n - f_n(m)) = N \cdot (g_1 - g_1(m), \dots, g_n - g_n(m)) , \quad (3.12)$$

pour une matrice $N \in GL(n, C_g)$ définie près de m. On note alors $\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$

Je rappelle qu'on a défini $GL(n, C_g)$ comme le groupe des germes de matrices à coefficients dans C_g qui sont inversibles au point *m*.

Cette notion d'équivalence est un léger affaiblissement de la relation fonctionnelle " $\mathbf{f} = \varphi \circ \mathbf{g}$ " qui serait trop forte dans la catégorie C^{∞} (voir le théorème 3.3.7). L'équivalence forte implique l'équivalence faible, ce qui veut dire que si $\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$, on a toujours $C_{\mathbf{f}} = C_{\mathbf{g}}$. On utilisera cette égalité dans la suite. Elle permet également de vérifier que la définition ci-dessus est bien symétrique en \mathbf{f} et \mathbf{g} .

L'équivalence forte ne s'applique pas uniquement au voisinage d'un point. Si Λ est une surface de niveau des f_j , on dira que $\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$ sur Λ si (3.12) est valide, pour un point m de Λ , et pour une matrice de fonctions N définie au voisinage de Λ .

Équivalence forte en semi-classique

Définition 3.3.2 On dira que deux systèmes quantiques \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont fortement équivalents en un point $m \in M$ lorsque, microlocalement près de m,

$$(P_1 - p_1(m), \dots, P_n - p_n(m)) = \hat{N} \cdot (Q_1 - q_1(m), \dots, Q_n - q_n(m))$$
,

où \hat{N} est une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\hat{C}_{\mathbf{Q}}$, dont le symbole principal est inversible en m.

Comme précédemment on utilise le symbole \sim_s pour l'équivalence forte. De la même manière que dans le cas classique, le fait que $\hat{C}_{\mathbf{Q}}$ soit abélienne entraîne que l'équivalence forte implique l'équivalence faible : $\hat{C}_{\mathbf{P}} = \hat{C}_{\mathbf{Q}}$.

On constate directement sur cette définition que deux systèmes fortement équivalents non seulement ont le même « feuilletage semi-classique » (au sens où **P** et **Q** ont même commutant), mais aussi sont tels que les systèmes d'équations $(\mathbf{P} - \mathbf{p}(m))u_{\hbar} = 0$ et $(\mathbf{Q} - \mathbf{q}(m))u_{\hbar} = 0$ ont exactement le même espace de solutions microlocales. C'est cette propriété qui motive la définition avec le plus de conviction.

La possibilité d'obtenir une forme normale semi-classique à partir du résultat classique repose sur le théorème suivant, analogue du théorème 3.2.11 déjà mentionné pour l'équivalence faible. Cependant dans le cas d'équivalence forte le passage du classique au quantique nécessite un décalage d'ordre \hbar du système initial au moyen d'un série formelle d'« invariants » :

Théorème 3.3.3 Soient \mathbf{p} et \mathbf{q} deux systèmes complètement intégrables classiques et soit χ un symplectomorphisme défini près d'un point $m \in M$ tel que, en m,

$$\chi^* \mathbf{p} \sim_s \mathbf{q}$$

Supposons en outre

$$H^1(\mathbf{p})=0$$
 ,

pour l'équivalence forte. Soit \mathbf{Q} un système semi-classique tel que $\sigma(\mathbf{Q}) = \mathbf{q}$, et tel que $\sigma : \hat{C}_{\mathbf{Q}} \to C_{\mathbf{q}}$ soit surjectif. Alors pour tout système semi-classique \mathbf{P} avec $\sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{p}$, il existe un opérateur intégral de Fourier U associé à χ et des séries formelles $\lambda_j(\hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_j^{(k)} \hbar^k$ tels que, microlocalement près de m,

$$U(P_1 - \hbar\lambda_1(\hbar), \dots, P_n - \hbar\lambda_n(\hbar))U^{-1} \sim_s (Q_1, \dots, Q_n).$$

Démonstration. On supposera pour simplifier les notations que p(m) = q(m) = 0. Au voisinage de *m*, il existe un opérateur intégral de Fourier U_0 associé à la transformation canonique χ . Puisqu'il est clair que $H^1(\mathbf{p}) = 0 \iff H^1(\chi^*\mathbf{p}) = 0$, on commence, en remplaçant **P** par $U_0\mathbf{P}U_0^{-1}$, par se ramener au cas $\chi = \text{Id}$.

Par hypothèse, il existe une matrice $N_0 \in GL(n, C_q)$ telle que

$$\mathbf{p}=N_0\cdot\mathbf{q}.$$

En utilisant la surjectivité de σ , on quantifie N_0 en une matrice $\hat{N}_0 \in GL(n, \hat{C}_Q)$, de sorte que

$$\mathbf{P} = \hat{N}_0 \cdot \mathbf{Q} + \hbar \mathbf{R},\tag{3.13}$$

microlocalement près de *m* pour des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro $\mathbf{R} = \langle R_1, ..., R_n \rangle$. Comme le veut la technique habituelle, on va chercher à éliminer \mathbf{R} tout en introduisant la série $\lambda(\hbar) = (\lambda_1(\hbar), ..., \lambda_n(\hbar))$ par conjugaisons successives. Cherchons donc un opérateur pseudo-différentiel *V* elliptique en *m* pour lequel on aurait

$$V(\mathbf{P} - \hbar\lambda(\hbar))V^{-1} = (\hat{N}_0 + \hbar\hat{N}_1) \cdot \mathbf{Q} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Multipliant à droite par V et remplaçant **P** par son expression donnée en (3.13), le système se récrit

$$\hbar^{-1}[V, \hat{N}_0 \cdot \mathbf{Q}] = \hat{N}_1 \cdot \mathbf{Q}V - V\mathbf{R} + V\lambda^{(0)} + \mathcal{O}(\hbar)$$

Il suffit donc de résoudre au niveau du symbole principal, ce qui donne le système

$$\frac{1}{i} \{ v, N_0 \cdot \mathbf{q} \} = v (N_1 \cdot \mathbf{q} + \lambda^{(0)} - \mathbf{r}).$$

On peut chercher v de la forme $v = \exp iw$, où w est réel ; et puisque $N_0 \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p}$, on se ramène à

$$\{w, \mathbf{p}\} = N_1 \cdot \mathbf{q} + \lambda^{(0)} - \mathbf{r}. \tag{3.14}$$

Les fonctions $\mathbf{r} = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$ ne sont pas quelconques. D'après (3.13), le fait que $\hat{N}_0 \cdot \mathbf{Q} \in \hat{C}_{\mathbf{Q}}$ et que $\hat{C}_{\mathbf{Q}}$ est abélienne implique que les composantes de $\mathbf{P} - \hbar \mathbf{R}$ commutent entre elles. On obtient que \mathbf{r} est un *1-cocycle* de $Z^1(L_0, X)$ pour l'action de \mathbf{p} , dans la terminologie du paragraphe 3.1. Puisque $H^1(\mathbf{p}) = 0$, \mathbf{r} est un cobord dans $B^1(\mathbf{p})$, c'est-à-dire modulo $\mathbb{R}^n \oplus$ $M_n(C_{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{p}$, ce qui résout précisément l'équation (3.14).

3.3. POINTS SINGULIERS

Le résultat final est obtenu par récurrence au moyen d'itérations du même type. $\hfill \Box$

Remarque 3.3.4 Pour des systèmes **P** et **Q**, on a

$$(U\mathbf{P}U^{-1}\sim_{s}\mathbf{Q})\iff (\mathbf{P}\sim_{s}U^{-1}\mathbf{Q}U)$$

(et c'est également valable pour l'équivalence faible).

Singularités non dégénérées

Dans la théorie des singularités des fonctions différentiables, les singularités "génériques" sont les singularités de Morse. Il existe dans la théorie des systèmes complètement intégrables un analogue très naturel de la notion de singularité de Morse (ou plus généralement de Morse-Bott si l'on admet des sous-variétés de points critiques).

Définition 3.3.5 ([140]) Un point fixe *m* est dit **non dégénéré** (au sens de Vey-Williamson) si les Hessiennes $d^2 f_j(m)$ engendrent un sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie des formes quadratiques sur T_mM (munie du crochet de Poisson linéarisé).

Rappelons qu'on appelle sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semisimple a un élément maximal parmi les sous-algèbres de Lie c commutatives et qui vérifient la propriété suivante :

 $\forall H \in \mathfrak{c}, \quad \operatorname{ad}_H \text{ est un endomorphisme semi-simple de } \mathfrak{a}.$ (3.15)

(Un endomorphisme est qualifié de semi-simple s'il est diagonalisable sur \mathbb{C} .)

On utilisera librement l'identification entre l'algèbre de Lie Q(2n) des formes quadratiques sur \mathbb{R}^{2n} et l'algèbre de Lie symplectique réelle $\mathfrak{sp}(2n)$. Les éléments de cette dernière, appelés matrices hamiltoniennes, sont de la forme *JB*, où *J* est la matrice symplectique canonique et *B* une matrice symétrique réelle quelconque.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2n)$ est de rang n, et ses éléments réguliers sont les matrices semi-simples à valeurs propres simples. Puisque les sous-algèbres de Cartan sont les commutants des éléments réguliers (voir par exemple Bourbaki [14]), on en déduit la caractérisation suivante, sûrement plus parlante :

Lemme 3.3.6 Une sous-algèbre commutative c de $\mathfrak{sp}(2n)$ de dimension n est une sous-algèbre de Cartan si et seulement si elle contient une matrice semi-simple à valeurs propres simples. Elle est alors égale au commutant de cette matrice.

 \triangle

En effet, supposons que c contienne une telle matrice *A*. Le commutant de *A* est une sous-algèbre de Cartan, donc de dimension *n*; puisqu'elle contient c, elle est égale à c.

La proposition indique aussi que le fait d'être Cartan est stable par petite perturbation de l'algèbre c. En fait, la grassmanienne de toutes les sousalgèbres abéliennes de dimension n de formes quadratiques sur \mathbb{R}^{2n} est une variété algébrique stratifiée, et les sous-algèbres de Cartan en forment un ouvert, donc une strate de dimension maximale.

Dans notre cas, la condition de non-dégénérescence est donc qu'une combinaison linéaire générique des champs de vecteurs linéarisés en m (qui sont des matrices hamiltoniennes : dans sp $(2n, \mathbb{R})$) admet 2n valeurs propres distinctes.

Cette définition concerne les points fixes de **f**, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'application (f_1, \ldots, f_n) admet un différentielle nulle en *m*; on dit que *m* est de corang 0. Plus généralement si *m* est de corang *r*, on peut supposer que $df_1(m), \ldots, df_{n-r}(m)$ sont linéairement indépendantes; on restreint alors f_{n-r+1}, \ldots, f_n à la variété symplectique Σ localement réduite de *M* par l'action de f_1, \ldots, f_{n-r} . On dira que *m* est non dégénéré (on dit aussi *transversalement non dégénéré*) lorsque cette restriction du système à Σ admet *m* comme point fixe non dégénéré. Un tel point critique admet un *modèle linéaire* sur $T^*\mathbb{R}^{n-r} \times T_m\Sigma$ donné par le système $\mathbf{f}_0 := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}, q_1, \ldots, q_r)$, où les ξ_j sont les coordonnées moments canoniques de $T^*\mathbb{R}^{n-r}$ et les q_j forment une base de la sous-algèbre de Cartan mentionnée dans la définition.

Les exemples présentés au chapitre 2 n'ont que des singularités non dégénérées. C'est encore le cas de nombreux exemples classiques de systèmes intégrables. En revanche, lorsque le système dépend naturellement d'un ou plusieurs paramètres extérieurs, on s'attend à ce que les singularités non dégénérées cessent de l'être pour certaines valeurs du paramètre. Un exemple simple est présenté au chapitre 5, section 5.7. L'étude systèmatique des déformations à plusieurs paramètres⁽⁹⁾ de singularités (dégénérées ou non) des feuilletages lagrangiens classiques et semi-classiques a été initiée par Colin de Verdière dans [33], pour des systèmes à un seul degré de liberté. Dans ce livre, je me cantonnerai aux cas non dégénérées.

Théorème 3.3.7 (Théorème d'Eliasson [61, 62]) Les points critiques non dégénérés sont linéarisables : il existe un symplectomorphisme local χ au voisinage de m tel que

 $\chi^* \mathbf{f} \sim_s \mathbf{f}_0.$

Pour utiliser ce théorème il faut comprendre la classification linéaire des sous-algèbres de Cartan de sp $(2n, \mathbb{R})$. Elle découle des travaux de Williamson [161]; rappelons-la rapidement.

^{(9). «} Déformations verselles ».

3.3. POINTS SINGULIERS

On veut donc classifier les matrices hamiltoniennes semi-simples (réelles) modulo conjugaison par un symplectomorphisme linéaire.

Les valeurs propres d'une matrice hamiltonienne A vont par paires $(\lambda, -\lambda)$; si les valeurs propres sont toutes distinctes, ce qu'on suppose désormais, elle est donc inversible. On vérifie facilement que les sous-espaces propres $E_{\pm\lambda} = \ker(A - \lambda I) \oplus \ker(A + \lambda I)$ associés à des paires différentes sont symplectiquement orthogonaux. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut construire une base symplectique de $E_{\pm\lambda}$ dans laquelle la restriction $A_{|E_{\pm\lambda}}$ est donnée par le bloc, dit *hyperbolique*,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = i\omega \in i\mathbb{R}$, le même résultat vaut pour le bloc *elliptique*

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin si $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha\beta \neq 0$, il existe une base symplectique de $E_{\pm\lambda} \oplus E_{\pm\bar{\lambda}}$ dans laquelle la restriction de *A* est donnée par le bloc suivant, dit *foyer*-*foyer*⁽¹⁰⁾. On dit également « hyperbolique complexe » ou « loxodromique ».

$$egin{pmatrix} lpha & eta & 0 & 0 \ -eta & lpha & 0 & 0 \ 0 & 0 & -lpha & eta \ 0 & 0 & -eta & -lpha \ \end{pmatrix}.$$

Les matrices qui commutent avec *A* laissent stable cette décomposition par blocs, ce qui implique la classification suivante des sous-algèbres de Cartan réelles de Q(2n):

Théorème 3.3.8 (Williamson) Soit \mathfrak{c} une sous-algèbre de Cartan réelle de $\mathcal{Q}(2n)$. Il existe des coordonnées symplectiques linéaires $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sur \mathbb{R}^{2n} , et une base q_1, \ldots, q_n de \mathfrak{c} telle que chaque q_i ait l'une des trois formes suivantes :

- $q_i = x_i \xi_i$ (singularité hyperbolique)
- $-q_i = \frac{1}{2}(x_i^2 + \xi_i^2)$ (singularité elliptique)
- $-q_i = x_i\xi_i + x_{i+1}\xi_{i+1}$, auquel cas on demande que $q_{i+1} = x_i\xi_{i+1} x_{i+1}\xi_i$ (singularité foyer-foyer).

Suivant Eliasson [61], on appellera (q_1, \ldots, q_n) une *base standard* de c; on dira que c est de *type* (m_e, m_h, m_f) , avec $m_e + m_h + 2m_f = n$, si une base standard contient m_e éléments de type elliptique, m_h éléments hyperboliques, et m_l paires de type foyer-foyer.

Remarque 3.3.9 La condition (3.15) est nécessaire ; par exemple, pour $\mathfrak{a} = \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, la sous-algèbre engendrée par $q = \zeta^2$ est commutative

^{(10).} En anglais on utilise la terminologie « latine » focus-focus.

maximale, mais ne relève pas de la classification ci-dessus. En effet, $ad_q = 2\xi \frac{\partial}{\partial x}$ est nilpotente donc pas semi-simple.

Remarque 3.3.10 On peut caractériser la notion de singularité non dégénérée pour un système intégrable sans mention explicite de la forme symplectique : voir [13]. En conséquence, si deux applications moment complètement intégrables sont conjuguées par un difféomorphisme, alors un point fixe qui est non dégénéré pour l'un des systèmes est nécessairement également non dégénéré pour l'autre. \triangle

Remarque 3.3.11 Les trois types de singularité ont été rencontrés dans les exemples du chapitre 2. L'oscillateur harmonique n'a que des singularités de type elliptique; le potentiel à double puits possède deux points fixes elliptiques et un point fixe hyperbolique; enfin, le pendule sphérique possède un point fixe dont les deux blocs sont elliptiques, une famille de points critiques de rang 1 de type transversalement elliptique, et un point fixe de type foyer-foyer. \triangle

Notons que sur \mathbb{C} la classification de Williamson est triviale puisque tout se ramène au cas "hyperbolique" $x\xi$. Le cas analytique du théorème d'Eliasson avait été démontré par Rüßmann [123] pour deux degrés de liberté et par Vey [140] en dimension quelconque. Dans la catégorie C^{∞} , le *lemme de Morse isochore* de Colin de Verdière et Vey [37] fournit le résultat d'Eliasson pour les systèmes à un degré de liberté. Récemment, une nouvelle preuve du théorème d'Eliasson a été donnée par Miranda [110].

La relation de forte équivalence dans le cas non dégénéré est égale à l'équivalence faible et est bien comprise. En particulier en présence de blocs hyperboliques "réels" elle n'implique pas l'équivalence fonctionnelle (c'est-à-dire " $\chi^* \mathbf{f} = \varphi \circ \mathbf{f_0}$ "), alors que c'est bien le cas sinon :

Lemme 3.3.12 Soit *m* un point critique non dégénéré pour **f**. Alors, au voisinage *de m*,

- 1. L'ensemble des éléments de C_f qui s'annulent en m est égal à C_f · (f f(m))
- 2. $C_{\mathbf{f}} = \{ \varphi \circ \mathbf{f}, \varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n, \mathbf{f}(m)) \}$ si et seulement si \mathbf{f} ne contient pas de bloc hyperbolique réel.

Démonstration. On montre comme préalable que tout élément de $g \in C_f$ s'écrit $\varphi_{\alpha}(f_1, \ldots, f_n)$ sur chaque octant de points réguliers (c'est une conséquence de Darboux-Carathéodory : cf le lemme 3.2.4). Le fait que g soit C^{∞} implique la platitude des $g_{\alpha} - g_{\alpha'}$ sur l'image des points communs pour les frontières des octants en question. La formule de Taylor avec reste intégral répond alors à la première affirmation. Pour la deuxième, on remarque que la présence d'un bloc hyperbolique réel implique la non-connexité locale des fibres de la fibration f près de m et la possibilité d'obtenir une fonction $g \in C^{\infty}$ au moyen de fonctions φ_{α} et $\varphi_{\alpha'}$ différentes. Au contraire l'absence de bloc hyperbolique rend nécessaire l'égalité des tous les φ_{α} . On pourra consulter [148] ou [61] pour davantage de détails.

Corollaire 3.3.13 Si \mathbf{f} et \mathbf{g} sont deux systèmes complètement intégrables admettant une singularité non dégénérée en un point m, alors \mathbf{f} et \mathbf{g} sont faiblement équivalents près de m si et seulement si ils sont fortement équivalents en m.

Démonstration. Par réduction symplectique locale, on peut supposer que *m* est un point fixe (un point critique de corang maximal). Supposons $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$. Le premier point du lemme 3.3.12 assure l'existence d'une matrice *N* de taille $n \times n$ à coefficients dans $C_{\mathbf{f}}$ telle que $\mathbf{g} - \mathbf{g}(m) = N \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{f}(m))$. Le fait que *m* soit un point fixe implique que les hessiennes vérifient $\mathbf{g}''(m) = N(m) \cdot \mathbf{f}''(m)$. Puisque le rang de ces espaces de hessiennes est *n*, *N*(*m*) doit être également de rang *n*. Donc $\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$.

Théorème 3.3.14 Si m est un point critique non dégénéré pour \mathbf{f} , alors il existe un voisinage \mathcal{U} de m sur lequel $H^1(\mathbf{f}) = 0$ (pour l'équivalence faible ou forte).

Ce théorème, qui est en réalité utilisé dans la preuve d'Eliasson⁽¹¹⁾, indique la stabilité de la forme normale et son aptitude à fournir une version semiclassique. Une preuve détaillée de ce théorème se trouve dans l'article [111]. Conceptuellement assez simple, elle est grandement compliquée par la gestion des fonctions C^{∞} plates.

Singularités non dégénérées semi-classiques

Il existe un analogue semi-classique du théorème d'Eliasson, qui est particulièrement utile pour l'étude des conditions de Bohr-Sommerfeld singulières comme dans [147] ou pour le calcul par Zelditch et Toth des normes des fonctions propres [138]. L'énoncé mime le cas classique, jusque dans la définition de l'équivalence, à une subtilité près : l'apparition de séries formelles en \hbar d'invariants microlocaux. Une version très semblable a été énoncée par Toth [136].

Des versions quantiques de la classification de Williamson ont été également utilisées par Lychagin pour étudier certaines équations aux dérivées partielles non linéaires, avec des méthodes pas si éloignées de celles de ce livre, d'ailleurs [101].

Théorème 3.3.15 ([148]) Si m est non dégénéré, il existe un opérateur intégral de Fourier U défini près de m et microlocalement unitaire et des séries formelles

^{(11).} La preuve d'Eliasson est malheureusement incomplète sur ce point-là.

 $\lambda_i(\hbar) \in \mathbb{C}[[\hbar]], j = 1, \dots, r \text{ tels que}$

$$U\begin{pmatrix}P_{1}\\\vdots\\P_{n}\end{pmatrix}U^{-1}\sim_{s}\begin{pmatrix}\zeta_{1}\\\vdots\\\hat{\zeta}_{n-r}\\\hat{q}_{1}-\hbar\lambda_{1}(\hbar)\\\vdots\\\hat{q}_{r}-\hbar\lambda_{r}(\hbar)\end{pmatrix}$$

agissant sur $\mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$, microlocalement près de l'origine.

On a utilisé le chapeau dans cet énoncé pour désigner la quantification de Weyl standard (par exemple $\hat{\xi}_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\widehat{x\xi} = \frac{\hbar}{i} (x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2})$).

Démonstration. On utilise le fait que le symbole principal σ : $\hat{C}_{\mathbf{Q}} \rightarrow C_{\mathbf{q}}$ est surjectif lorsque les q_j sont quadratiques et que $\mathbf{Q} = \langle \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n \rangle$ est obtenu par quantification de Weyl (c'est une des bonnes propriétés de la quantification de Weyl!)

Cependant, si on applique simplement le théorème 3.3.3 en utilisant cette surjectivité avec le fait que $H^1(\mathbf{p}) = 0$ (théorème 3.3.14), on n'obtient pas les invariants $\lambda(\hbar)$ au bon endroit...Mais un argument de type fonctions implicites associé au lemme 3.3.12 permet de faire passer ces constantes de l'autre côté.

Solutions microlocales

Le théorème ci-dessus est bien adapté à la résolution microlocale du système $P_j u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$, car ce dernier se voit remplacé par un système du type $(\hat{q}_j - \hbar \alpha_j(\hbar))u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$, qui se résout explicitement. Puisque le système modèle est découplé, il suffit d'étudier séparément chaque bloc, et on montrera ci-dessous les faits suivants : pour un bloc elliptique, l'espace des solutions microlocales (au sens de la proposition 3.2.12) est de dimension au plus 1; pour un bloc hyperbolique réel, il est de dimension 2 [35]; pour un bloc foyer-foyer, il est de dimension au plus 1 [147].

Cas elliptique — Supposons donc que n = 1 et $p = p_1$ admet une singularité elliptique en un point *m* (autrement dit, un extremum non dégénéré). On peut penser, par exemple, à un fond de puits de potentiel. Le théorème 3.3.15 fournit une série formelle $\lambda(\hbar)$ et un opérateur intégral de Fourier *U* tels que, microlocalement près de $0 \in \mathbb{R}^2$,

$$U(P-p(m))U^{-1} = \hat{N}(\hat{q} - \hbar\lambda(\hbar)), \qquad \hat{q} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x^2/2,$$

pour un opérateur pseudo-différentiel \hat{N} elliptique en 0.

3.3. POINTS SINGULIERS

Théorème 3.3.16 L'équation $Pu_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ admet une solution microlocale non triviale près de m si et seulement si

$$\lambda(\hbar) \in (\mathbb{N} + \frac{1}{2}) + O(\hbar^{\infty}). \tag{3.16}$$

Dans ce cas, l'espace des solutions microlocales de l'équation $Pu_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ est un \mathbb{C}_{\hbar} -module libre de rang 1.

Précisément, si on note $k = k(\hbar) \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(\hbar) = k + \frac{1}{2} + O(\hbar^{\infty})$, alors les solutions microlocales de $Pu_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ sont engendrées par $U^{-1}\varphi_k$, où φ_k est la *k*-ième fonction propre de l'oscillateur harmonique $\hat{q} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x^2/2$. **Démonstration.** Grâce au théorème 3.3.15, le problème se réduit à l'étude des solutions microlocales de l'équation

$$(\hat{q} - \hbar\lambda(\hbar))u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty}). \tag{3.17}$$

La suffisance de (3.16) est claire, puisque si on note $k = k(\hbar) \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(\hbar) = k + \frac{1}{2} + O(\hbar^{\infty})$ alors la *k*-ième fonction propre φ_k de \hat{q} constitue bien une famille admissible solution (et donc solution microlocale) de (3.17).

Supposons maintenant que u_{\hbar} soit une solution microlocale de (3.17). La surface de niveau q = 0 étant réduite à un point, on peut appliquer le lemme 1.2.7 pour étendre u_{\hbar} en une vraie solution dans $L^2(\mathbb{R})$ de $(\hat{q} - \hbar\lambda(\hbar))u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$. Autrement dit, u_{\hbar} est un quasi-mode pour l'oscillateur harmonique \hat{q} , ce qui implique que dist $(\hbar\lambda(\hbar), \Sigma(\hat{q})) = O(\hbar^{\infty})$, où $\Sigma(\hbar)$ désigne le spectre de \hat{q} . Ce qui démontre la nécessité de (3.16), puisqu'on sait bien que $\Sigma(\hat{q}) = \{\hbar(k + \frac{1}{2}); k \in \mathbb{N}\}$. Il reste à comparer ce u_{\hbar} avec la fonction propre φ_k . Plutôt que d'utiliser les formules explicites des fonctions d'Hermite, il suffit de mettre à profit la théorie spectrale de \hat{q} (méthode de Feshbach-Grushin). Soit $k = k(\hbar) \in \mathbb{N}$ comme plus haut, soit $(\varphi_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de fonctions propres associées aux valeurs propres $\hbar(\ell + \frac{1}{2})$ et soit $\mathcal{E}_k : L^2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C} \to L^2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}$ l'opérateur défini par la matrice

$$\mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} \hat{q} - \hbar(k + \frac{1}{2}) & P_{k,+} \\ P_{k,-} & 0 \end{pmatrix}$$

où $P_{k,+}(y) = y\varphi_k (y \in \mathbb{C})$ et $P_{k,-}(v) = \langle v, \varphi_k \rangle$.

Dans la base $((0,1), (\varphi_k, 0), (\varphi_\ell, 0)_{\ell \in \mathbb{N} \setminus \{k\}})$ de $L^2 \otimes \mathbb{C}$ on a

$$\mathcal{E}_k = egin{pmatrix} 0 & 1 \ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \ 0 & \left(\mathrm{diag}(\hbar(\ell-k); \ell \in \mathbb{N} \setminus \{k\})
ight) \end{pmatrix}$$

 \mathcal{E}_k est donc toujours inversible, d'inverse borné par \hbar^{-1} . Soit $v_{\hbar} := u_{\hbar} - \langle u_{\hbar}, \varphi_k \rangle \varphi_k$. On a

$$\mathcal{E}_k(v_{\hbar}, 0) = ((\hat{q} - \hbar k)v_{\hbar}, \langle v_{\hbar}, \varphi_k \rangle) = O(\hbar^{\infty}).$$

En appliquant \mathcal{E}_k^{-1} on déduit $v_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$. A fortiori $u_{\hbar} = \langle u_{\hbar}, \varphi_k \rangle \varphi_k$ microlocalement près de 0.

Comme on le verra plus tard, ce théorème peut s'interpréter comme un cas limite des règles de Bohr-Sommerfeld.

Cas hyperbolique — Supposons ici que n = 1 et $p = p_1$ admet une singularité hyperbolique en un point *m* (autrement dit, un point selle). Cette fois, on peut prendre comme exemple le sommet d'une barrière de potentiel.

Le résultat suivant a été établi dans l'article [34].

Théorème 3.3.17 L'espace des solutions microlocales de l'équation $Pu_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ est un \mathbb{C}_{\hbar} -module libre de rang 2.

Je voudrais insister sur le fait qu'ici, contrairement au cas elliptique plus haut, et au cas foyer-foyer plus bas, il n'y a aucune « condition de quantification » nécessaire à l'existence de solution microlocale. C'est dû au fait que les surfaces d'énergie p = const près de m ne possèdent pas de trajectoires fermées — autres que le point fixe m lui même.

Démonstration. Le théorème 3.3.15 fournit une série formelle $\lambda(\hbar)$ et un opérateur intégral de Fourier *U* tels que, microlocalement près de $0 \in \mathbb{R}^2$,

$$U(P-p(m))U^{-1} = \hat{N}(\hat{q} - \hbar\lambda(\hbar)), \qquad \hat{q} = \frac{\hbar}{i}(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}),$$

pour un opérateur pseudo-différentiel \hat{N} elliptique en 0. L'étude microlocale de \hat{q} est plus compliquée que le cas elliptique, car la variété caractéristique q = 0 est l'union des deux axes de coordonnées x, ξ et donc ne satisfait pas les hypothèses du lemme 1.2.7. Le résultat est malgré tout encore valable. Je donne juste les idées principales. Pour étendre une solution microlocale u_{\hbar} dans la direction des ξ , on utilise la transformée de Fourier \mathcal{F}_{\hbar} (qu'on peut voir comme un opérateur intégral de Fourier associé à la rotation de $\pi/2$) qui transforme le problème en celui d'une extension de solution en variable x. Mais puisque \hat{q} est un opérateur différentiel, son conjugué par Fourier est encore différentiel, et donc préserve le support. On peut donc aisément étendre u_{\hbar} en recollant une solution microlocale sans front d'onde dans une bande verticale au-dessus d'un voisinage de x = 0 : c'est donc une solution exacte modulo $O(\hbar^{\infty})$, d'après le lemme 1.2.4.

Les solutions exactes de $(\hat{q} - \hbar\lambda(\hbar))v_{\hbar} = 0$ sont engendrées par les deux fonctions

$$Y^{\pm} = \mathbf{1}_{\{\pm x > 0\}} \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{i\lambda(\hbar)\ln x}$$

Si u_{\hbar} est une solution de $(\hat{q} - \hbar\lambda(\hbar))u_{\hbar} = r_{\hbar}$, où r_{\hbar} est $O(\hbar^{\infty})$, on peut par variation de la constante montrer que dans chaque région x > 0, x < 0, u_{\hbar}

est multiple de la solution exacte correspondante, modulo $O(\hbar^{\infty})$. Il reste à vérifier qu'il n'existe pas de solution admissible à support réduit à x = 0. On a donc bien, microlocalement près de l'origine,

$$u_{\hbar} = C_1 Y^- + C_2 Y^+ + O(\hbar^{\infty})$$

pour des constantes admissibles C_1 et C_2 .

Cas foyer-foyer — Supposons enfin que n = 2 et que $p = (p_1, p_2)$ possède une singularité foyer-foyer en un point *m*. C'est précisément le cas du pôle nord de la sphère pour le pendule sphèrique (section 2.3).

Le théorème 3.3.15 fournit deux séries formelles $\lambda_1(\hbar), \lambda_2(\hbar)$ et un opérateur intégral de Fourier *U* tels que, microlocalement près de $0 \in \mathbb{R}^2$,

$$U\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}U^{-1} = \hat{N}\begin{pmatrix}\hat{q}_1 - \hbar\lambda_1(\hbar)\\\hat{q}_2 - \hbar\lambda_2(\hbar)\end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \hat{q}_1 = \frac{\hbar}{i}(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})\\ \hat{q}_2 = \frac{\hbar}{i}(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) \end{cases}$$

pour une matrice 2 × 2 d'opérateurs pseudo-différentiels \hat{N} , elliptique en 0. Le résultat suivant a été établi dans l'article [147].

Théorème 3.3.18 Le système $P_j u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$, j = 1, 2 admet une solution microlocale non triviale près de m si et seulement si

$$\lambda_2(\hbar) \in \mathbb{Z} + O(\hbar^{\infty}). \tag{3.18}$$

Dans ce cas, l'espace des solutions microlocales du système $P_j u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ est un \mathbb{C}_{\hbar} -module libre de rang 1.

La démonstration faite dans [147], que je ne reprends pas ici, repose sur la forme explicite des solutions du système

$$\begin{aligned} (\hat{q}_1 - \hbar\lambda_1(\hbar))u_\hbar &= 0\\ (\hat{q}_2 - \hbar\lambda_2(\hbar))u_\hbar &= 0 \end{aligned}$$

qui, en coordonnées polaires associées aux variables (x, y), sont de la forme

$$u_{\hbar} = \frac{1}{r} e^{i\lambda_1(\hbar)\ln r} e^{i\lambda_2(\hbar)\theta}$$

On comprend la nécessité de la « condition de quantification » (3.18). L'unicité de la solution microlocale peut se montrer avec des arguments similaires à la preuve du cas hyperbolique.

Vers l'analyse spectrale : versions à paramètres

Plus loin dans ce livre, on s'intéressera de près à l'analyse spectrale des singularités non dégénérées. On aura ainsi à résoudre des équations du type $(P_j - E_j)u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$. Les résultats que je viens d'énoncer sur les espaces de solutions microlocales s'adaptent parfaitement à l'étude d'une fenêtre spectrale de taille $O(\hbar)$. En effet au vu du théorème 3.3.3 et de sa preuve on voit que le théorème 3.3.15 est valable avec un paramètre : pour tout $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ il existe des séries formelles $\lambda_j(\epsilon, \hbar) = \sum \lambda_j^{(k)}(\epsilon)\hbar^k$ et un opérateur intégral de Fourier $U = U(\epsilon)$ elliptique en *m*, le tout dépendant de façon C^{∞} de ϵ , tels que

$$U\begin{pmatrix}P_{1}-\hbar\epsilon_{1}\\\vdots\\P_{n}-\hbar\epsilon_{n}\end{pmatrix}U^{-1}\sim_{s}\begin{pmatrix}\hat{\zeta}_{1}\\\vdots\\\hat{\zeta}_{n-r}\\\hat{q}_{1}-\hbar\lambda_{1}(\epsilon,\hbar)\\\vdots\\\hat{q}_{r}-\hbar\lambda_{r}(\epsilon,\hbar)\end{pmatrix}$$

Les équations spectrales avec $E = \hbar \epsilon$ sont donc transformées en le système $(\hat{q}_j - \lambda_j(\epsilon, \hbar))u_\hbar = O(\hbar^{\infty}).$

En réalité, on peut faire beaucoup mieux : on peut traiter une fenêtre spectrale de taille $\mathcal{O}(1)$. Les théorèmes 3.3.16, 3.3.17 et 3.3.18 sont tous les trois valables avec un paramètre spectral *E* d'ordre $\mathcal{O}(1)$, quitte bien entendu à remplacer les invariants d'ordre $\mathcal{O}(\hbar) : \hbar \lambda_j(\hbar)$ par des séries d'ordre $\mathcal{O}(1) : \tilde{\lambda}_j(\hbar)$. Le point de départ est que le théorème d'Eliasson reste valable avec paramètres. Mais la formulation de l'équivalence forte doit être modifiée : on ne veut pas $U(\mathbf{P} - \mathbf{p}(m))U^{-1} = \hat{N}(\mathbf{Q} - \hbar\lambda(\hbar))$, mais plutôt

$$U\mathbf{P}U^{-1} = \hat{N}(\mathbf{Q} - \tilde{\lambda}(\hbar)). \tag{3.19}$$

Or il se trouve que la présence de singularités hyperboliques pose problème dans la catégorie C^{∞} (voir [38] pour davantage de précisions). En particulier le théorème 3.3.15 avec cette formulation n'est en général pas valable si *P* dépend d'un paramètre. Il l'est lorsqu'on peut écrire le théorème d'Eliasson sous la forme $\mathbf{p} \circ \chi = \varphi(\mathbf{q})$, ce qui est vérifié en l'absence de bloc hyperbolique (lemme 3.3.12) ou alors pour un bloc hyperbolique simple lorsque n = 1 (lemme de Morse isochore [37]).

Pour voir d'où vient le problème il suffit de regarder la limite classique de (3.19), lorsque $P = P^E$ dépend d'un paramètre *E* :

$$\mathbf{p}^{\mathbf{E}} \circ \chi^{E} = N^{E}(\mathbf{q} - \tilde{\lambda}_{0}^{E}).$$

Là où \mathbf{p}^{E} s'annule, *q* doit donc avoir une unique valeur $\tilde{\lambda}_{0}^{E}$; on sait que cela peut être faux en présence de deux blocs hyperboliques (voir [111]).

Chapitre 4

Théorie Semi-globale

Émile LITTRÉ, Dictionnaire de la langue française

Dans l'optique de la compréhension de la géométrie classique d'une fibration complètement intégrable ou de son analyse microlocale, c'est probablement l'aspect *semi-global* le plus fondamental. On qualifiera de semiglobal tout ce qui concerne un voisinage invariant par la dynamique d'une feuille du feuilletage ⁽¹⁾. (Certains auteurs parlent également de "semi-local".) C'est l'étude semi-globale qui par exemple permet de construire des quasimodes associés à une sous-variété lagrangienne. Remarquons que le semiglobal peut être simplement du local, lorsque la feuille considérée est un point critique de type totalement elliptique.

4.1 Fibres régulières

L'analyse des voisinages des fibres régulières, basée sur le théorème de Liouville-Arnold-Mineur (ou théorème des variables actions-angles), est maintenant bien maîtrisée et abondamment illustrée dans la littérature, aussi bien classique que quantique. Elle est à la base de toute la théorie moderne des systèmes complètement intégrables (dans la lignée de l'article de Duistermaat [52]), mais aussi des théorèmes de perturbations de type KAM. L'aspect semi-classique des tores de Liouville et de leurs perturbations a été analysé en détail par Lazutkin [94]. L'analyse microlocale des variables actions-angles débute avec les travaux de Colin de Verdière [31], suivi dans la théorie pseudo-différentielle semi-classique proprement dite par Charbonnel [22], et plus récemment par moi-même et divers travaux de Zelditch, Toth, Popov, Sjöstrand, et bien d'autres. L'analyse de tels systèmes sur des

^{(1).} En français correct l'ensemble des feuilles d'un arbre est bien sûr le *feuillage*.

variétés compactes a également été abordée, au moyen des opérateurs de Toeplitz [23].

Les coordonnées actions-angles

On se donne donc un système (f_1, \ldots, f_n) dont l'application moment F est *propre*. Soit c une valeur régulière de F. Quitte à se restreindre à un ouvert invariant, on pourra toujours supposer que les fibres de F sont connexes. On note $\Lambda_c = F^{-1}(c)$. Les fibres étant compactes et orbites d'une action libre de \mathbb{R}^n (au moyen des champs de vecteurs \mathcal{X}_{f_i}), ce sont des tores. Les fonctions invariantes par le flot sont les fonctions constantes sur chaque fibre ; en d'autres termes la restriction de C_f à chaque fibre est isomorphe à \mathbb{R}^n ; or $H^1(\Lambda_c, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. Il n'est pas difficile d'en conclure qu'au voisinage de Λ_c , $H^1(\mathbf{f}) = 0$, pour l'équivalence faible. On s'attend donc à une forme normale stable, qui bien sûr n'est autre que le théorème des coordonnées actions-angles, ou théorème de Liouville-Arnold-Mineur :

Théorème 4.1.1 (Liouville-Arnold-Mineur) Si Λ_c est régulière, il existe un symplectomorphisme χ d'un voisinage de la section nulle $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ de $T^*\mathbb{T}^n$ dans M, envoyant $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ sur Λ_c , tel que, au voisinage de la section nulle,

 $\chi^* \mathbf{f} \sim \mathbf{f_0}$,

où \mathbf{f}_0 est le système linéaire (ξ_1, \ldots, ξ_n) sur $T^* \mathbb{T}^n$.

Dans cet énoncé, et tous les suivants de ce livre, on note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et on identifie $T^*\mathbb{T}^n$ avec $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, muni des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ telles que la 1-forme canonique de Liouville s'écrit $\sum_i \xi_i dx_i$.

Pour une discussion sur la preuve de ce théorème, je renvoie le lecteur à l'introduction, page <u>6</u>.

L'équivalence faible utilisée signifie que, sur tout un voisinage de la section nulle { $\xi = 0$ }, les composantes de $\chi^*F = F \circ \chi$ commutent avec tous les ξ_j . On voit donc que le théorème implique en réalité que ces composantes sont indépendantes des variables « angles » x; autrement dit, $\chi^*\mathbf{f} = \varphi(\mathbf{f_0})$ pour φ un difféomorphisme local de \mathbb{R}^n ; c'est en général sous cette forme que le théorème est énoncé. Il est important de remarquer que $d\varphi$ est un *invariant* du système puisqu'il est déterminé par les *périodes* du système initial. Dans ce contexte on appelle *période* d'un tore Λ_c d'un système complètement intégrable (f_1, \ldots, f_n) un n-uplet (τ_1, \ldots, τ_n) $\in \mathbb{R}^n$ tel que le champ de vecteurs

$$\sum_i \tau_i \mathcal{X}_{f_i}$$

admette sur Λ_c un flot périodique de période primitive 1. Et en effet, puisque les trajectoires périodiques du système linéaire (ξ_1, \ldots, ξ_n) sont engendrées par les flots des fonctions ξ_i , le théorème implique que celles du système initial sont engendrées par les flots des fonctions $(\varphi^{-1})_i(\mathbf{f})$, où $(\varphi^{-1})_i$ désigne

la *i*ème composante de (φ^{-1}). On en déduit que l'ensemble des périodes de Λ_c est le réseau, isomorphe à \mathbb{Z}^n , engendré par la \mathbb{Z} -base

$$\{\left(\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(c)}{\partial c_1},\ldots,\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(c)}{\partial c_n}\right),\ i=1,\ldots,n\}.$$
(4.1)

On constate sur cette formule que l'ensemble des périodes forme, lorsque *c* varie dans l'image des valeurs régulières de *F*, un sous fibré lisse (et plat) de $T^*\mathbb{R}^n$ dont les sections sont localement des *différentielles de fonctions lisses*. En d'autres termes ce fibré est *lagrangien*, pour la structure symplectique canonique de $T^*\mathbb{R}^n$. D'ailleurs ce dernier énoncé est essentiellement équivalent au théorème de Liouville-Arnold-Mineur (cf. [52]). Comme on le verra plus tard, en général ce fibré n'est pas globalement trivial, ce qui donne lieu à une théorie des invariants très intéressante.

Vues comme fonctions sur M les ξ_i sont appelées les *actions* du système, car on peut trouver une primitive α de ω au voisinage de Λ_c telle que les ξ_i soient les intégrales de α sur une base de cycles de Λ_c dépendant régulièrement de c. En coordonnées (x, ξ) — appelées par conséquent "angles" et "actions"), on ne dit rien de plus que $\xi_i = \int_{x_i} \xi_i dx_i$... ce qui prouve la formule dite « de Mineur » :

Proposition 4.1.2 ([108]) Si α est une primitive de ω au voisinage d'un tore régulier Λ_c , et si γ_c est un cycle sur Λ_c dépendant de façon C^{∞} de c, alors l'intégrale d'action

$$\int_{\gamma_c} \alpha$$

(vue comme fonction sur M) est un Hamiltonien préservant le feuilletage et dont le flot est périodique de période 1.

Dans l'optique semi-classique, il est nécessaire de disposer d'une version "exacte" du théorème de Liouville-Arnold-Mineur dans le sens où, une primitive α de ω étant fixée, un symplectomorphisme est dit exact lorsqu'il conserve les intégrales de α le long de chemins fermés (intégrales d'action). On obtient immédiatement

Théorème 4.1.3 Si Λ_c est régulière, il existe un symplectomorphisme exact χ de $T^*\mathbb{T}^n$ dans M envoyant la section $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (a_1, \ldots, a_n) = \text{const sur } \Lambda_c$ tel que

$$\chi^* \mathbf{f} \sim \mathbf{f_0}$$

si et seulement si $a_i = \int_{\gamma_i} \alpha$, où γ_i est le cycle sur Λ_c correspondant via χ au i-ème cycle canonique de \mathbb{T}^n .

Là encore, le résultat signifie qu'il existe un difféomorphisme local φ de (\mathbb{R}^n, a) dans (\mathbb{R}^n, c) tel que $\chi^* \mathbf{f} = \varphi \circ \mathbf{f}_0$.

La structure affine de la base — Restreinte aux fibres régulières, *F* devient un fibration, dans le sens habituel du terme. On appellera souvent son image la « base » de la fibration. D'un point de vue géométrique, la conséquence la plus fondamentale du théorème des variables actions-angles est l'existence d'une structure affine entière sur la base.

Le groupe affine (transformations linéaires et translations) est le produit semi-direct naturel $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Il est noté $GA(n, \mathbb{R})$. On notera également $GA(n, \mathbb{Z}) = GL(n, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ le groupe affine *entier*.

Définition 4.1.4 Une structure affine entière sur une variété différentiable B est la donnée d'un atlas $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ dont les cartes $\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \to \mathbb{R}^n$ vérifient $\varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\beta}^{-1} \in GA(n, \mathbb{Z})$.

Une autre façon de se représenter une structure affine entière est de se donner, dans chaque espace tangent $T_x B$, un *réseau* de rang n, dépendant de façon C^{∞} de x. Lorsqu'on dispose de l'atlas φ_{α} , on choisira ce réseau comme l'image réciproque par $d\varphi_{\alpha}(x)$ de $2\pi\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Proposition 4.1.5 Soit $\mathbf{f} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ un système complètement intégrable classique. L'espace \mathcal{O}_r des feuilles régulières du feuilletage lagrangien est muni d'une structure affine entière unique dont les cartes sont les variables actions.

Démonstration. En un point régulier x_{α} , on applique le théorème des variables actions-angles, qui fournit *n* fonctions « actions » ξ_1, \ldots, ξ_n telles que l'application $\varphi_{\alpha} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est une carte locale de \mathcal{O}_r près de x_{α} . Puisque les flots des ξ_j sont périodiques de période 1, tout autre ensemble de variables actions devra être de la forme $(\xi) = A \cdot (\xi)$, où $A \in GA(n, \mathbb{Z})$.

Si l'on préfère voir la structure affine entière comme un sous-réseau de $T\mathcal{O}_r$, on peut faire la construction suivante : un élément $\beta \in T^*\mathcal{O}_r$ se relève en un 1-covecteur $\pi^*\beta \in T^*M$ (où π est la projection $M \to \mathcal{O}_r$ induite par f) et donc, par dualité symplectique, en un vecteur X_β qui est tangent au feuilletage. Par son flot au temps 1, on définit ainsi une action de $T^*\mathcal{O}_r$ sur M, qui préserve le feuilletage. Le réseau cherché est le dual du stabilisateur de cette action. Ce n'est qu'une façon d'exprimer (4.1) de façon intrinsèque : le stabilisateur de l'action de $T^*\mathcal{O}_r$ est simplement le réseau des périodes défini plus haut.

On reparlera au chapitre suivant de cette structure affine, qui est le premier exemple d'un objet global obtenu par une étude semi-globale.

Remarque 4.1.6 Poussée par l'application moment $F = (f_1, ..., f_n)$ (là où elle est une submersion), la structure affine entière de \mathcal{O}_r se transporte bien entendu sur l'image dans \mathbb{R}^n des valeurs régulières de F. Même si, d'un point de vue géométrique, cette nouvelle structure semble moins intrinsèque, elle est très importante du point de vue de la mécanique (classique ou quantique) dans la mesure où elle vit sur l'ensemble des valeurs accessibles des « observables » du système. \triangle

Remarque 4.1.7 Il ne faut pas confondre cette structure affine avec la structure affine dite « de Weinstein » (cf. [154]) que possède toute feuille d'un feuilletage lagrangien et qui, dans notre cas, est simplement donnée par la structure abélienne de l'action des flots des f_i (en coordonnées actionsangles c'est la structure affine des *angles*).

Supposons maintenant qu'on puisse se fixer une primitive α de la forme symplectique ω . On peut alors imposer aux « variables d'actions » d'être toutes de la forme $\int_{\delta} \alpha$, où $\delta = \delta(c)$ est un cycle sur la feuille lagrangienne Λ_c . Dans ce cas les variables d'actions sont définies non pas modulo $GA(n, \mathbb{Z})$, mais $GL(n, \mathbb{Z})$. (Et la donnée des variables d'action équivaut alors à celle de la base de cycles sur Λ_c , c'est-à-dire à une trivialisation locale du fibré en homologie $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \rightarrow c$, ou encore du fibré des périodes défini en (4.1), page 89). Par cette réduction de groupe de structure, on obtient une nouvelle structure affine entière qu'on appellera *exacte*. Il est alors possible de parler des *points entiers* de \mathcal{O}_r , qui sont les tores pour lesquels les variables d'actions prennent leurs valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. Comme on peut s'y attendre de la part d'une structure reposant sur de la géométrie symplectique « exacte », ces points entiers auront une pertinence particulière dans la limite semi-classique.

Oscillateurs harmoniques — Après le modèle linéaire lui-même (les ξ_i sur $T^*\mathbb{T}^n$), le système intégrable le plus simple est sûrement le système d'oscillateurs harmoniques $\mathbf{q} = \langle q_1, \ldots, q_n \rangle$ avec $q_i = \frac{1}{2}(x_i^2 + \xi_i^2)$ sur \mathbb{R}^{2n} . Après avoir été présenté au chapitre 1 (section 2.1), il s'est invité à nouveau au chapitre 3, en tant que système modèle des singularités elliptiques. Le feuilletage régulier est contenu dans \mathbb{R}^{2n} privé de tous les espaces $x_i = \xi_i = 0$. L'espace des feuilles régulières s'identifie à l'image du feuilletage régulier par $q = (q_1, \ldots, q_n)$; c'est donc l'« octant » $(\mathbb{R}^*_+)^n$. Chaque q_i étant périodique on dispose d'une base privilégiée de cycles sur chaque tore : ceux donnés par les flots des q_i . On calcule les intégrales d'action correspondantes :

$$I_i = \int_{q=(0,...,0,c_i,0,...,0)} \xi_i dx_i = 2\pi c_i.$$

Autrement dit, comme fonctions sur M, les actions sont les $2\pi q_i$. Je laisse au lecteur le soin de compléter ces « coordonnées polaires symplectiques » en déterminant les variables *angles* (la variable temporelle du flot des actions). Ici le réseau des périodes est trivial : en chaque point de $(\mathbb{R}^*_+)^n$ c'est le réseau $2\pi\mathbb{Z}$. On a vu (théorème 3.3.16) et on verra également plus loin (théorème 4.2.3) que la présence du point singulier de cette structure affine (l'origine) induit un décalage demi-entier du réseau semi-classique.

Semi-classique

Soit $\mathbf{P} = \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$ un système complètement intégrable quantique, dont les symboles principaux forment une application moment propre. On note encore Λ_c les feuilles lagrangiennes. α est la 1-forme canonique de $M = T^*X$ et comme précédemment on note $a = (a_1, \ldots, a_n)$ les intégrales d'action le long de la base de cycles de Λ_c définie par les actions ξ_j choisies.

Théorème 4.1.8 (Action-angle semi-classique [148]) Si Λ_c est régulière il existe des séries formelles $\tilde{\lambda}_j(\hbar) \in \mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ et un opérateur intégral de Fourier U associé à un symplectomorphisme exact de $T^*\mathbb{T}^n$ dans M envoyant la section " $\xi = a$ " sur Λ_c tel que, microlocalement au voisinage de la section " $\xi = a$ " on ait

$$U(P_1, \dots, P_n)U^{-1} \sim_s (\hat{\xi}_1 - \hbar \tilde{\lambda}_1(\hbar), \dots, \hat{\xi}_n - \hbar \tilde{\lambda}_n(\hbar)),$$

où $\hat{\xi}_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, agissant sur $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Explicitement le résultat s'écrit

$$U(P_1-p_1(m),\ldots,P_n-p_n(m))U^{-1}=N\cdot(\hat{\xi}_1-\lambda_1(\hbar),\ldots,\hat{\xi}_n-\lambda_n(\hbar)),$$

où *m* est un point quelconque de Λ_c , *N* est une matrice $n \times n$ microlocalement inversible d'opérateurs pseudo-différentiels et $\lambda_j(\hbar) = a_j + \hbar \tilde{\lambda}_j(\hbar)$. On voit que l'action a_j peut être considérée comme le premier invariant semi-classique. Le deuxième terme est donné par les intégrales de la *forme sous-principale* (cf. la définition (3.11) page 72) et du *cocycle de Maslov* sur la lagrangienne Λ_c (voir le théorème 4.1.11 ci-dessous). On verra plus loin que les $\lambda_j(\hbar)$ peuvent être identifiés à des holonomies du faisceau des solutions microlocales du système **P**.

L'énoncé suivant est une conséquence directe du théorème.

Théorème 4.1.9 (Quasi-modes réguliers de Bohr-Sommerfeld [147]) Si Λ_0 est un tore de Liouville régulier, alors pour \hbar assez petit, il existe une solution microlocale du système $P_j u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$, telle que $WF(u_{\hbar}) = \Lambda_0$, si et seulement si $\lambda_j(\hbar) \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}$. La solution est unique (au sens de la proposition 3.2.12).

Cet énoncé reprend (en la précisant) la forme traditionnelle des conditions de quantifications telles qu'elles sont habituellement utilisées après Einstein, Brillouin et Keller. La formulation suivante, plus géométrique, permet de voir clairement comment le spectre apparaît comme une *quantification de la structure affine exacte de la base*.

Conditions de Bohr-Sommerfeld

 \ll Crois-tu, au fond, qu'il existe vraiment des trajectoires ou orbites d'électrons à l'intérieur de l'atome ? \gg

PAULI, discutant de la théorie de Bohr-Sommerfeld avec HEISENBERG (relaté par HEISENBERG [77]) On déduit du théorème précédent les *conditions de Bohr-Sommerfeld régulières* de la façon suivante. Supposons que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^E$ dépende d'un paramètre $E \in \mathbb{R}^n$ de façon C^{∞} (en réalité, on demande seulement que dans toute carte locale, les coefficients du développement asymptotique du symbole total des P_j^E dépendent de façon C^{∞} de E) de sorte que pour tout m près de $\Lambda_0^E = (p^E)^{-1}(0)$, l'application des symboles principaux

$$(E_1,\ldots,E_n) \to (p_1^E,\ldots,p_n^E)(m) \tag{4.2}$$

soit un difféomorphisme local.

Définition 4.1.10 On appelle spectre conjoint microlocal dans un compact K l'ensemble $\Sigma_{\hbar}(P_1^E, \ldots, P_n^E)$ des familles admissibles $E(\hbar) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient

$$\lim_{\hbar \to 0} E(\hbar) = E \in K$$

et telles que le système

$$P_j^{E(\hbar)}u_{\hbar}=O(\hbar^{\infty}), \qquad j=1,\ldots,n$$

admette une solution microlocale dont le front d'onde est toute la fibre Λ_0^E

Le cas typique est bien sûr $P_j^E = P_j - E_j$. De notre point de vue il est souvent préférable d'oublier la dépendance linéaire en *E*, qui n'est pas invariante par équivalence forte.

On obtient les conditions de Bohr-Sommerfeld régulières à partir du théorème 4.1.9 en remarquant qu'il est encore valable "avec paramètres", puisque la feuille Λ_0^E satisfait aux mêmes hypothèses géométriques pour *E* dans une voisinage de l'origine (ce qui ne serait pas le cas pour une feuille singulière). Elles s'énoncent ainsi :

Théorème 4.1.11 ([147]) Supposons que 0 est une valeur régulière du symbole principal conjoint p^0 . Alors pour \hbar assez petit, le spectre conjoint microlocal dans un petit voisinage de l'origine (de taille indépendante de \hbar) est constitué des E solutions du système

$$\lambda_j^E(\hbar) \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}, \quad j=1,\ldots,n,$$

où les $\lambda_j^E(\hbar)$ admettent un développement asymptotique complet en puissances de \hbar dont les coefficients dépendent de façon C^{∞} de E et dont les premiers termes sont :

$$\lambda_j^E(\hbar) = \int_{\gamma_j^E} \alpha + \hbar \int_{\gamma_j^E} \kappa^E + \hbar \frac{\mu(\gamma^E)\pi}{2} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$
(4.3)

Ici κ^E *est la* 1-*forme sous-principale sur* Λ_0^E *et* μ *le cocycle de Maslov.* $(\gamma_1^E, \ldots, \gamma_n^E)$ *est une base donnée de cycles de* Λ_0^E .

L'utilisation du calcul des intégrales oscillantes pour justifier la règle de Bohr-Sommerfeld (au moins pour les deux premiers coefficients donnés en (4.3)) apparaît à ma connaissance pour la première fois dans [51]. Des énoncés plus précis pour justifier (4.3) ont ensuite été écrits par Colin de Verdière [31] et Charbonnel [21, 22]. Récemment, une preuve de la généralisation de ces règles pour le cas où on ne dispose que d'un nombre réduit d'intégrales premières⁽²⁾ a été donné par Anné et Charbonnel [1]. Examinons maintenant une interprétation géométrique des coefficients $\lambda_j^E(\hbar)$ en termes de formes normales ou de cocycle, qui n'est pas proposé par ces références.

Le cocycle de Bohr-Sommerfeld — Le théorème ci-dessus indique que les premiers termes des $\lambda_j(\hbar)$ sont indépendants de la transformation canonique U choisie au théorème 4.1.8 ; en outre, ils peuvent être obtenus comme intégrales sur des cycles de Λ_0^E d'un cocycle admettant un développement asymptotique en puissances de \hbar . Ces deux points, qui ne sont pas immédiats à remarquer à partir du seul théorème 4.1.8, peuvent se montrer directement d'une façon plus abstraite (mais aussi plus constructive) en introduisant le faisceau des solutions microlocales du système \mathbf{P}^E . Ils vont d'ailleurs rester valables pour tout le développement asymptotique des $\lambda_j(\hbar)$. On procède de la façon suivante.

Si *K* est un compact de T^*X , on a introduit le faisceau des microfonctions sur K. Le système P agit sur ce faisceau; on note Sol le sous-faisceau (en \mathbb{C}_{\hbar} -modules) des solutions microlocales du système, c'est-à-dire le noyau de **P**. Si $\Omega \subset K$ est un ouvert, $u_{\hbar} \in \mathscr{S}ol(\Omega)$ si et seulement si $\mathbf{P}u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ microlocalement sur Ω . Le support de ce faisceau (au sens du microsupport) est inclus dans la lagrangienne $\Lambda_0 := \{\mathbf{p} = 0\}$. La proposition 3.2.12 indique qu'au voisinage des points de Λ_0 qui sont réguliers pour **p**, Sol est simplement un fibré plat de groupe de structure les éléments inversibles de \mathbb{C}_{\hbar} . Il est donc entièrement caractérisé par le cocycle des éléments de transition, qu'on appelle le cocycle multiplicatif de Bohr-Sommerfeld. Si on se donne un bon recouvrement ouvert Ω_{α} d'un compact inclus dans l'ouvert des points réguliers de Λ_0 tel que $\mathscr{Sol}(\Omega_{\alpha})$ soit engendré par une solution appelée 1_{α} , alors le cocycle de Bohr-Sommerfeld est défini par les constantes $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}_{\hbar}$ telles que, sur $\Omega_{\alpha} \cap \Omega_{\beta}$, $1_{\alpha} = c_{\alpha\beta}1_{\beta}$. La classe de cohomologie de Čech de $c_{\alpha\beta}$ est indépendante du choix des solutions microlocales 1_{α} : un autre choix aurait donné un cocycle différant par un cobord du précédent (un cobord étant ici un cocycle de la forme d_{β}/d_{α}). La classe d'isomorphisme du fibré \mathscr{Sol} est déterminée par la classe de cohomologie de $c_{\alpha\beta}$. La théorie des opérateurs intégraux de Fourier montre qu'en choisissant bien les

^{(2).} Ce problème n'est jamais considéré ici. Pour pallier le manque d'intégrales premières, les auteures sont amenées à supposer la périodicité du flot classique, comme dans les fameux articles [156, 54].

solutions 1_{α} , on peut toujours trouver un cocycle $c_{\alpha\beta}$ de la forme $e^{\frac{1}{\hbar}\lambda_{\alpha\beta}(\hbar)}$, où $\lambda_{\alpha\beta}(\hbar)$ est réel (ce qui découle simplement du fait que les P_j sont autoadjoints) et admet un développement asymptotique d'ordre 0 (voir [147]). On appelle $\lambda_{\alpha\beta}(\hbar)$ le cocycle (additif) de Bohr-Sommerfeld. On note $[\lambda(\hbar)]$ sa classe de cohomologie, à valeur dans $\mathbb{R}/2\pi\hbar\mathbb{Z}$.

Proposition 4.1.12 Si Λ_0 est un tore de Liouville régulier, alors les $\lambda_j(\hbar)$ définis par le théorème 4.1.8 sont donnés par l'évaluation de $[\lambda(\hbar)]$ sur les cycles de Λ_0 correspondant aux cycles canoniques de \mathbb{T}^n :

$$\lambda_j(\hbar)\equiv\int_{\gamma_j}[\lambda(\hbar)]\mod 2\pi\hbar\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Par définition de la cohomologie de Čech, pour calculer la valeur du cocycle $[c_{\alpha\beta}]$ sur un cycle (homologue à un cercle), il suffit de choisir un chemin qui représente le cycle, et un recouvrement ouvert Ω_k , $k = 1, ..., \ell$, avec $\Omega_k \cap \Omega_{k+1}$ connexe non vide et $\Omega_1 = \Omega_\ell$, et chaque Ω_k est muni d'un générateur 1_k de $\mathscr{Sol}(\Omega_k)$. La valeur recherchée est alors le produit $c_{1,2}c_{2,3}\cdots c_{\ell-1,\ell}$, où $1_k = c_{k,k+1}1_{k+1}$. Une manière imagée de voir ce calcul est de partir d'une solution sur Ω_1 et de la « propager » jusqu'à $\Omega_{\ell-1}$, ce qui revient à poser $c_{k-1,k} = 1$ pour $k < \ell$. La valeur du produit est alors le dernier coefficient $c_{\ell-1,\ell}$, qui exprime l'évolution de la solution par rapport à sa valeur d'origine.

Quant à la valeur de $[\lambda(\hbar)]$ sur ce cycle, c'est par définition l'argument de ce produit. Dans notre situation, on applique le théorème 4.1.8 et on travaille dans les coordonnées actions-angles semi-classiques. Les solutions microlocales sont de la forme $Ae^{\frac{i}{\hbar}\sum_j \lambda_j(\hbar)x_j}$, $x_j \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Il est maintenant clair que le déphasage d'une solution après un tour le long du *j*ième cycle est précisément $\exp(\frac{i}{\hbar}\lambda_j(\hbar))$.

On a omis dans cette description la dépendance en *E* ; elle ne pose pas de problème : tous les objets (et en particulier le cocycle $\lambda_{\alpha\beta}$) vont dépendre régulièrement de *E*. C'est bien entendu fondamental pour l'analyse spectrale.

La structure affine semi-classique — Soit α la 1-forme canonique de Liouville sur $M = T^*X$. On a vu plus haut comment munir l'espace des tores de Liouville d'une structure affine entière exacte (page 90). Comme on l'a déjà remarqué, cette structure se transporte sur l'espace des valeurs régulières de l'application moment classique. Dans notre situation, où l'intérêt se focalise sur la lagrangienne Λ_0^E , il est plus naturel de la transporter sur l'espace des « énergies » E, grâce à l'hypothèse de transversalité (4.2). Les cartes affines sont donc par définition les actions $E \mapsto (\int_{\gamma_1^E} \alpha, \dots, \int_{\gamma_n^E} \alpha)$.

Naturellement, puisque les $\lambda_j^E(\hbar)$ de l'équation (4.3) déforment les actions classiques, on a très envie de les considérer comme des « cartes affines semi-classiques ». C'est ce qui a été fait dans [146]. L'idée est la suivante. On définit les cartes affines semi-classiques au voisinage de *E* comme étant des symboles classiques d'ordre zéro $\varphi(\hbar; E)$ tels que le spectre conjoint microlocal près de *E* soit donné par les équations $\varphi(\hbar; E) \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}^n$. (Autrement dit on définit la structure par la donnée de ses points $2\pi\hbar$ -entiers; voir la figure 4.1). On montre alors que deux telles cartes $\varphi_1(\hbar)$ et $\varphi_2(\hbar)$ vérifient nécessairement

$$\varphi_1(\hbar) = N \cdot \varphi_2(\hbar) + 2\pi\hbar k, \tag{4.4}$$

où $N \in GL(n,\mathbb{Z})$ et $k \in \mathbb{Z}^n$. Si on regarde cette équation modulo \hbar , on retrouve l'hypothèse qui définit les cartes affines entières exactes, dans la situation classique. On remarque également que dans la situation semi-classique, le bon groupe de structure devient ici $GA_{\mathbb{Z}}(n,\mathbb{Z}) := GL(n,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$, tandis que les bonnes cartes affines sont en réalité $\varphi_i/2\pi\hbar$: en effet, $(\varphi_1(\hbar)/2\pi\hbar) = A(\varphi_2(\hbar)/2\pi\hbar)$, où $A = N + k \in GA_{\mathbb{Z}}(n,\mathbb{Z})$. Le spectre conjoint devient l'ensemble des points entiers de cette structure. Un point très important est que, lorsque \hbar tend vers 0, le spectre conjoint tend vers un réseau linéaire de taille $\mathcal{O}(\hbar)$ sur l'espace tangent à E.



FIGURE 4.1: Le spectre conjoint microlocal et une carte affine semi-classique.

Cas non auto-adjoint — Récemment Melin et Sjöstrand ont réussi à obtenir des règles de type Bohr-Sommerfeld pour des opérateurs *non* autoadjoints en dimension 2 [106]. La condition qu'ils imposent sur le symbole de l'opérateur permet de voir les parties réelles et imaginaires comme un système hamiltonien à deux degrés de liberté presque complètement intégrable. Même si l'équation aux valeurs propres est différente de celle d'un spectre conjoint, les techniques de formes normales diverses s'appliquent encore avec succès, donnant ainsi un regain d'intérêt à l'étude des feuilletages lagrangiens, même réguliers. A fortiori, l'étude plus délicate des singularités devrait s'avérer aussi efficace dans le cadre non auto-adjoint. Des articles plus récents d'Hitrik et Sjöstrand [82, 129] l'attestent déjà. Voir également [83] pour le cas d'une perturbation de type KAM d'un système intégrable.

4.2 Fibres singulières

J'évoquerai dans cette section la structure des fibres possédant des singularités non dégénérées. Je ne connais pas de résultats semi-globaux pour des singularités dégénérées de classe C^{∞} . Une première étape serait de globaliser les énoncés de [33]. Dans la catégorie analytique, il faudrait réussir à incorporer les travaux de Garay, Sevenheck et Van Straten [69, 126].

L'initiateur principal de l'analyse topologique des fibres singulières non dégénérées (classiques) est sans doute Fomenko [68], relayé avec succès par un certain nombre de ses élèves (en particulier Bolsinov [12], Nguyên Tiên Zung [165, 167]) et Matveev [104]; cette section leur doit beaucoup.

Cas elliptique

Au voisinage d'un point fixe elliptique, les fibres sont des petits tores et sont entièrement décrits par la forme normale locale, aussi bien du point de vue classique que semi-classique (le système se ramène à des oscillateurs harmoniques découplés). Même si les énoncés vont donc découler directement de l'étude du chapitre précédent, je pense qu'il est utile de les repréciser. Tous ces résultats sont « essentiellement » connus depuis une vingtaine d'années et il n'est pas aisé de donner des références bibliographiques précises. Tout en m'excusant d'avance, je préfère donner les résultats sans les attribuer à qui que ce soit. On pourra consulter [12, 62, 50, 31].

Classification topologique — Soit $F = (f_1, ..., f_n)$ un système intégrable et $m \in M$ un point fixe de type elliptique ($m_e = n$).

Théorème 4.2.1 Il existe un homéomorphisme ψ de \mathbb{R}^{2n} dans M, défini près de 0, tel que $\psi(0) = m$ et

$$F \circ \psi = q$$
,

où q est la fibration quadratique standard $(q_1, \ldots, q_n), q_i = \frac{1}{2}(x_i^2 + \xi_i^2).$

Il n'y a donc aucun invariant topologique pour ces singularités. Près du point fixe, les fibres sont des tores, pour la plupart de dimension n, et en général de dimension n - k si k est le nombre de q_i qui s'y annulent.

Classification symplectique — Soit $f = (f_1, ..., f_n)$ un système intégrable et $m \in M$ un point fixe de type elliptique ($m_e = n$). Le théorème d'Eliasson s'énonce alors comme suit.

Théorème 4.2.2 Il existe un symplectomorphisme χ local de $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ dans (M, m) et un difféomorphisme local $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, f(m))$ tel que

$$f \circ \chi = \varphi \circ q$$
,

où q est la fibration quadratique standard $(q_1, \ldots, q_n), q_i = \frac{1}{2}(x_i^2 + \xi_i^2).$

Ce théorème fournit l'existence d'un *action hamiltonienne de* \mathbb{T}^n qui laisse invariant le système : il suffit de prendre les flots des q_i . Cette action est libre sauf aux points fixes des q_i (on dit parfois qu'elle est *quasi-libre*). En fait si on veut démontrer ce théorème on est en général amené à d'abord trouver une telle action hamiltonienne de \mathbb{T}^n ; et on conclut par le fait bien connu qu'une action d'un groupe compact est toujours linéarisable au voisinage d'un point fixe (énoncé qui reste vrai dans la catégorie symplectique; voir par exemple [19]).

Ce résultat est en fait très semblable au théorème actions-angles standard 4.1.1. De ce point de vue, les singularités elliptiques sont assez inoffensives. De la même façon que pour les coordonnées actions-angles, la classification symplectique possède des invariants qui sont les *périodes* du système, déterminées par $d\varphi$. La présence d'un point elliptique fournit même une simplification par rapport au cas régulier : elle impose une *valeur de référence pour les intégrales d'action*. En effet, par continuité, toute intégrale d'action vaut zéro au point fixe. Ceci montre d'ailleurs qu'on peut remplacer dans l'énoncé « symplectomorphisme » par « symplectomorphisme exact ».

Cas transversalement elliptique — On dit que $f = (f_1, ..., f_n)$ est transversalement elliptique lorsque $m_e = \operatorname{rang}(f) < n$. D'après le théorème d'Eliasson 3.3.7 et le lemme 3.3.12, on peut se ramener au voisinage du point critique *m* de rang n - r au modèle « linéaire » $(\xi_1, ..., \xi_{n-r}, q_1, ..., q_r)$. L'orbite de *m* sous le flot hamiltonien conjoint est un tore isotrope de dimension n - r. Les fibres voisines de cette fibre critique sont donc des tores lagrangiens qui se voient comme un produit de cette fibre critique par les tores de dimension r du feuilletage elliptique transversal donné par $(q_1, ..., q_r)$.

En réalité puisque ce feuilletage transversal ne possède pas d'invariant topologique ni symplectique, on peut appliquer une version singulière des coordonnées actions-angles (ou bien une version « à paramètre » du théorème d'Eliasson) pour se ramener symplectiquement au modèle

$$(\xi_1, \dots, \xi_{n-r}, q_1, \dots, q_r)$$
 sur $T^* \mathbb{T}^{n-r}_{\{x,\xi\}} \times T^* \mathbb{R}^r_{\{y,\eta\}}, \qquad q_i = \frac{1}{2} (y_i^2 + \eta_i^2) :$

il existe un difféomorphisme symplectique χ d'un voisinage de $T^{n-r} \times \{0\}$ dans $T^*\mathbb{T}^{n-r} \times T^*\mathbb{R}^r$ sur un voisinage de la feuille critique dans M, et un difféomorphisme local φ de $(\mathbb{R}^n, f(m))$ dans $(\mathbb{R}^n, 0)$ tels que

$$\chi^* f = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_{n-r}, q_1, \dots, q_r). \tag{4.5}$$

On peut trouver une preuve complète de ce résultat dans [112].

Semi-classique — En toute rigueur l'étude semi-classique semi-globale n'a pas été traitée en détail pour des singularités *transversalement elliptiques*. Même si aucune difficulté particulière n'apparaît, je préfère donner un énoncé,

4.2. FIBRES SINGULIÈRES

qui se révélera important dans l'étude des systèmes toriques et presque toriques du dernier chapitre.

Soit donc $P = (P_1, ..., P_n)$ un système semi-classique complètement intégrable, dont la limite classique admet un point singulier m de corang r et de type elliptique ($m_e = r$). Comme dans le cas des coordonnées actions-angles, il existe une version semi-classique de (4.5) — sous réserve qu'on ajuste les intégrales d'action sur les cycles non évanescents : ceux de la fibre critique Λ_c , qui est un tore isotrope \mathbb{T}^r . Soient $a_j = \int_{x_i} \xi_j dx_j$ ces intégrales d'action.

Théorème 4.2.3 Il existe des séries formelles $\lambda_j(\hbar) = \sum_k \lambda_j^{(k)} \hbar^k$, j = 1, ..., net un opérateur intégral de Fourier U associé à un symplectomorphisme exact de $T^*\mathbb{R}^{n-r}_{\{x,\xi\}} \times T^*\mathbb{T}^r_{\{y,\eta\}}$ dans M envoyant la section " $\xi = a, y = \eta = 0$ " sur Λ_c tel que, microlocalement au voisinage de la section " $\xi = a, y = \eta = 0$ " on ait

$$U\begin{pmatrix}P_{1}\\\vdots\\P_{n}\end{pmatrix}U^{-1}=\hat{N}\cdot\begin{pmatrix}\hat{\zeta}_{1}-\lambda_{1}(\hbar)\\\vdots\\\hat{\zeta}_{n-r}-\lambda_{n-r}(\hbar)\\\hat{q}_{1}-\lambda_{n-r+1}(\hbar)\\\vdots\\\hat{q}_{r}-\lambda_{n}(\hbar)\end{pmatrix},$$

où \hat{N} est une matrice pseudo-différentielle $n \times n$ à coefficients commutant avec les $\hat{\xi}_j$ et les \hat{q}_j . En outre pour j = 1, ..., n - r, $\lambda_j^{(0)} = a_j$ tandis que pour j = n - r + 1, ..., n, $\lambda_i^{(0)} = 0$.

Modulo une version à paramètres, qui ne pose aucun problème ici voir page 86 —, on en déduit la nature du spectre conjoint microlocal près d'une valeur critique correspondant à une singularité transversalement elliptique. Le spectre suit la décomposition topologique : certains degrés de liberté engendrent un spectre régulier de type Bohr-Sommerfeld tandis que les autres sont responsables d'un spectre d'oscillateurs harmoniques. (Cf. figure 4.2)

Théorème 4.2.4 *Pour* \hbar *assez petit, le spectre conjoint microlocal dans un petit voisinage (de taille indépendante de* \hbar *) de la valeur critique c* = p(m) *est constitué des* $E \in \mathbb{R}^n$ *solutions du système*

$$\begin{array}{l} \lambda_j^E(\hbar) \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n - r, \\ \lambda_i^E(\hbar) \in \hbar(\mathbb{N} + \frac{1}{2}), \quad j = n - r + 1, \dots, n \end{array}$$

où les $\lambda_j^E(\hbar)$ admettent un développement asymptotique complet en puissances de \hbar dont les coefficients dépendent de façon C^{∞} de E et dont les premiers termes sont :

$$\lambda_j^E(\hbar) = \int_{\gamma_j^E} \alpha + \hbar \int_{\gamma_j^E} \kappa^E + \hbar \frac{\mu(\gamma^E)\pi}{2} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$
(4.6)



FIGURE 4.2: Modèle de spectre conjoint près d'une singularité transversalement elliptique. À gauche : cas n = 2, r = 2. À droite : cas n = 3, r = 2.

Ici κ^E est la 1-forme sous-principale sur Λ_c^E et μ le cocycle de Maslov. Pour $1 \leq j \leq n-r$, γ_j^E est le cycle sur Λ_c^E engendré par le flot de ξ_j , tandis que pour $n-r+1 \leq j \leq n$, γ_j^E est le cycle sur Λ_c^E engendré par le flot de q_{j-n+r} .

Cas foyer-foyer

Le théorème d'Eliasson donne la structure locale des singularités foyerfoyer. Plusieurs personnes ont remarqué (dans les années 1996-1997) qu'elle suffisait pour déterminer la *monodromie* du feuilletage autour de la fibre singulière ; j'en parlerai davantage en section 5. En réalité, cette structure locale est un point de départ pour comprendre beaucoup plus : la classification semi-globale d'une fibre singulière de type foyer-foyer [151]. Contrairement à la monodromie qui est un invariant topologique, déjà observé dans des fibrations en tores sans structure hamiltonienne [103], la classification semiglobale fait intervenir des invariants purement symplectiques.

Classification topologique — Soit $F = (f_1, f_2)$ un système complètement intégrable à deux degrés de libertés sur une variété symplectique M de dimension 4. Soit m un point critique de type foyer-foyer; on supposera pour simplifier que F(m) = 0, et que la fibre (compacte, connexe) Λ_0 ne contient pas d'autres points critiques. Il n'y a alors pas d'invariant topologique : on peut montrer que Λ_0 est toujours un tore "pincé" (l'immersion lagrangienne d'une sphère S^2 avec un point double transversal), entouré par des fibres régulières qui sont des tores \mathbb{T}^2 standard.



FIGURE 4.3: Topologie de la fibration singulière au voisinage d'une feuille de type foyer-foyer.

Classification symplectique — Quels sont les invariants semi-globaux associés à cette fibration singulière ?

Une des caractéristiques majeures des singularités foyer-foyer est l'existence d'une *action hamiltonienne de* S^1 qui commute avec le flot du système, dans un voisinage de Λ_0 . En effet, commençons par appliquer le théorème d'Eliasson au voisinage de *m* pour se ramener à une application moment $F = (f_1, f_2)$ qui soit égale près de *m* à la base canonique foyer-foyer $(x\xi + y\eta, x\eta - y\xi)$. f_2 est le Hamiltonien périodique recherché; on peut également l'identifier à une intégrale d'action associée au cycle évanescent du tore pincé (cf. fig. 4.4).



FIGURE 4.4: Le cycle évanescent du tore pincé

Soit $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ une valeur régulière de *F* proche de 0. Étant donné un point *A* sur Λ_c proche de *m*, on définit $\tau_1(c) > 0$ comme étant le temps de premier retour pour le flot de \mathcal{X}_{f_1} sur l'orbite de *A* par le flot de \mathcal{X}_{f_2} , et $\tau_2(c) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le temps nécessaire pour retourner en *A* sous l'action de \mathcal{X}_{f_2} . On définit

$$\sigma_1(c) = \tau_1(c) + \Re(\ln c)$$
 et $\sigma_2(c) = \tau_2(c) - \Im(\ln c)$,

où on a identifié \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} en posant $c = c_1 + ic_2$. On montre que $\sigma := \sigma_1(c)dc_1 + \sigma_2(c)dc_2$ est une 1-forme fermée de classe C^{∞} au voisinage de l'origine. $\sigma_2(c)$ n'étant définie que modulo l'addition d'un multiple fixe de 2π , on le normalise en imposant $\sigma_2(0) \in [0, 2\pi]$. Soit *S* une primitive de σ s'annulant à l'origine. Soit [**f**] le feuilletage associé au système dans un voisinage de Λ_0 (c'est-à-dire la classe d'équivalence de **f** modulo l'équivalence forte). On note *S*([**f**]) la *série de Taylor* de *S*.

Théorème 4.2.5 ([151]) $S([\mathbf{f}])$ caractérise entièrement le feuilletage singulier au voisinage de Λ_0 , c'est-à-dire :

- $-S([\mathbf{f}])$ est bien définie (elle ne dépend pas du choix de la carte locale d'Eliasson et est invariante par équivalence forte);
- Si [**f**] et [**g**] sont deux feuilletages singuliers au voisinage de feuilles foyerfoyer, et vérifient $S([\mathbf{f}]) = S([\mathbf{g}])$, alors il existe un symplectomorphisme semi-global χ tel que $\chi^* \mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$;
- Si T est une série formelle quelconque de $\mathbb{R}[[X, Y]]$ sans terme constant et telle que $\frac{\partial T}{\partial Y}(0) \in [0, 2\pi[$, alors il existe un feuilletage singulier de type foyer-foyer **f** tel que $T = S([\mathbf{f}])$.

Remarque 4.2.6 Le fait que deux fibrations foyer-foyer sont toujours semiglobalement *topologiquement* conjuguées avait été déjà prouvé par Zung [165], qui avait introduit diverses notions d'équivalences de nature topologique. Dans notre langage cela dit que la classe topologique est invariante par équivalence forte. Le théorème montre que ce n'est plus le cas pour la classe symplectique. \triangle

Remarque 4.2.7 *S* s'interprète comme une *action régularisée* (ou désingularisée). En effet si γ_c est le lacet sur Λ_c défini comme dans la description des $\tau_j(c)$ ci-dessus, et si α est une primitive semi-globale de la forme symplectique ω , on note $\mathcal{A}(c) = \int_{\gamma_c} \alpha$; on a alors

$$S(c) = \mathcal{A}(c) - \mathcal{A}(0) + \mathfrak{R}(c \ln c - c).$$

Semi-classique — L'étude semi-classique des fibres de type foyer-foyer a été menée à bien dans l'article [147]. Y sont énoncées des conditions de type Bohr-Sommerfeld *singulières* qui permettent de décrire complètement le spectre conjoint microlocal au voisinage de la valeur critique de l'application moment. Contrairement au cas des variables actions-angles standard, on ne peut pas procéder aussi simplement en appliquant une forme normale semi-globale semi-classique ; en effet, le théorème de classification ne donne pas de modèle explicite particulier. Et tous les exemples que je connais, qui peuvent raisonnablement prétendre au titre de « modèle type de singularité foyer-foyer », ne sont pas résolubles explicitement. La stratégie développée dans [147] consiste à généraliser le "cocycle de Bohr-Sommerfeld" défini

page 94 : on voit les solutions microlocales comme les sections globales d'un faisceau au dessus de la fibre critique Λ_0 .

En vertu de la forme normale locale (théorème 3.3.18), une première condition nécessaire d'existence de section globale est la quantification de l'invariant $\lambda_2(\hbar)$ (équation (3.18)). Puisque la forme normale locale est valable dans un voisinage indépendant de \hbar , on peut appliquer la proposition 4.1.12 arbitrairement proche du point fixe *m* et on constate que cette quantification de $\lambda_2(\hbar)$ n'est autre que la *règle de Bohr-Sommerfeld régulière associée au cycle évanescent* (qui n'est pas triviale !). Une fois cette condition vérifiée, le théorème 3.3.18 et la proposition 3.2.12 assurent que le faisceau des solutions microlocales redevient un fibré localement plat, comme dans le cas régulier. On en déduit donc qu'une telle section globale existe si et seulement si l'*holonomie* du faisceau est triviale. Il reste à la calculer...

Dans le cas régulier, on avait identifié (la phase de) cette holonomie aux *intégrales d'action semi-classiques* de la formule (4.3) (proposition 4.1.12). Dans le cas singulier l'holonomie adéquate est une *régularisation* de l'action semiclassique habituelle, au sens de la remarque 4.2.7 ci-dessus. D'ailleurs le premier terme de cette holonomie est exactement l'invariant classique décrit au théorème 4.2.5 ci-dessus, ce qui indique que la classe d'équivalence symplectique du feuilletage est un *invariant spectral* du système quantique. Voir [147, 149] pour davantage de détails. On peut en particulier découvrir la structure universelle du spectre conjoint microlocal au voisinage de la valeur critique foyer-foyer. Parmi les caractéristiques de ce spectre, les plus notables sont certainement :

- une *anisotropie* de la densité spectrale : dans la direction correspondant au cycle évanescent, les valeurs propres sont dans une progression arithmétique en ħ, alors que dans la direction « hyperbolique » de l'action régularisée, la distance entre valeurs propres consécutives est de l'ordre de ħ/ |lnħ|;
- la présence d'une *monodromie* non triviale. J'en reparlerai à la section 5.4.

Autres applications — Outre l'analyse semi-classique, le théorème 4.2.5 conduit à un certain nombre d'applications diverses. On peut par exemple exploiter le fait que l'ensemble des classes d'équivalence symplectiques de ces feuilletages se voit muni d'une structure d'espace vectoriel (modulo la restriction $\sigma_2(0) \in [0, 2\pi]$). C'est ce que fait Symington dans [132] pour montrer que des voisinages de fibres foyer-foyer sont toujours symplectomorphes (en oubliant de préserver le feuilletage, bien sûr). Il suffit pour cela d'introduire des fonctions S_0 et S_1 dont la série de Taylor donne les invariants des deux feuilletages, et de construire un "chemin de feuilletages" en interpolant entre S_0 et S_1 . Un argument à la Moser permet alors de conclure (puisque les formes symplectiques sont cohomologues).



FIGURE 4.5: Spectre conjoint au voisinage d'une valeurs critique de type foyer-foyer. Cas du pendule sphérique : $P_1 = \frac{\hbar^2}{2}\Delta + z$, $P_2 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$, agissant sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Le théorème est aussi très utile pour effectuer des calculs presque explicites dans un voisinage de la fibre. On peut ainsi, par exemple, déterminer la validité des conditions qui apparaissent dans les théorèmes de type KAM⁽³⁾, pour une perturbation d'un système complètement intégrable possédant une singularité foyer-foyer. Le résultat suivant en est un exemple.

Théorème 4.2.8 ([57]) Soit H un Hamiltonien complètement intégrable singulier en l'origine, et y possédant un feuilletage lagrangien singulier de type foyer-foyer (H a une singularité loxodromique). Alors, au voisinage de 0,

- la condition de non-dégénérescence de Kolmogorov est vérifiée sur tous les tores proches de la fibre critique;
- la condition de "fréquences tournantes iso-énergétique" est vérifiée sauf sur une famille à 1-paramètre de tores correspondant à une courbe dans l'image de l'application moment qui passe par l'origine et est transversale aux droites d'énergie H constante.

Cas hyperbolique

A l'instar des bloc elliptiques, les blocs hyperboliques sont de dimension 1 (forme normale $q_i = x_i\xi_i$); cependant ils se révèlent plus compliqués et donc plus riches que les premiers, et ce pour deux raisons principales. La première est fondamentale : les fibres singulières ne sont pas localisées près

^{(3).} Pour une discussion sur ces différentes conditions et leurs relations, on consultera avec intérêt l'article de Nicolas Roy [122].

de la singularité ; au contraire elles sont constituées de variétés stables et instables qui peuvent connecter plusieurs points singuliers. La deuxième raison, plus technique, est que la structure C^{∞} naturelle de l'espace des feuilles est compliquée. Par exemple, dans le cas du "8" (fig. 4.6) l'espace « topologique » des feuilles est un "Y" ; pourtant du point de vue de la structure analytique (lorsque le Hamiltonien est analytique) l'espace des feuilles est juste un intervalle (les fonctions qui commutent avec $x\xi$ sont des fonctions de $x\xi$). Dans la catégorie C^{∞} l'espace des feuilles est toujours un "Y", mais dont les bras ont toutes leurs dérivées égales au point de branchement : les fonctions C^{∞} qui commutent avec $x\xi$ se décrivent localement par deux fonctions $f^+(x\xi)$ et $f^-(x\xi)$ (par exemple correspondant aux deux demi-espaces $\pm x > 0$) telles que $f^+ - f^-$ est plate à l'origine.



FIGURE 4.6: L'espace des feuilles d'un feuilletage hyperbolique réel.

Le cas d'un seul degré de liberté — D'un point de vue semi-global, la classification des feuilletages hyperboliques a été réalisée uniquement à 1 degré de liberté, dans la thèse de Toulet [139], et publiée dans la note [49]. On peut d'ailleurs donner une preuve de l'énoncé proposé dans cette note avec des méthodes similaires à celles de [151] (voir ci-dessous).

La fibre critique est un *graphe* dont les sommets sont tétravalents (si les singularités de la fibre sont toutes hyperboliques). L'invariant est ce même graphe, vu comme objet topologique, muni de certaines *décorations*. Toulet propose une cohomologie supportée sur le graphe qu'il serait intéressant de comparer avec le $H^1(\mathbf{f})$ qu'on a défini au chapitre 3.1. L'analyse semiclassique correspondante est traitée par Colin de Verdière et Parisse [34, 35, 36]. Les auteurs utilisent le graphe de Dufour-Molino-Toulet pour lire les conditions de quantification appropriées. Là encore, c'est la cohomologie du graphe qui sous-tend la discussion.

Sans chercher ici à entrer dans tous les détails, examinons le cas du « 8 », qu'on obtient, par exemple, pour un potentiel à double puits (section 2.2).

Soit donc f une fonction C^{∞} sur une variété symplectique M de dimension 2, telle que

- 0 est une valeur critique de f;
- la fibre $f^{-1}(0)$ est compacte et ne contient qu'un seul point critique *m*; (4.7)
- ce point critique est non dégénéré, de type hyperbolique.

Connaissant la forme locale des singularités hyperboliques, il est facile de voir que $\Lambda_0 = f^{-1}(0)$ est un « 8 », et que le feuilletage dans un voisinage saturé de Λ_0 est difféomorphe à celui, par exemple, du double puits.

Ceci étant dit, il y a bien sûr des invariants symplectiques. Pour les exhiber, on procède de façon similaire au cas foyer-foyer. Ici, on n'aura pas la difficulté de la dimension 4, mais en revanche, il faudra gérer le changement du nombre de composantes connexes de la fibre $f^{-1}(E)$ lorsque *E* traverse l'origine. Pour fixer les idées, on peut supposer que ce nombre est 2 lorsque E < 0, et 1 lorsque E > 0. Lorsque E < 0, on appellera puits gauche et puits droit, respectivement, les deux composantes connexes.

Commençons par appliquer la forme normale locale (théorème 3.3.7, ou plutôt ici le lemme de Morse isochore de [37]) : on introduit des coordonnées symplectiques (x, ξ) près de m telles que

$$\varphi \circ f = x\xi$$
,

pour un difféomorphisme local φ . On peut alors supposer que $f = x\xi$, et pour éviter toute confusion, on utilisera la lettre *c* au lieu de *E* pour les valeurs de *f* (donc *c* = $\varphi(E)$).

Soit A = A(c) un point sur la fibre $\Lambda_c = f^{-1}(c)$, situé dans le puits droit, proche de *m* (figure 4.7). On note $\tau_d(c)$ le temps mis par le flot hamiltonien de *f* pour partir de *A* et y revenir pour la première fois. Ce temps est indépendant du choix de *A* dans Λ_c , et en choisissant par exemple *A* de la forme $(\epsilon, c/\epsilon)$ on voit que la fonction σ_g définie par

$$\sigma_d(c) = \tau_d(c) + \ln|c|$$

est C^{∞} pour $c \leq 0$ dans un voisinage de 0 (c = 0 y compris!). En faisant de même pour le puits gauche, on obtient une autre fonction σ_g avec la même propriété. Le résultat de classification symplectique, très similaire au théorème 4.2.5, est le suivant.

Théorème 4.2.9 ([139]) Les séries de Taylor de σ_g et σ_d à l'origine sont les invariants symplectiques du feuilletage [**f**] au voisinage de Λ_0 :

- leur contruction est indépendante de la forme normale locale utilisée, et est invariante par équivalence forte;
- deux systèmes [**f**] et [**g**] vérifiant les hypothèses 4.7 et ayant des invariants identiques sont symplectiquement équivalents au voisinage de Λ_0 : il existe un symplectomorphisme semi-global χ tel que $\chi^* \mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$;


FIGURE 4.7: Les invariants symplectiques d'une singularité hyperbolique simple. Au voisinage de l'origine, le feuilletage est sous forme normale $x\xi$.

deux séries formelles arbitraires peuvent être réalisées comme invariants symplectiques d'un tel système hamiltonien.

Remarque 4.2.10 Comme pour le cas foyer-foyer, on peut écrire que les intégrales d'action correspondant aux puits gauche et droit sont les primitives des fonctions τ_g et τ_d . On en déduit qu'elles sont de la forme

$$\mathcal{A}_{g/d}(c) = S_{g/d}(c) - (c\ln|c| - c),$$

où S_d et S_d sont de C^{∞} en c, pour $c \leq 0$.

Soit maintenant A(c) l'intégrale d'action définie pour c > 0. Alors $S(c) = A(c) + 2(c \ln |c| - c)$ est régulière en 0, et la fonction

$$c \mapsto S(c) - S_g(c) - S_d(c)$$

est plate à l'origine.

Le « 8 » semi-classique — Comment utiliser la classification symplectique pour étudier le spectre d'un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole

 \triangle

principal admet une singularité hyperbolique? La question n'a pas encore été résolue de façon complètement satisfaisante. La raison est peut-être que, comme c'était déjà le cas pour les singularités foyer-foyer, il n'existe pas de modèle simple.

Malgré tout, on comprend bien la situation, en particulier grâce aux travaux [34, 35, 36]. En fait, même sans appliquer à la lettre le théorème de classification symplectique, on peut encore adapter la technique du cocycle de Bohr-Sommerfeld (section 4.1, page 94).

Cherchons donc les solutions microlocales u_{\hbar} de l'équation

$$P(\hbar)u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty}),$$

où *p*, le symbole principal de $P(\hbar)$, vérifie les hypothèses (4.7). On sait déjà qu'une telle solution doit vérifier $WF(u_{\hbar}) \subset \Lambda_0 = p^{-1}(0)$. On va demander que u_{\hbar} soit non triviale, c'est-à-dire par exemple que $WF(u_{\hbar}) = \Lambda_0$; ou même, simplement, qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel $Q(\hbar)$, elliptique en un point de Λ_0 , tel que $||Q(\hbar)u_{\hbar}|| \ge C > 0$: cela impliquera en fait $WF(u_{\hbar}) = \Lambda_0$.

Considérons maintenant Λ_0 , cette fibre singulière en forme de « 8 ». On recouvre un voisinage de Λ_0 par des ouverts sur lesquels on voudra appliquer les résultats d'unicité microlocale locaux. Un choix pratique est proposé en figure 4.8 : un ouvert Ω_0 sur le point critique, un ouvert $\Omega_{g/d,\pm}$ sur chaque branche de la croix centrale, et un ouvert $\Omega_{g/d}$ sur chaque boucle. La restriction du feuilletage à chacun ces ouverts sauf Ω_0 est régulière : par le résultat d'existence et d'unicité locales pour les points réguliers (proposition 3.2.12), on peut construire des microfonctions 1_d , 1_d , $1_{g,\pm}$, $1_{d,\pm}$ qui sont chacune une base de l'espace des solutions microlocales sur leur ouvert respectif. On a donc quatre constantes inversibles associées à chacune des quatre intersections :

$$1_{g,+} = C_{g,+}1_g$$

$$1_{g,-} = C_{g,-}1_g$$

$$1_{d,+} = C_{d,+}1_d$$

$$1_{d,-} = C_{d,-}1_d.$$
(4.8)

Les égalités signifient bien sûr qu'on a égalité microlocale sur l'intersection correspondante.

En utilisant maintenant le résultat microlocal pour les solutions sur l'ouvert Ω_0 (théorème 3.3.17), on déduit que sur chacune des intersections de $\Omega_{g/d,\pm}$ avec Ω_0 , les solutions $1_{g/d,\pm}$ doivent être combinaisons linéaires des deux solutions Y^+ et Y^- de la forme normale hyperbolique. On se retrouve donc avec deux matrices M^+ et M^- , à coefficients dans \mathbb{C}_{\hbar} , telles que, mi-



FIGURE 4.8: La méthode du cocycle de Bohr-Sommerfeld sur le « 8 ».

crolocalement sur les intersections correspondantes,

$$\begin{pmatrix} 1_{g,+} \\ 1_{d,+} \end{pmatrix} = M^+ \begin{pmatrix} Y^+ \\ Y^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1_{g,-} \\ 1_{d,-} \end{pmatrix} = M^- \begin{pmatrix} Y^+ \\ Y^- \end{pmatrix}.$$

$$(4.9)$$

On se convainc par un argument de disjonction des microsupports que les matrices M^+ et M^- sont inversibles. La donnée de ces matrices et des constantes $C_{g/d,\pm}$ définit un 1-cocycle de type Čech qui donne la classe d'isomorphisme du faisceau des solutions microlocales sur Λ_0 . Il existe une solution globale si et seulement si ce cocycle est trivial : autrement dit, si et seulement on peut recoller les solutions. Cherchons par exemple quels sont les coefficients ($\alpha_{g,+}, \alpha_{d,+}$) tels qu'il existe une solution microlocale semi-globale (sur tout Λ_0) qui soit égale à $\alpha_{g,+}1_{g,+}$ sur $\Omega_{g,+}$ et à $\alpha_{d,+}1_{d,+}$ sur $\Omega_{d,+}$. En mettant bout-à-bout (4.8) et (4.9), on se ramène à une équation matricielle

$$\begin{pmatrix} \alpha_{g,+} \\ \alpha_{d,+} \end{pmatrix} = ({}^{t}M^{+})^{-1}({}^{t}M^{-})D\begin{pmatrix} \alpha_{g,+} \\ \alpha_{d,+} \end{pmatrix} + O(\hbar^{\infty})$$

avec $D = \begin{pmatrix} C_{g,-}C_{g,+}^{-1} & 0 \\ 0 & C_{d,-}C_{d,+}^{-1} \end{pmatrix}.$

La condition de Bohr-Sommerfeld singulière qui équivaut à l'existence d'une solution semi-globale non triviale est donc que la matrice $({}^{t}M^{+})^{-1}({}^{t}M^{-})D$ admette $1 + O(\hbar^{\infty})$ comme valeur propre :

$$\det\left(({}^{t}M^{+})^{-1}({}^{t}M^{-})D - I\right) = O(\hbar^{\infty}).$$
(4.10)

En étudiant plus finement les constructions BKW qui donnent les solutions $1_{g/d,(\pm)}$ et Y^{\pm} , il est possible de préciser le développement asymptotique de ce déterminant. On parvient à retrouver dans l'asymptotique principale les invariants symplectiques, mais il serait intéressant d'étudier ce point de façon plus systématique, pour dégager les *invariants semi-classiques*. Citons l'exemple du double puits ⁽⁴⁾, pour lequel l'équation (4.10) se transforme de façon remarquable.

Proposition 4.2.11 ([36]) Soit $V \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ un potentiel à double puits, avec V(0) = 0, V'(0) = 0, V''(0) < 0. Soit

$$P(\hbar) = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - \lambda\hbar.$$

Soit $p(x,\xi) = \xi^2/2 + V(x)$ *son symbole principal. L'équation*

$$P(\hbar)u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$$

admet une solution microlocale u_{\hbar} avec $WF(u_{\hbar}) = p^{-1}(0)$ si et seulement si λ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\pi\epsilon}}}\cos\left(\frac{\theta_g-\theta_g}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_g+\theta_d}{2} + \frac{\pi}{2} + \epsilon\ln\hbar + \arg\Gamma(\frac{1}{2}+i\epsilon)\right),$$

où $\epsilon = \epsilon(\lambda, \hbar)$ et $\theta_{g/d} = \theta_{g/d}(\lambda, \hbar)$ sont des quantités définies par le potentiel V, admettant un développement asymptotique en puissances de \hbar , telles que :

$$\epsilon = \frac{\lambda}{\sqrt{-V''(0)}} + \mathcal{O}(\hbar)$$

et

$$\theta_{g/d} = \frac{1}{\hbar} \mathcal{A}_{g/d}(0) - \lambda \sigma_{g/d}(0) + \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\hbar).$$

On a noté $A_{g/d}$ l'intégrale d'action du puits gauche/droit, et $\sigma_{g/d}$ l'invariant symplectique correspondant.

Remarque 4.2.12 Le terme $\epsilon \ln \hbar$ montre que la distance entre deux valeurs propres consécutives, dans une région spectrale de taille $O(\hbar)$, est d'ordre $O(\hbar / |\ln \hbar|)$. C'est la « signature » du caractère hyperbolique de la singularité.

^{(4).} Voir la section 2.2.

Le cas transversalement hyperbolique — Dans l'article [38], nous avons étudié en détail le cas de singularités *transversalement hyperboliques*, à deux degrés de liberté. Soit $F = (f_1, f_2)$ un système complètement intégrable sur une variété symplectique de dimension 4. Considérons une hypersurface de niveau de f_1 , qu'on suppose régulière, et sur laquelle les singularités du système sont transversalement hyperboliques. Je rappelle ⁽⁵⁾ que le modèle local au voisinage d'un tel point singulier est $\mathbf{f_0} = (\xi_1, x_2\xi_2)$.

L'ensemble des points critiques de la fibre critique est une union de cercles. Chacun de ces cercles engendre, lorsqu'on fait varier la valeur de f_1 , un cylindre d'orbites périodiques. Fixons-nous un point sur un de ces cercles. Grâce au modèle local f_0 au voisinage de ce point, on comprend le feuilletage singulier restreint à la « surface de Poincaré » $x_1 = \xi_1 = 0$: c'est le feuilletage hyperbolique 1D standard.

Considérons maintenant le feuilletage lagrangien sur tout un voisinage du cercle critique. On trouve deux modèles possibles, qu'on peut décrire comme suit. Les deux variétés symplectiques modèles sont

 $T^*(S^1 \times I)$ et $T^*(S^1 \times I/\sim)$,

où ~ est la relation d'équivalence $(x_1 + \pi, x_2) \sim (x_1, -x_2)$, x_1 designant la variable angulaire de S^1 , et x_2 variant dans un petit intervalle ouvert I, centré en l'origine de \mathbb{R} . Notons (ξ_1, ξ_2) les coordonnées cotangentes correspondantes. Alors, dans les deux cas, F est fortement équivalente à l'application moment $(\xi_1, x_2\xi_2)$.

Il n'est pas très difficile de visualiser ces deux cas en considérant uniquement la topologie de la fibre critique Λ_0 . Dans le premier cas, c'est un produit direct du cercle avec la « croix » hyperbolique. Dans le deuxième cas, la croix se retrouve tournée d'un angle de π après rotation complète autour du cercle, à l'instar de deux rubans de Moebius orthogonaux. (Figure 4.9). Le deuxième cas, qu'on baptisera « avec symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ », se



FIGURE 4.9: Les deux topologies possibles pour la fibre critique au voisinage d'un cercle de points singuliers transversalement hyperboliques.

^{(5).} Voir les remarques précédant le théorème d'Eliasson 3.3.7, page 78

produit par exemple pour la forme normale de Birkhoff en résonance 1 : 2, pour une énergie non nulle ; la fibre critique Λ_0 complète est représentée en figure 4.10.



FIGURE 4.10: Fibre critique hyperbolique avec symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cas de la résonance 1 : 2)

Quelle est la manifestation semi-classique de cette nouvelle géométrie? Comme pour le cas unidimensionnel, on construit un graphe qui permettra d'énoncer des conditions de type Bohr-Sommerfeld singulières. Ce graphe est abstraitement la *réduction* de la fibre critique par une action de S^1 que l'on construit et qui laisse le feuilletage invariant. Grâce à cette réduction, on se retrouve presque dans une situation à un seul degré de liberté. La "subtilité" est que les cercles critiques avec symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ deviennent des sommets *bivalents* (et non tétravalents) du graphe. D'autre part le problème, évoqué plus haut, de la structure C^{∞} délicate sur le graphe, qui semblet-il ne peut pas être évité ici, conduit à une preuve assez technique de la validité des conditions de Bohr-Sommerfeld. (Au contraire, cette difficulté est facilement évitable en dimension 1.)

On obtient ainsi de façon très précise le *comportement universel* du spectre conjoint microlocal au voisinage d'une séparatrice transversalement hyperbolique ⁽⁶⁾, qui permet entre autres de calculer la densité locale des valeurs propres (formules de type Weyl). Comme attendu, la distance entre deux points du spectre conjoint est de l'ordre de \hbar dans la direction donnée par le (c'est-à-dire duale au) champ hamiltonien périodique, et de l'ordre de $\hbar/|\ln \hbar|$ dans la direction transverse (cf. fig. 4.11). En présence d'une symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la différence majeure avec le cas unidimensionnel est l'absence d'effet tunnel et donc de doublets de valeurs propres : au voisinage de la fibre singulières, les fibres de l'application moment sont connexes!

^{(6).} Je n'énonce pas ici le théorème, qui est un peu long à introduire proprement [38].



FIGURE 4.11: Portion du spectre conjoint pour une singularité transversalement hyperbolique avec symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Cas de la résonance 1 : 2. L'axe horizontal représente les valeurs de l'énergie *H* et l'axe vertical celles de l'intégrale supplémentaire du système *K*.

En regardant un dessin similaire à la figure 4.11, Sadovskií et Zhilinskií ont eu l'idée qu'on pouvait définir (et calculer) une *monodromie fractionnaire* [118], c'est-à-dire rendant compte de l'homologie à coefficients rationnels des fibres de la fibration singulière en tores. Il serait très intéressant d'utiliser les techniques microlocales pour l'écrire rigoureusement et la calculer au moyen du graphe du feuilletage. La structure affine rationnelle de la base devrait également être finement comparée au spectre conjoint.

Cas restants... —

Pour finir l'étude des systèmes à deux degrés de liberté il resterait à inclure les cas elliptique-hyperbolique et hyperbolique-hyperbolique.

Le cas d'un système possédant un point critique se séparant en un bloc elliptique et un bloc hyperbolique est probablement le plus simple. On peut le voir comme un cas limite de singularité transversalement hyperbolique dont les cercles critiques dégénèrent en un point, excluant la possibilité d'une symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La fibre critique est donc un graphe tétravalent plongé dans M.

D'un point de vue semi-classique, on obtiendra deux conditions de quantification : l'une liée à la cohomologie du graphe ; l'autre au cycle évanescent.



FIGURE 4.12: Les quatre types topologiques d'une fibre hyperbolique-hyperbolique simple. Dans les cas 2) et 3), le groupe \mathbb{Z}_2 agit par symétrie centrale sur chaque facteur simultanément. Dans le dernier cas, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ agit sur chaque facteur soit par symétrie centrale, soit par symétrie par rapport à un axe vertical (*Oz*), lorsqu'on voit les deux cercles comme deux grands cercles orthogonaux tracés sur une sphère, s'intersectant aux pôles.

Le cas hyperbolique-hyperbolique est certainement un très bon problème ouvert non trivial. On peut le voir comme un branchement de quatre singularités transversalement hyperboliques (non indépendantes). On sait depuis les travaux de Bolsinov, Fomenko et Nguyên Tiên Zung (voir [12]) que, même dans le cas le plus simple d'une fibre singulière possédant un seul point fixe, de type hyperbolique-hyperbolique, quatre topologies différentes sont possibles pour la fibre critique (figure 4.12).

En dimension supérieure l'analyse semi-classique reste ouverte, à part pour les cas purement elliptiques (théorème 4.2.3). La topologie est en principe connue, au moins dans le cas de singularités non dégénérées « topologiquement stables » [165]. L'analyse symplectique est raisonnablement avancée, même si l'étude des invariants complets demeure à faire. En se basant sur le comportement asymptotique des intégrales d'action, on peut sûrement établir une classification symplectique en catégorie analytique, au moins pour un point fixe non dégénéré [13]. En ce qui concerne le traitement des cas de corang r < n, le meilleur point de départ pour le moment est à

4.2. FIBRES SINGULIÈRES

mon avis l'article de Nguyên Tiên Zung et Miranda sur les formes normales semi-globales *au voisinage d'une orbite compacte* [112].

Chapitre 5

Théorie Globale

Envole-toi bien loin de ces miasmes morbides; Va te purifier dans l'air supérieur, Et bois, comme une pure et divine liqueur, Le feu clair qui remplit les espaces limpides

BAUDELAIRE, Élévation (Les Fleurs du Mal)

Nous avons jusqu'à maintenant considéré diverses propriétés des systèmes intégrables dans des voisinages, éventuellement arbitrairement petits, d'objets invariants minimaux : les orbites de points de *M*. Pour en savoir plus, il faut "globaliser". Mais l'adjectif "global" recouvre plusieurs aspects, qualitatifs et quantitatifs.

Par exemple, la démarche de Duistermaat a été de globaliser les propriétés données par le théorème de Liouville-Arnold-Mineur. Il s'est donc intéressé à la fibration au-dessus de l'ensemble des *points réguliers*, analysant le rôle de la monodromie, de la classe de Chern et de la classe de cohomologie de la forme symplectique.

La globalisation la plus naturelle est de chercher à décrire la variété symplectique entière en s'appuyant comme dans la théorie de Morse sur des formules qui permettent de "localiser" les objets globaux sur les *singularités* du système. Sous l'hypothèse de non-dégénérescence des points critiques, Zung a étudié cette question en montrant en particulier l'importance de la *structure affine entière* de la base de la fibration.

Cette structure affine entière fournit un autre angle d'attaque du problème global. Dans le cas le plus simple des systèmes complètement intégrables *toriques* (c'est-à-dire dont le flot définit une action effective de \mathbb{T}^n) on sait caractériser entièrement le système constitué de la variété symplectique M et de l'application moment F au moyen de l'image de M par F qui, dans la variété affine entière \mathbb{R}^n , est un polytope convexe rationnel (théorème de Delzant [45]). Il semble qu'une généralisation naturelle des systèmes toriques soit ceux qui ne possèdent que des singularités non dégénérées de type elliptique et/ou foyer-foyer. On les appelle les systèmes *presque toriques* (la terminologie a probablement été introduite pour la première fois par Symington [133]).

Du point de vue de l'analyse semi-classique, la "globalisation" peut faire référence, de façon parallèle, aux globalisations géométriques proposées cidessus. Il est également naturel de penser au problème du passage du microlocal à l' "exact" : comment utiliser les constructions microlocales pour obtenir des résultats concernant le "vrai" opérateur de Schrödinger agissant sur le "vrai" espace de Hilbert $L^2(X)$? Quel est le lien entre le spectre microlocal et le spectre exact?

5.1 Le spectre exact

Le passage du microlocal à l'exact repose sur deux points : d'abord, définir proprement le spectre conjoint et montrer qu'il est discret dans la région qui nous intéresse; ensuite, montrer que sa version microlocale (définition 4.1.10) en donne une bonne approximation.

Le premier point concerne la géométrie et l'analyse à l'infini : on veut s'assurer que le bout de feuilletage lagrangien considéré est bien séparé d'éventuelles autres composantes connexes « lointaines » de la fibration classique.

Le deuxième point s'appuie sur la construction des quasi-modes microlocaux et de leur *multiplicité* microlocale, comme dans la proposition 3.2.12. L'unicité microlocale des solutions du système montre non seulement que les quasi-modes construits approximent réellement les fonctions propres, mais aussi qu'ils forment un système complet, car ils sont microlocalement orthogonaux [147]. On est ainsi assuré que le spectre microlocal est vraiment une perturbation d'ordre $O(\hbar^{\infty})$ du spectre exact, incluant les multiplicités.

Le spectre conjoint...

Il y a plusieurs façons de définir le spectre conjoint (discret) d'un système complètement intégrable quantique. La plus économique est probablement la suivante. Soient donc P_1, \ldots, P_n des \hbar -opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 sur une variété compacte X ou sur $X = \mathbb{R}^n$, à symbole dans $S^0(X, 1)$, auto-adjoints ⁽¹⁾. On suppose qu'ils commutent sur $L^2(X)$.

Rappelons qu'on fait toujours l'hypothèse que l'application moment des symboles principaux $p = (p_1, \ldots, p_n)$ est *propre*, au moins dans la zone spectrale qui nous intéresse : il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que $p^{-1}(K)$ est compact. Puisque l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_j x_j^2$ est également propre,

^{(1).} Ici les P_j sont bornés; il n'y a donc pas de subtilité sur la notion d'opérateur autoadjoint. Dans le cas plus général où $P_j \in S^0(X, N)$ et $\sum_j P_j^2$ est elliptique à l'infini on peut supposer que les P_j sont essentiellement auto-adjoints. En effet, comme remarqué dans [22], si l'on ne s'intéresse qu'à une partie bornée du spectre conjoint — ce qui est en effet notre cas — on obtient des opérateurs essentiellement auto-adjoints en se ramenant par une troncature du type $f(P_1^2 + \cdots P_n^2)$ à des symboles semi-bornés.

l'opérateur $P^2 := P_1^2 + \cdots + P_n^2$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre zéro, à symbole principal propre dans un certain compact. On sait alors que dans ce compact le spectre de P^2 est discret (voir par exemple [79]). Soit λ une valeur propre de P^2 ; les P_j agissent sur l'espace propre associé, qui est de dimension finie. On peut donc les y diagonaliser simultanément et on obtient un certain nombre de *n*-uplets $(E_1, \ldots, E_n) \in K$ qui sont les valeurs propres des P_j pour une même fonction propre. On appelle *spectre conjoint* l'ensemble de tels *n*-uplets. Autrement dit

Définition 5.1.1 *Le spectre conjoint de P dans K est l'ensemble* $Sp(P_1, ..., P_n)$ *des* $(E_1, ..., E_n) \in K$ *tels qu'il existe* $\Psi \in L^2(X)$ *normalisée vérifiant*

$$\forall j, \quad P_i \Psi = E_i \Psi.$$

Cette définition convient parfaitement à nos besoins. Pourtant, il me semble légitime de la trouver quelque peu frustrante. Pourquoi donner un tel rôle à P^2 ? Et surtout, peut-on définir un spectre conjoint plus général, qui ne serait pas nécessairement discret? Dans [22], Charbonnel répond parfaitement à ces questions (dans le cadre auto-adjoint), de la façon suivante. On commence par montrer que les mesures spectrales des P_i commutent, ce qui permet de construire une mesure spectrale conjointe, définie sur \mathbb{R}^n . Le spectre conjoint est alors défini à l'aide des projecteurs spectraux, de la façon habituelle : est élément du spectre tout $E = (E_1, \ldots, E_n)$ pour lequel le projecteur spectral sur tout cube ouvert contenant *E* est non nul. Le *spectre conjoint discret* est l'ensemble de tels *E* pour lesquels il existe un cube ouvert contenant *E* dont le projecteur spectral est de rang fini. Un tel ensemble est discret et les espaces propres correspondants (au sens de la définition 5.1.1 ci-dessus) sont de dimension finie.

Il reste à montrer que, sous les mêmes hypothèses que précédemment, le spectre conjoint de (P_1, \ldots, P_n) est bien discret dans *K*. La stratégie adoptée est d'utiliser le calcul fonctionnel à *n* variables :

Lemme 5.1.2 ([22]) Le spectre conjoint de $(P_1, ..., P_n)$ est discret dans le compact K si et seulement si $f(P_1, ..., P_n)$ est un opérateur compact, pour toute fonction f à support dans l'intérieur de K.

Démonstration. Si le spectre est discret on voit par les projecteurs spectraux que $f(P_1, \ldots, P_n)$ est de rang fini, donc compact. Réciproquement si $f(P_1, \ldots, P_n)$ est un opérateur compact et $f \equiv 1$ sur un compact $\tilde{K} \subset K$ alors soit $\Pi_{\tilde{K}}$ le projecteur spectral sur \tilde{K} ; on voit par calcul fonctionnel que $\Pi_{\tilde{K}} = \Pi_{\tilde{K}} f(P_1, \ldots, P_n)$, et donc est compact. Or un projecteur compact doit être de rang fini.

Pour montrer que $f(P_1, ..., P_n)$ est compact, il suffit essentiellement de montrer que c'est bien un opérateur pseudo-différentiel, puisque par calcul symbolique il sera dans $S^0(X, -N)$ pour tout N > 0 et donc à trace (voir par exemple [46]). L'approche originale, celle de Helffer-Robert [79] adaptée au cas à plusieurs variables par Charbonnel [20], utilise la transformée de Mellin. Une méthode probablement plus simple consiste à écrire la formule de Cauchy, appelée parfois dans ce contexte formule de Helffer-Sjöstrand (voir le livre [46]).

...et son approximation semi-classique

Le spectre conjoint microlocal (définition 4.1.10) a été déterminé essentiellement en construisant de bons quasi-modes. On sait bien qu'en général cette méthode ne permet pas d'explorer avec certitude l'ensemble du spectre exact. Pourtant, c'est bien le cas ici... car on est allé plus loin que la simple construction de quasi-modes : on prend également en compte la *multiplicité* des solutions microlocales.

Bien entendu, la résolution spectrale maximale qu'on peut atteindre avec ces méthodes est $O(\hbar^{\infty})$. Si $E(\hbar)$ et $E'(\hbar)$ sont des familles admissibles de vecteurs réels vérifiant $E(\hbar) - E'(\hbar) = O(\hbar^{\infty})$ alors toute solution microlocale de $(P - E)u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ est également solution microlocale de $(P - E')u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$. On appelle « multiplicité microlocale » de $E(\hbar)$ la dimension, au sens de la proposition 3.2.12, de l'espace des solutions microlocales de cette équation.

Proposition 5.1.3 Sur le compact K les spectres microlocal et exact vérifient

$$\Sigma_{\hbar}(P_1,\ldots,P_n) = \operatorname{Sp}(P_1,\ldots,P_n) + O(\hbar^{\infty})$$
(5.1)

et pour toute famille $E(\hbar) = (E_1(\hbar), ..., E_n(\hbar))$ ayant une limite $E \in K$ lorsque $\hbar \to 0$, si la multiplicité microlocale de $E(\hbar)$ est bien définie et est finie, alors elle est égale pour \hbar assez petit au rang du projecteur spectral conjoint des P_j sur une boule de taille $O(\hbar^{\infty})$ autour de $E(\hbar)$.

Démonstration. Si $E(\hbar) \in \Sigma_{\hbar}(P_1, \ldots, P_n)$ il existe une solution microlocale de $(P - E(\hbar))u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$ sur la fibre lagrangienne $\Lambda_0^E = p^{-1}(E)$ (on doit prendre en compte ici toutes ses composantes connexes). Puisque cette fibre est compacte, on peut appliquer le lemme 1.2.7 et obtenir une solution exacte de $(P - E(\hbar))u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$. Cette solution u_{\hbar} est donc un quasi-mode et par les arguments spectraux standard (caractérisation variationnelle) on en déduit que $E(\hbar) \in \text{Sp}(P_1, \ldots, P_n) + O(\hbar^{\infty})$.

Réciproquement si $E(\hbar) \in \text{Sp}(P_1, ..., P_n) + O(\hbar^{\infty})$ il existe une famille admissible de valeurs propres conjointes exactes $E'(\hbar)$, telles que

$$E(\hbar) - E'(\hbar) = O(\hbar^{\infty}).$$

Les fonctions propres normalisées associées $v_h \in L^2(X)$ forment une famille admissible qui est *a fortiori* solution microlocale de $(P - E(\hbar))v_{\hbar} =$

5.2. LE DIAGRAMME DE BIFURCATION

 $O(\hbar^{\infty})$ et donc microlocalisée sur Λ_0^E et non triviale. Autrement dit $E(\hbar) \in \Sigma_{\hbar}(P_1, \ldots, P_n)$, ce qui montre (5.1).

Soit $E(\hbar)$ une famille tendant vers E lorsque $\hbar \to 0$, et soit d la dimension de l'espace des solutions microlocales de $(P - E(\hbar))u_{\hbar} = O(\hbar^{\infty})$. Considérons l'espace engendré par les fonctions propres u_{\hbar} associées à une famille de valeurs propres $E'(\hbar)$ telles que pour tout N il existe C_N tel que $|E(\hbar) - E'(\hbar)| \leq C_N \hbar^N$ pour $\hbar \leq 1$. Soit $r \leq \infty$ le rang de cet espace, c'est-àdire le nombre maximal de telles familles de fonctions propres u_{\hbar} , normalisées, et qui pour \hbar assez petit restent toujours mutuellement orthogonales.

Soit $(u_{\hbar}^{1}, \ldots, u_{\hbar}^{r})$ une « base » correspondante. Comme ci-dessus, chaque u_{\hbar}^{ℓ} est également une solution microlocale et donc microlocalement combinaison linéaire des d solutions microlocales basiques. Donc si r > d il existe une combinaison linéaire des u_{\hbar}^{ℓ} microlocalement triviale. Puisque toutes ces fonctions ont un front d'onde sur Λ_{0}^{E} on constate par le lemme 1.2.4 que cette combinaison linéaire est en fait $O(\hbar^{\infty})$ dans L^{2} . Ceci n'est pas possible si les u_{\hbar}^{ℓ} restent orthogonaux pour tout \hbar .

Ce résultat n'a été utilisé pour le moment que pour les conditions de Bohr-Sommerfeld régulières (E est une valeur régulière et la multiplicité microlocale est d = 1 en vertu du théorème 4.1.9) et dans la situation foyer-foyer [147], où on peut se ramener à d = 1 également (théorème 3.3.18). On l'appliquera au chapitre suivant dans la situation complètement elliptique, où d est encore égale à 1. Dans chacun de ces cas les fonctions propres sont vraiment approchées par les solutions microlocales, c'est-à-dire les constructions de quasi-modes de type *WKB*. Dans un certain nombre de cas singuliers il est beaucoup plus facile de se restreindre à une fenêtre spectrale de taille $O(\hbar)$, puisqu'alors l'« énergie » classique E est fixée (voir par exemple [38]).

Remarque 5.1.4 En général les valeurs propres $E(\hbar)$ localisées près d'une valeur E de l'énergie classique ne dépendent *pas* continûment de \hbar . Pourtant, vues comme ensemble de points, les valeurs propres dépendent souvent de \hbar de façon très régulière, par un argument de perturbation à la Kato. Mais si on essaie de suivre une telle valeur propre, on s'aperçoit qu'elle « s'enfuit » très vite hors de la fenêtre spectrale pour s'accumuler — génériquement — vers les points fixes elliptiques. Dans le cas des conditions de Bohr-Sommerfeld régulières, il faut penser à $E(\hbar)$ comme une suite de la forme $E(\hbar) = E_0 + \hbar k(\hbar)$, où $k(\hbar) \in \mathbb{Z}^n$ de telle sorte que $E(\hbar)$ tende vers un vecteur $E \in \mathbb{R}^n$ fixé.

5.2 Le diagramme de bifurcation

Le spectre conjoint du système, bien qu'il soit déterminé par la géométrie du feuilletage lagrangien dans l'espace des phases, se lit sur \mathbb{R}^n , qui est



FIGURE 5.1: Allure du spectre et de $E(\hbar)$ en fonction de \hbar

l'espace but de l'application moment classique *F*. L'idée directrice de l'étude spectrale est justement que, dans la limite semi-classique, les caractéristiques du spectre conjoint sont liées à la structure de l'ensemble des valeurs (régulières et singulières) de *F*. On appelle en général cet ensemble le *diagramme de bifurcation* ; c'est un outil très utile pour l'étude du feuilletage lagrangien, même dans le cas purement classique. Il encode assez fidèlement les bifurcations des tores de Liouville au passage de singularités.



FIGURE 5.2: Un exemple typique de diagramme de bifurcation pour n = 2.

Dans certains cas, le diagramme de bifurcation détermine entièrement la variété symplectique munie de sa fibration lagrangienne (cas torique, voir 5.5). En général ça n'est pas vrai. Mais on peut arguer que sous certaines hypothèses de généricité, il est encore possible de reconstruire le système à partir de son diagramme de bifurcation [165]. Les pièces du puzzle sont alors données par les singularités non dégénérées.

Par exemple, pour n = 2, le diagramme de bifurcation d'une application moment dont toutes les singularités sont non dégénérées se construit à partir des pièces élémentaires suivantes :



123

Les sections suivantes montreront dans certains cas comment le spectre conjoint se positionne par rapport au diagramme de bifurcation. De façon très générale on voit déjà, par l'ellipticité des symboles, que le spectre conjoint de (P_1, \ldots, P_n) est inclus dans un voisinage de taille $\mathcal{O}(\hbar)^{(2)}$ de l'ensemble des valeurs atteintes par l'application moment $p = (p_1, \ldots, p_n)$.

5.3 Fibrations régulières : le cas de la monodromie

Monodromie affine classique

On a vu au paragraphe 4.1 (proposition 4.1.5 et remarque 4.1.6) que le théorème de Liouville-Arnold-Mineur définit au voisinage des valeurs régulières de l'application moment *F* des variables d'action. Considérées comme des cartes locales de l'ouvert B_r des valeurs régulières, elles munissent B_r d'une structure de variété affine entière de groupe de structure le groupe affine $GA(n, \mathbb{Z}) = GL(n, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ (définition 4.1.4, page 90). B_r possède donc une connexion affine, et venant de là un transport parallèle et un groupe d'holonomie.

Définition 5.3.1 *La monodromie affine* du système intégrable donné par F est l'holonomie μ de la variété affine entière B_r .

De façon abstraite cette holonomie est le cocycle associé au $GA(n, \mathbb{Z})$ -fibré principal associé au fibré tangent TB_r . De nombreuses façons d'interpréter cette monodromie existent, en particulier lorsqu'on se restreint à sa partie linéaire $[150]^{(3)}$. Du point de vue de la variété affine B_r , il est naturel d'introduire la *développante* D. Étant donnés un point $c \in B_r$ et une carte affine au voisinage de $c : \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ (où \mathbb{R}^n est muni de sa structure affine entière canonique), on se pose la question d'étendre le plus largement possible cette carte sur la variété B_r . À cause de l'holonomie, des obstructions peuvent apparaître lorsqu'on suit un cycle fermé non trivial sur B_r . Soit \tilde{B}_r le revêtement

^{(2).} L'estimation $\mathcal{O}(\hbar)$ n'est *a priori* uniforme que sur tout compact.

^{(3).} La partie linéaire de la monodromie affine, appelée simplement monodromie, est par exemple le *dual* de l'holonomie du fibré plat des groupes d'homologie des fibres de la fibration en tore au-dessus de B_r . C'est le point de vue de [52].



FIGURE 5.3: Monodromie affine classique

simplement connexe de B_r et soit $\tilde{c} \in \tilde{B_r}$ relevant c. La développante D est l'unique application

$$D: \tilde{B_r} \to \mathbb{R}^n \tag{5.2}$$

qui est affine et qui coïncide avec φ près de \tilde{c} .

Étant donné un lacet $\gamma \in \pi_1(B_r; c)$, on peut comparer, sur un voisinage U de c, les cartes affines $D_{\uparrow U}$ et $\omega(D_{\uparrow \tilde{U}})$, où ω est la projection $\omega : \tilde{B}_r \to B_r$ et \tilde{U} est l'image de U par transport parallèle le long de γ . La monodromie affine

$$\mu(c): \pi_1(B_r; c) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$$

appliquée à γ est alors l'automorphisme

$$\mu(c)(\gamma) = \mathcal{O}(D_{\restriction \tilde{U}}) \circ (D_{\restriction U})^{-1}$$

On remarque qu'un changement de la carte initiale φ qui sert à définir *D* induit une nouvelle monodromie qui diffère de l'ancienne par conjugaison par un élément du groupe de structure.

Monodromie quantique

En développant une idée de Cushman et Duistermaat, on peut montrer comment cette monodromie se lit sur le *spectre conjoint* microlocal d'un système quantique correspondant. Il suffit d'utiliser la *structure affine semi-classique* définie en section 4.1, page 96. Cette structure est définie directement sur le spectre conjoint, au moyen de l'hypothèse de transversalité (4.2).

Définition 5.3.2 L'holonomie de la structure affine semi-classique est appelée *monodromie quantique* du système. Puisque la structure affine semi-classique possède un groupe discret $GA_{\mathbb{Z}}(n,\mathbb{Z})$ et un atlas qui converge vers celui de la structure affine classique associée, on en déduit facilement que, pour \hbar assez petit, la monodromie de la structure semi-classique est *identique* à celle de la structure affine entière classique. Rappelons qu'on peut même se restreindre à la partie linéaire de la monodromie classique, puisque cette dernière est exacte.

Théorème 5.3.3 ([146]) Étant donné un lacet γ dans l'espace des énergies régulières, la monodromie quantique le long de γ est égale, pour \hbar assez petit, à la monodromie classique correspondante.

On en déduit par exemple le calcul de la monodromie quantique autour d'une valeur critique de type foyer-foyer (paragraphe suivant). Depuis 1999, de nombreux exemples de mécanique quantique (souvent tirés de problèmes moléculaires ⁽⁴⁾) sont venus étayer ce résultat. On consultera par exemple [153], [27], [118], [70] ou encore [47]. D'autres exemples apparaîtront très probablement encore pendant longtemps...

La monodromie quantique se manifeste de façon spectaculaire sur le dessin d'un spectre conjoint. On peut la constater aisément en effectuant le transport parallèle « à la main » d'une petite cellule élémentaire, comme sur la figure 5.4, qui montre le spectre du pendule sphérique quantique.



FIGURE 5.4: Détermination manuelle de la monodromie quantique

Une construction à mon avis plus instructive que le transport parallèle de la figure 5.4 consiste à introduire, comme dans le cas classique, la *dévelop*-

^{(4).} et le plus souvent dans les systèmes moléculaires à petit nombre de dégrés de liberté, comme la molécule d'eau. À ce sujet, l'unversité d'état de l'Ohio a fièrement annoncé en juin 2005 la « First Experimental Evidence of Molecular Quantum Monodromy ».

pante. On obtient une application $D(\hbar)$, associée à une carte locale de Bohr-Sommerfeld (qui envoie localement le spectre conjoint régulier sur le réseau $2\pi\hbar\mathbb{Z}^n$). « Manuellement », la construction est encore extrêmement simple (et amusante). On commence par déformer γ de façon à ce qu'il passe par un nombre raisonnable de points entiers (valeurs propres conjointes). Une fois fixé l'un de ces points comme départ, on envoie (par la développante) une portion du spectre conjoint autour de ce point sur un réseau droit puis, de proche en proche le long du lacet γ , on déroule tout le lacet γ . On obtient en général un lacet ouvert : l'extrémité finale est l'image du point initial par la monodromie quantique. Voir les figures 5.5(a) et 5.5(b).

Remarque 5.3.4 On se rend bien compte que, d'une certaine façon, la monodromie quantique « saute aux yeux », au moins lorsque ces yeux scrutent un spectre quantique de manière adéquate. L'autre invariant des systèmes intégrables mis en évidence par Duistermaat, la classe de Chern, reste quant à lui beaucoup plus mystérieux. Même en l'absence de monodromie, une classe de Chern non nulle implique un déphasage global dans la définition des variables « angles » du théorème de Liouville-Arnold-Mineur. Ce déphasage devrait se manifester sur les *fonctions propres conjointes* du système, et également dans les conditions de Bohr-Sommerfeld, mais au-delà des termes standard qui ne font apparaître que les actions. La grosse difficulté actuelle est l'absence d'exemple pertinent ayant une classe de Chern non triviale. \triangle

5.4 Foyer-foyer et monodromie

Une propriété remarquable des singularités foyer-foyer pour un système à deux degrés de liberté est qu'elles impliquent la présence d'une monodromie non triviale universelle pour la fibration régulière qui entoure la fibre critique. Ce résultat est valable de façon générale pour des fibrations en tores possédant une fibre singulière isolée générique [113, 103]; il a été redécouvert dans le cadre hamiltonien dans les années 1996-1997 par plusieurs personnes, dont Nguyên Tiên Zung [166] et Matveev [104].

Théorème 5.4.1 ([104, 166]) Soit c une valeur critique de l'application moment classique $F = (f_1, f_2)$, dont la fibre $\Lambda_c = F^{-1}(c)$ admet k points critiques de type foyer-foyer, à l'exception de tout autre point critique. Alors la monodromie affine associée à un cycle de degré 1 autour de c est conjuguée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

La preuve de ce résultat est très simple si on utilise la structure locale des singularités foyer-foyer (voir aussi [41] dans le cas non nécessairement Hamiltonien). La particularité de la situation hamiltonienne est que la monodromie est orientée : si, dans le cas topologique, la matrice de monodromie s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +1 & 1 \end{pmatrix}$, dans le cas hamiltonien, le signe est prescrit, et toujours positif. Il suffit pour cela de fixer une orientation sur \mathbb{R}^2 et l'application moment (ainsi que la forme symplectique) induisent une orientation naturelle sur chaque tore lagrangien, et donc sur leur homologie [42]. Du point de vue quantique Zhilinskií suggère d'interpréter ce signe comme le fait qu'autour du point foyer-foyer, le "réseau" des valeurs propres conjointes possède un défaut ponctuel (dans le sens où un certain nombre de points ont dû être enlevés, et non rajoutés) [118]. Cette assertion peut être vérifiée par les conditions de Bohr-Sommerfeld singulières dont nous avons déjà parlé et qui donnent la position précise des valeurs propres près de la singularité [147]. Une autre façon de visualiser ces défauts ponctuels est d'utiliser la méthode de la développante, comme montré sur les figures 5.5(a) et 5.5(b). On retrouve par cette expérience le fait que la monodromie quantique d'une singularité foyer-foyer possède un sous-réseau de points fixes (les points sur la droite $E_2 = 0$, ce qui correspond au deuxième vecteur de la base dans laquelle est donnée la matrice 5.3). Cette construction ouvre de nouveaux problèmes. Par exemple, dans [147] on montre que dans le cas d'un point fixe de la développante, le nombre de points entiers compris à l'intérieur du polygone obtenu est — pour \hbar assez petit — précisément égal au nombre de valeurs propres conjointes à l'intérieur du chemin γ .

Grâce à la masse d'exemples physiques exhibant une monodromie non triviale, le champ de recherche ouvert par la monodromie quantique demeure très vaste. J'ai déjà mentionné la généralisation proposée par Nekhoroshev, Sadovskií et Zhilinskií concernant la monodromie dite fractionnaire, qui mérite certainement qu'on s'y intéresse de plus près. Dans les sections suivantes on examine le jeu de la monodromie dans les systèmes presque toriques.

5.5 Systèmes toriques et polyades

Le cas le plus simple de systèmes intégrables dont on connaisse parfaitement la géométrie globale est celui des systèmes toriques.

Oscillateurs harmoniques

Pour motiver les définitions qui vont suivre, examinons l'exemple le plus simple de système torique : un ensemble de *n* oscillateurs harmoniques découplés, déjà présentés en section 2.1. Précisément on considère l'application moment $q = (q_1, ..., q_n)$ sur \mathbb{R}^{2n} , où $q_j = \frac{1}{2}(x_j^2 + \xi_j^2)$. Le système quantique correspondant, qu'on obtient par quantification de Weyl, est $Q = (Q_1, ..., Q_n)$ avec $Q_j = \frac{1}{2}(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_j^2)$. Le spectre conjoint de Q est



(a) Le chemin γ , compris dans un anneau entourant la valeur critique foyer-foyer, est développé sur le réseau affine $2\pi\hbar\mathbb{Z}^2$ en prenant A_0 comme point base. Le point final A_ℓ est l'image de A_0 par la monodromie $\mu(\gamma)$.



(b) La construction est la même qu'à la figure 5.5(a), mais le point de départ est choisi sur la droite $E_2 = 0$. On constate que ce point est fixé par la monodromie.

FIGURE 5.5: Développement du spectre conjoint et visualisation de la monodromie quantique

l'ensemble discret

$$\Sigma(Q) = \{ (\hbar(\alpha_1 + \frac{1}{2}), \dots, \hbar(\alpha_n + \frac{1}{2})) \in \mathbb{R}^n, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N} \}.$$

Supposons maintenant qu'on se donne un Hamiltonien $\hat{H} = \langle k, Q \rangle$ où $k \in \mathbb{Z}^n$. Son spectre est l'ensemble des $E \in \mathbb{R}$ qui peuvent d'écrire sous la forme

$$E = \hbar(\langle k, \alpha \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j} k_{j});$$

en d'autres termes, c'est l'intersection d'un hyperplan orthogonal à k avec le "réseau positif" $\hbar \mathbb{N}^n$. On l'appelle la *polyade* d'énergie *E* (figure 5.6). Le



FIGURE 5.6: Les polyades de l'oscillateur harmonique en résonance 2 : 1 (c'est-à-dire k = (2,1)). Les nombres de valeurs propres dans chaque polyade forment la suite 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...

nombre de valeurs propres dans cette polyade possède des propriétés arithmétiques bien connues lorsque $|\alpha| \rightarrow \infty$ (ou $\hbar \rightarrow 0$). Le comportement asymptotique principal est donné par un terme dit « de Weyl » qui correspond au volume symplectique de l'image réciproque par *q* de la « polyade classique », c'est-à-dire la variété d'équation $\langle k, q \rangle = E$. Les termes suivants de l'asymptotique sont des termes oscillants dépendant des propriétés arithmétiques des composantes de *k*. De nombreuses variantes et généralisations de ce problème font intervenir des quantités algébriques et combinatoires comme le polynôme d'Ehrhart, le polynôme de Hilbert-Samuel, ou la formule de Riemann-Roch (voir par exemple [17, 15, 30]). Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on a également de jolies formules en termes de fonctions génératrices [124].

Systèmes de type torique

On se donne un système complètement intégrable (f_1, \ldots, f_n) d'application moment *F toujours supposée propre*.



FIGURE 5.7: Construction d'une fibration lagrangienne de $S^2 \times S^2$ qui n'est pas de type torique. Partant d'une base de la fibration difféomorphe à un disque, on obtient une base difféomorphe à un anneau sans changer le type de singularité des fibres. Mais dans la fibration finale, certaines fibres ne sont pas connexes !

Définition 5.5.1 Le système F est dit **de type torique** s'il existe une action hamiltonienne effective de \mathbb{T}^n avec une application moment Φ de la forme $\Phi = \varphi \circ F$ où φ est un difféomorphisme local sur l'image de F.

Rappelons que par le théorème d'Atiyah [6] et Guillemin-Sternberg [73] les fibres de l'application moment pour une action hamiltonienne de tore sont connexes et l'image est un *polytope rationnel convexe*, et par le théorème de Delzant [45] cette image détermine entièrement la variété M et l'application moment Φ (à isomorphisme près) dans le cas complètement intégrable. En réalité le théorème de connexité/convexité est énoncé dans le cas où M est compacte, mais il reste valable dans le cas d'une application moment propre [96] (le « polytope » n'étant plus nécessairement borné). Dans ce livre on utilise la terminologie *polytopes* et *polygones* pour des ensembles polyédraux non nécessairement compacts.

Attention, l'exemple suivant n'est pas de type torique : On part d'un système torique de $S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont l'image est un carré. En restant de type torique, on peut déformer la base en un rectangle allongé. Par une nouvelle transformation de la base, on courbe le rectangle en faisant se chevaucher les extrémités (figure 5.7). On obtient une fibration lagrangienne *F* de $S^2 \times S^2$ sur un anneau, dont les fibres sont des tores et qui ne possède que des singularités de type elliptiques, mais *qui n'est pas de type torique* (on a construit $F = \varphi \circ \Phi$ au lieu de $\Phi = \varphi \circ F$).

En fait, on peut montrer que dans la définition 5.5.1 les fibres de *F* sont nécessairement connexes et φ est un difféomorphisme de l'image de *F* dans celle de Φ [152]. On connaît donc parfaitement la structure de la fibration lagrangienne. En particulier les seules singularités sont de type (transversalement) elliptique. En recollant les descriptions locales, on parvient ainsi assez aisément dans la situation semi-classique à une description globale du

spectre conjoint.

Théorème 5.5.2 Soit $P = (P_1, ..., P_n)$ un système complètement intégrable quantique, et $\Sigma_{\hbar}(P)$ son spectre conjoint. On suppose que le système des symboles principaux $p = (p_1, ..., p_n)$ est de type torique. Alors il existe une application φ_{\hbar} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n tel que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$,

- la restriction de φ_{\hbar} à K est un symbole classique dont le terme principal φ_0 est un difféomorphisme local ;
- les composantes de $\varphi_0 \circ F$ sont des variables d'action classiques ;
- $\varphi_{\hbar}(K \cap \Sigma_{\hbar}(P)) = 2\pi\hbar\mathbb{Z}^{n} \cap \varphi_{\hbar}(K).$

Démonstration. La preuve se fait en trois étapes. En premier lieu, on établit le résultat sur chaque compact, modulo $O(\hbar^{\infty})$. On montre ensuite qu'on peut se débarrasser du reste $O(\hbar^{\infty})$, ce qui finalement permet une définition globale de φ_{\hbar} .

Étape 1 — Il s'agit essentiellement de recoller des informations locales. Si *K* est un petit voisinage d'un point régulier de l'application moment classique *F*, l'existence d'un $\varphi_{\hbar,K}$ satisfaisant les propriétés énoncées *modulo* $O(\hbar^{\infty})$ est directement donnée par le théorème des variables actions-angles semi-classique. Si maintenant *K* est un petit voisinage d'un point critique, on conclut de même par le théorème 4.2.3, puisque les points critiques d'une application moment torique sont nécessairement de type transversalement elliptiques. Soit donc un compact *K* quelconque ; on l'écrit $\cup_j K_j$ où les K_j sont des petits compacts correspondants chacun à l'un des deux cas ci-dessus. Chaque K_j porte donc une « carte locale » φ_{\hbar,K_j} et ces cartes, sur les intersections $K_j \cap K_{j'}$, diffèrent d'un élément de $GA(n, \mathbb{Z})$, comme on l'a vu en construisant la structure affine semi-classique page 96. L'ensemble des valeurs de *F* étant simplement connexe on peut trivialiser ce cocycle et obtenir une carte φ_{\hbar} globale sur tout compact *K*.

Étape 2 — On se fixe un compact *K* et on considère l'application $\varphi_{h,K}$ définie à l'étape 1. D'après l'étape 1, il y a pour chaque \hbar un nombre fini de valeurs propres conjointes dans *K* et chacune est séparée des autres d'une distance d'ordre \hbar . On note $E_i(\hbar)$ ces valeurs propres. Pour chaque *j*, on a

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\varphi_{\hbar,K}(E_j(\hbar))\right) = \mathbf{1} + r_j(\hbar), \tag{5.4}$$

où l'exponentielle agit composante par composante, **1** est le n-uplet (1, ..., 1) et toutes les composantes de $r_j(\hbar)$ sont des nombres complexes d'ordre $O(\hbar^{\infty})$. Construisons à partir de r_j un symbole sur K : soit χ une fonction C_0^{∞} valant 1 au voisinage de 0 et posons

$$r_{\hbar}(c) := \sum_{j} \chi\left(\frac{\left\|c - E_{j}(\hbar)\right\|^{2}}{\hbar^{4}}\right) r_{j}(\hbar).$$

On voit directement que *r* est un symbole (à valeurs dans \mathbb{C}^n) d'ordre \hbar^{∞} . Pour $\hbar < \hbar_0$ assez petit, on peut définir $g_{\hbar} := -\Re(\frac{\hbar}{i}\ln(\mathbf{1} + r_{\hbar}))$ (toujours composante par composante); c'est encore un symbole d'ordre \hbar^{∞} . On remarque que $g_{\hbar}(E_j(\hbar)) = -\frac{\hbar}{i}\ln(\mathbf{1} + r_j(\hbar))$; en effet, le membre de droite est réel d'après (5.4). Posons $\tilde{\varphi}_{\hbar,K} := \varphi_{\hbar,K} + g_{\hbar}$; alors par construction

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\varphi}_{\hbar,K}(E_j(\hbar))\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\varphi_{\hbar,K}(E_j(\hbar))\right)\exp(-\ln(\mathbf{1}+r_j(\hbar))) = \mathbf{1}.$$

Autrement dit, $\tilde{\varphi}_{\hbar,K}$ possède les propriétés requises par le théorème sur le compact *K*.

Étape 3 — Avec les outils dont nous disposons ici, il n'y a pas de sens naturel à définir un objet φ_{\hbar} global. Certes en vertu de l'étape 1, tous les termes du développement asymptotique des $\tilde{\varphi}_{\hbar,K}$ sont indépendants de K et donc bien définis sur tout \mathbb{R}^n ; mais le point délicat est que les estimations $O(\hbar^{\infty})$ pour $r_j(\hbar)$ ne sont pas uniformes lorsque les valeurs propres $E_j(\hbar)$ tendent vers l'infini dans \mathbb{R}^n . Seule la limite inductive des $\tilde{\varphi}_{\hbar,K}$ lorsque Ktend vers \mathbb{R}^n est pertinente ; mais la valeur de \hbar pour laquelle elle est définie dépend du point considéré. Pour fabriquer un objet plus maniable, comme l'énoncé du théorème le prétend, on peut néanmoins procéder en donnant à φ_{\hbar} des valeurs arbitraires pour \hbar grand, comme suit. On se donne une suite de compacts emboîtés K_{ℓ} tendant vers \mathbb{R}^n ; pour chaque ℓ , on définit pour $\hbar \leq \hbar_{\ell}$ l'application $\varphi_{\hbar,\ell} := \tilde{\varphi}_{\hbar,K_{\ell}}$ par l'étape 2, en prenant soin de choisir une troncature χ indépendante de ℓ , ce qui assure que les $\varphi_{\hbar,\ell}$ sont compatibles par restriction, pour \hbar assez petit. On décrète ensuite par exemple que $\varphi_{\hbar,\ell} \equiv$ $\varphi_{\hbar_{\ell},\ell}$ pour $\hbar > h_{\ell}$. Le candidat final est la limite inductive $\lim_{K_{\ell} \subset \mathbb{R}^n} \varphi_{\hbar,\ell}$.

Polyades — Le spectre conjoint est ainsi transformé en une portion polygonale du réseau droit $2\pi\hbar\mathbb{Z}^n$ associée au polytope moment, éventuellement décalée par rapport à ce dernier à cause des termes sous-principaux.

Une fois choisi un vecteur de base du réseau dans lequel s'inscrit le spectre conjoint, on peut définir un regroupement de valeurs propres en associant celles qui sont dans un même hyperplan orthogonal à ce vecteur. On appelle ces « paquets » de valeurs propres des **polyades**, en référence au cas de l'oscillateur harmonique dans la littérature physico-chimique. On peut faire la construction formelle suivante (justifiable sur tout compact) : le système $\varphi_{\hbar}(P)$ est *torique* : son spectre est inclus dans $2\pi\hbar\mathbb{Z}^n$. Étant donné un vecteur entier ou rationnel $k \in \mathbb{Q}^n$ on considère l'opérateur

$$P^{(k)} := \langle k, \varphi_{\hbar}(P) \rangle : \tag{5.5}$$

son spectre est inclus dans $2\pi\hbar\mathbb{Z}/N$, pour un entier N fixé. (N = 1 si $k \in \mathbb{Z}^n$.)

(1)

5.5. SYSTÈMES TORIQUES ET POLYADES

Définition 5.5.3 On appelle **polyade** associée à k le spectre conjoint de P restreint à un sous-espace propre de $P^{(k)}$.

Via l'application φ_{\hbar} , une polyade associée à k est donc l'ensemble des points τ du réseau $2\pi\hbar\mathbb{Z}^n$ tels que $\langle \tau, k \rangle$ admette une valeur fixée dans $2\pi\hbar\mathbb{Z}/N$.

D'un point de vue classique, le symbole principal de $P^{(k)}$ définit une sous-action de S^1 ; les polyades correspondantes sont alors les *clusters* (amas) de Weinstein [156] associés aux Hamiltoniens périodiques. Weinstein montre que si le symbole principal engendre un flot périodique (et si les intégrales du symbole sous-principal sur les orbites du flot sont constantes) alors le spectre est regroupé en amas de taille $O(\hbar^2)$ disposés en progression arithmétique dont le pas est d'ordre ħ. Il faut noter que dans notre situation complètement intégrable, l'hypothèse de Weinstein sur les symboles sous-principaux n'est plus nécessaire. Le théorème de Weinstein (annoncé dans [155]) a été démontré simultanément et plus ou moins indépendamment⁽⁵⁾ par Chazarain [25] et Guillemin (voir [54]), puis généralisé à des opérateurs pseudo-différentiels (homogènes) généraux par Colin de Verdière [30], qui montre que la multiplicité des clusters est donnée par un certain polynôme (suivi de Boutet [16], Boutet-Guillemin [15] qui identifient ce polynôme algébriquement) et développé dans le cadre semi-classique par Helffer-Robert [80] et Dozias [48], et encore d'autres (ce théorème, ayant de nombreux liens avec la question de « quantification et réduction », a ouvert de nombreuses pistes de recherche sur la réduction symplectique singulière par des groupes plus généraux que S^1 , la formule de Riemann-Roch sur orbifolds, la cohomologie équivariante, etc. Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple le livre introductif [71]).

Sommets du polytope — Le théorème 5.5.2 fournit une preuve semi-classique amusante du corollaire suivant (qui peut également se montrer par des moyens plus habituels) : lorsque $M = T^*X$ (ce qui est évidemment le cas du théorème, sauf si on l'énonce dans le cadre des opérateurs de Toeplitz), il ne peut y avoir qu'un seul point critique de corang maximal. En effet dans le cas contraire le polytope moment possède une arête compacte. Un petit voisinage de cette arête contient un nombre fini de valeurs propres⁽⁶⁾ et au voisinage de chaque extrémité de l'arête — qui est un point elliptique —, on connaît grâce au théorème le comportement des valeurs propres lorsque $\hbar \rightarrow 0$: elles se dirigent linéairement (et donc *continûment*) vers ces extrémités. Pourtant, le théorème dit également que nombre de valeurs propres dans ce voisinage doit augmenter lorsque $\hbar \rightarrow 0$! Je laisse au lecteur le soin de visualiser la contradiction.

Cette restriction indique que l'intérêt du théorème ne réside pas réellement dans la description globale du spectre, qui ne serait valable que

^{(5).} En y regardant de près bien entendu les hypothèses ne sont pas les mêmes.

^{(6).} Voir par exemple la figure 5.10(c).

pour un nombre limité d'exemples, mais dans la description de toutes les parties (polyédrales, convexes) du spectre conjoint qui correspondent à un sous-système torique. Dans le cadre des opérateurs de Toeplitz sur une variété symplectique compacte — pour lequel le théorème serait sûrement valable — la restriction n'existerait plus. Les valeurs de \hbar pour lesquelles on peut quantifier une variété compacte sont d'emblée discrètes; on voit bien que l'argument du mouvement continu des valeurs propres ne tiendrait plus. D'ailleurs, dans un certain nombre d'exemples physiques, l'espace de phases compact est obtenu par réduction symplectique d'un espace cotangent. Dans ce cas le théorème s'applique au système avant réduction : les points fixes du système réduit redeviennent des singularités transversalement elliptiques et la restriction évoquée ne s'applique plus. Par exemple, partant d'un oscillateur harmonique en résonance 1 : 1 sur \mathbb{R}^4 (n = 2 et k = (1, 1)) on obtient la sphère symplectique S^2 en réduisant la surface d'énergie H = 1, isomorphe à S^3 . Du point de vue quantique, le spectre obtenu est égal à la polyade associée à E = 1, qui existe pour $\hbar = 1/\ell, \ell \in \mathbb{N}$.

Remarque 5.5.4 L'application φ_{\hbar} du théorème est bien sûr la *développante* du spectre conjoint définie au paragraphe précédent (équation (5.2)), qui ici se globalise, car pour un système torique l'ensemble B_r des valeurs régulières de l'application moment est simplement connexe. Le théorème offre une légère amélioration en incluant les valeurs critiques elliptiques et en se débarrassant dans l'énoncé du reste $O(\hbar^{\infty})$.

5.6 Systèmes presque toriques

Les systèmes de type toriques sont essentiellement des systèmes complètement intégrables dont les singularités sont non dégénérées de type elliptique, ou transversalement elliptique (même si énoncée telle quelle l'assertion est fausse : cf la proposition 5.6.3).

Un moyen peu douloureux de généraliser les systèmes toriques est d'admettre des singularités isolées dans l'image du moment, comme suit.

Définition 5.6.1 *Un système complètement intégrable avec application moment propre est dit presque torique lorsque toutes ses singularités sont non dégénérées, sans bloc hyperbolique.*

Autrement dit un système presque torique ne possède que des blocs de type elliptique ou foyer-foyer. La classification (à difféomorphisme près) des variétés compactes de dimension 4 admettant un système presque torique a été récemment annoncée par Leung et Symington.

Théorème 5.6.2 ([97]) Soit M une variété symplectique compacte de dimension 4 admettant une application moment presque torique. Alors M est difféomorphe à l'un des cas suivants : $S^2 \times S^2$, des sommes connexes de plusieurs copies de \mathbb{CP}^2 ,

 $S^2 \times T^2$ (produit direct ou produit tordu) éventuellement en somme connexe avec des $\mathbb{C}P^2$, une surface K3, une surface de Enriques, un fibré en tore sur T^2 ou sur le produit tordu $S^1 \tilde{\times} S^1$.

Les détails des constructions ainsi que la nature de la base de la fibration lagrangiennes sont expliqués dans [97]. En particulier on peut facilement voir qu'une fibration lagrangienne sur S^2 n'ayant que des singularités foyer-foyer possède nécessairement 24 fibres singulières! Voir également [42].

Parmi les propriétés élémentaires des systèmes presque toriques qui nous intéresseront dans la suite, on peut énoncer :

Proposition 5.6.3 ([152]) Soit F une application moment complètement intégrable, propre.

- Si toutes les singularités de F sont non dégénérées et l'ensemble des valeurs régulières de F est connexe, alors F est presque torique;
- Si F est presque torique alors F est de type torique si et seulement si l'ensemble des valeurs régulières de F est connexe et simplement connexe.

Systèmes à indice de défaut égal à 1

Il n'existe actuellement aucun résultat semi-classique général sur les systèmes presque toriques. Pour commencer cette étude, on va s'intéresser à une sous-classe simple de systèmes presque toriques à deux degrés de liberté, ceux dont l'indice de défaut est égal à 1 :

Définition 5.6.4 Un système intégrable presque torique $F = (f_1, f_2)$ sur une variété symplectique de dimension 4 a un **indice de défaut** égal à 1 s'il existe un difféomorphisme local $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ sur l'image de F tel que $\varphi_1 \circ F$ soit une application moment propre pour une action hamiltonienne effective de S¹.

Quitte à composer par φ (qui en réalité sera un difféomorphisme global sur l'image de *F*) on supposera dans toute la suite que F = (J, H), où *J* est précisément l'application moment de l'action de S^1 requise dans la définition. Pour de tels systèmes, l'image de l'application moment *F* admet une description simple.

Théorème 5.6.5 ([152]) Soit F = (J, H) un système presque torique d'indice de défaut égal à 1, avec les hypothèses ci-dessus. Soient $H^+(x) := \max_{J^{-1}(x)} H$ et $H^-(x) := \min_{I^{-1}(x)} H$. Soient J_{max} et J_{min} les valeurs extrêmes de J sur M. Alors

- 1. Les fonctions H^+ et H^- sont continues sur $[J_{\min}, J_{\max}]$;
- 2. *l'image* B = F(M) *est définie par*

 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad J_{\min} \leqslant x \leqslant J_{\max} \text{ et } H^-(x) \leqslant y \leqslant H^+(x)\}.\}$

(et donc est simplement connexe);

- 3. Les fibres de F sont connexes ;
- 4. l'ouvert B_r des valeurs régulières de F est donné par

$$B_r = B \setminus \{c_1, \ldots, c_{m_f}\},\$$

où les points isolés $c_1, \ldots, c_{m_f}, m_f \leq \infty$, sont les valeurs critiques des points foyer-foyer du système⁽⁷⁾.



FIGURE 5.8: Structure de l'image de F

Démonstration. Par le théorème d'Atiyah, Guillemin-Sternberg, les fibres de *J* sont connexes. Puisqu'elles sont également compactes, leurs images par *H* sont tout autant compactes et connexes. Ceci donne essentiellement le point 2.

Par la théorie de Morse, une discontinuité de H^{\pm} ne peut survenir qu'en une valeur critique de *J*. D'autre part, par le point 2., une telle discontinuité implique la présence dans la frontière ∂B d'un segment vertical. L'hypothèse d'être presque torique implique qu'un tel segment de valeurs critiques de *F* ne peut correspondre qu'à des singularités de type transversalement elliptique. L'image réciproque par *F* devrait donc être une sous-variété de minima ou maxima locaux pour *J*. Or on sait que c'est impossible, en vertu de la théorie de Morse-Bott pour les actions hamiltoniennes de $S^1 : J$ ne possède au maximum qu'une sous-variété localement maximale ou minimale [6]. Ceci démontre le point 1.

Pour montrer la connexité des fibres, on peut se restreindre aux valeurs régulières de *J*. Si *x* est une telle valeur, $Z := J^{-1}(x)$ est une variété compacte connexe. L'hypothèse de non-dégénérescence des singularités entraîne que la restriction de *H* à *Z* est une fonction de Morse-Bott d'indice 0 ou 2. Donc ses fibres sont connexes.

^{(7).} On appelle parfois ces points les « nœuds » (nodes) du système [133].

La preuve du dernier point est un peu plus compliquée, et utilise de façon essentielle le fait que la liste possible des singularités de *F* est très limitée (singularités non dégénérées). On montre que la connexité des fibres entraîne la connexité de B_r , car l'union des fibres critiques est de codimension au moins 2. Ensuite la connexité de B_r entraîne la locale connexité de B_r : en effet, seul un segment de valeurs critiques dans \mathring{B} pourrait empêcher la connexité locale ; mais de proche en proche ce segment contredirait la connexité de B_r . Cette connexité locale finalement implique que les seules valeurs critiques dans l'intérieur de *B* doivent être des points isolés, et donc de type foyer-foyer.

Polytopes généralisés — Les actions hamiltoniennes de S^1 sur une variété compacte de dimension 4 ont été classifiées topologiquement par Audin [7] et symplectiquement par Karshon [89]. On peut montrer que les systèmes à indice de défaut 1 sont souvent compacts (cf le corollaire 5.6.8) et donc relèvent de cette classification. Cependant, ce n'est pas vraiment la variété symplectique qui nous intéresse ici, dans la mesure où en général celle-ci est obtenue après un « découpage symplectique » adapté à la portion de système qui nous intéresse. Dans l'optique d'une analyse semi-classique, l'objet essentiel est l'image de l'application moment, munie de sa structure de variété affine entière (avec singularités).

Soit donc F = (J, H) un système presque torique d'indice de défaut égal à 1; on note $B \subset \mathbb{R}^2$ l'image de F, B_r l'ensemble des valeurs régulières, et m_f le nombre de valeurs critiques c_1, \ldots, c_{m_f} de type foyer-foyer. Soit le multi-signe $\vec{\epsilon} \in \{-1, +1\}^{m_f}$. On note ℓ_i la demi-droite verticale partant de c_i dans la direction donnée par ϵ_i . Soit k_i l'*indice de monodromie* de c_i (nous avons montré dans [42] que la monodromie dans cette situation est *abélienne* et s'identifie à un indice à valeurs entières).

Théorème 5.6.6 ([152]) Il existe un homéomorphisme ψ de B dans $\psi(B) \subset \mathbb{R}^2$ de la forme $\psi(x, y) = (x, \psi^{(2)}(x, y))$ tel que

- 1. en dehors de l'union des ℓ_i , ψ est un difféomorphisme affine (ie. $\psi \circ F$ sont des variables d'action locales)
- 2. ψ s'étend en une application C^{∞} multivaluée de B_r dans \mathbb{R}^2 et pour tout $i = 1, ..., m_f$ et tout $c \in \ell_i$ on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to c\\x< x_i}} d\psi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\\epsilon_i k_i & 1 \end{pmatrix} \lim_{\substack{(x,y)\to c\\x> x_i}} d\psi(x,y),$$
(5.6)

3. L'image de ψ *est un polygone rationnel convexe.*

Bien que le système F ne soit pas torique, le théorème fournit malgré tout un moyen de lui associer un polygone rationnel convexe, qui se révèle très



FIGURE 5.9: Construction du polygone

utile pour étudier le système. On verra par exemple au paragraphe suivant comment écrire des formules de localisation qui expriment les mesures de Duistermaat-Heckman associées aux actions du système en fonction de l'indice de monodromie.

La différence avec le cas torique, qui fait bien sûr tout l'intérêt de ces systèmes, est que le polygone moment « généralisé » n'est pas unique; au contraire, il est paramétré par un multi-signe \vec{e} , qui munit la classe de polygones possibles d'une structure de groupe abélien et exprime la non-unicité des variables d'action.

Formule de Duistermaat-Heckman et monodromie

Comme précédemment, soit F = (J, H) un système presque torique avec indice de défaut égal à 1, où on suppose d'emblée que *J* est précisément l'application moment de l'action de S^1 requise dans la définition 5.6.4. Notons ω la forme symplectique sur *M*. Associée à *J*, on peut introduire la *mesure de Duistermaat-Heckman*, qui est la mesure μ_I sur \mathbb{R} telle que

$$\mu_I([a,b]) = \operatorname{vol}(J^{-1}([a,b])),$$

où vol est le volume donné par la mesure $|\omega^2/2|$ — dite « de Liouville » — sur *M*. Cette mesure μ_J est donc par définition la transportée de la mesure de Liouville par *J*. Elle admet une densité notée ρ_J par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} : $\mu_J(dx) = \rho_J(x) |dx| / 2\pi$. On appelle souvent ρ_J la *fonction de Duistermaat-Heckman* associée à *J*. On sait qu'en général ρ_J est une fonction continue, *linéaire par morceaux* [55]. On sait également relier les changements de pentes aux singularités de *J* par des formules dites de *localisation* [55, 89]. Dans notre situation, on a introduit les indices de monodromie pour les singularités foyer-foyer. Comment exprimer ρ_J en fonction de ces indices ? En fait, la réponse est très simple. Et grâce à la représentation en polygones généralisés décrite ci-dessus, on obtient directement et simultanément le fait que ρ_J soit linéaire par morceaux et le calcul des pentes au moyen (entre autres) de la monodromie.

Pour cela introduisons quelques notations. Si $x \in]J_{\min}, J_{\max}[$ est une valeur critique de J, on sait par le théorème 5.6.5 que la droite J = x dans l'image de F rencontre soit un « coin » : une valeur critique de type elliptique-elliptique pour F, soit un « nœud » : une valeur critique de type foyer-foyer. On note $k(x) \ge 0$ la somme des indices de monodromie des points foyer-foyer sur cette droite. Si la droite rencontre un « coin » on introduit les quantités $e^+(x)$ ou $e^-(x)$ (selon que le coin se situe en haut ou en bas de l'image de F) de la façon suivante. En un point elliptique-elliptique, il existe des coordonnées symplectiques dans lesquelles on peut écrire $J = \frac{1}{2}(a(x^2 + \xi^2) + b(y^2 + \eta^2))$. Comme J engendre une action de S^1 , a et b sont des entiers, qu'on appelle les « poids » d'isotropie. On définit alors $e^{\pm}(x) = -\frac{1}{ab} \ge 0$ en présence d'un tel « coin », et $e^{\pm}(x) = 0$ sinon.

Théorème 5.6.7 ([152]) Soit F = (J, H) un système presque torique d'indice de défaut égal à 1, et tel que J est le Hamiltonien de l'action de S¹. Alors,

- 1. ρ_I est une fonction continue, linéaire par morceaux ;
- 2. si x est une valeur critique de J, la différence des pentes de ρ_J est donnée par la formule

$$ho_{J}'(x+0) -
ho_{J}'(x-0) = -\sum_{x} k(x) - e^{+}(x) - e^{-}(x) \leqslant -\sum_{x} k(x) \leqslant 0,$$

où la somme a lieu sur l'ensemble des points critiques de J dans $]J_{min}, J_{max}[$ (c'est-à-dire la projection sur l'axe horizontal des coins et nœuds de l'image de F).

Démonstration. Pour montrer le premier point, on construit un polygone généralisé associé au système. Par le théorème des coordonnées actionsangles on voit facilement que $\rho_J(x)$ est le volume symplectique de la variété réduite $J^{-1}(x)/S^1$. Puisque le polygone généralisé est localement affine pour la structure imposée par le système, on remarque que ce volume est donné par la longueur de la section du polygone par la verticale J = x. Cette longueur est bien sûr continue et linéaire par morceaux.

Il reste à calculer les pentes du polygone généralisé : le deuxième point du théorème est une conséquence de la structure des singularités elliptiqueelliptique qui forment les coins de l'image du moment, ainsi que de la modification de la structure affine du polygone généralisé due aux points foyerfoyer, décrite par la formule (5.6).

On voit que la monodromie a une grande influence sur la topologie. On a par exemple le résultat remarquable suivant.

Corollaire 5.6.8 *Dans la situation précédente, si J admet un unique minimum (ou maximum) et* $m_f \ge 2$, alors M est compacte.

Démonstration. On construit le polytope généralisé à partir du minimum (ou maximum). La différence initiale entre les pentes des côtés issus du minimum est au plus égale à 1, à cause de la structure des singularités elliptique-elliptique. Par le théorème chaque point foyer-foyer fait baisser cette pente d'au moins 1. Au bout de deux points foyer-foyer, cette pente devient négative donc le polytope est nécessairement borné. Donc $J_{\text{max}} < \infty$ et *M* est compacte.

En d'autres termes la présence de fibres foyer-foyer induit dans la variété symplectique une forme de « courbure » qui dans notre situation force rapidement la compacité. On pourrait même quantitativement montrer comment ces fibres foyer-foyer font diminuer le volume symplectique de *M*.

5.7 Bifurcations et redistribution de valeurs propres.

On se pose de façon générale le problème suivant. Soit un système intégrable quantique P(t) dépendant d'un paramètre $t \in [0,1]$ tel que P(0)et P(1) soient de type toriques. On sait donc décrire les spectres conjoints de P(0) et P(1) au moyen du théorème 5.5.2. Quelle est la relation entre les deux spectres?

Pour être un peu plus précis, supposons qu'il existe une direction rationnelle particulière dans l'image du symbole principal conjoint p(t) (munie de sa structure affine entière), indépendamment de t (c'est le cas par exemple s'il existe une sous-action de S^1 indépendante de t). On peut donc définir l'ensemble des *polyades* correspondantes pour P(0) et P(1). Comment les valeurs propres se réarrangent-elles d'un ensemble de polyades à l'autre? C'est le problème de la *redistribution* des valeurs propres. D'après le théorème 5.5.2 il suffit d'étudier la transformation du polygone moment pour obtenir l'asymptotique du nombre de valeurs propres dans chaque polyade.

Proposition 5.7.1 Soit P un système quantique de type torique, et soit $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^n$ son polytope moment. Soit $k \in \mathbb{Z}^n$ et $P^{(k)}$ l'opérateur défini en (5.5). Alors, pour tout $E^{(k)} \in \mathbb{R}$, le cardinal $\mathcal{N}(k, E; \hbar)$ de la polyade associée à k et d'énergie tendant vers $E^{(k)}$ (c'est-à-dire la multiplicité de la valeur propre $2\pi\hbar\ell$ pour $P^{(k)}$, pour une suite $\ell = \ell(\hbar)$ telle que $2\pi\hbar\ell \to E^{(k)}$ lorsque $\hbar \to 0$) est donné au premier ordre par le volume de la « tranche » correspondante du polytope :

$$\mathcal{N}(k,E;\hbar) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \operatorname{Vol}(\mathscr{P} \cap \{c \in \mathbb{R}^n; \langle k,c \rangle = E^{(k)}\}) + \mathcal{O}(\hbar^{1-n})$$

où Vol est le volume sur l'hyperplan $\langle k, c \rangle = E^{(k)}$ induit par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n .

Bien entendu le volume de ces « tranches » n'est autre que la fonction de Duistermaat-Heckman associée au Hamiltonien périodique $p^{(k)}$.

Le théorème 5.5.2 dit en réalité beaucoup plus : puisque le spectre est transformé en un ensemble de points entiers dans un polytope entier, on pourrait théoriquement calculer le cardinal des polyades au moyen d'un polynôme de type Ehrhart qui lui-même se calcule par une formule de Riemann-Roch associée à la variété (ou orbifold) réduite. Voir [17] et [15] pour des indices plus précis à ce sujet.

En étudiant l'exemple du couplage de deux spins (c'est un système hamiltonien sur $S^2 \times S^2$ qui vérifie nos hypothèses classiques) Sadovskií et Zhilinskií ont conjecturé que cette redistribution était liée à l'apparition de monodromie pour une certaine valeur intermédiaire de *t* [125].

Je voudrais juste donner quelques idées sur cette question et sur l'utilisation des polygones généralisés pour y répondre. Au moment de la rédaction de ce livre, les détails ne sont pas encore entièrement formalisés. Pour vérifier les travaux de Sadovskií et Zhilinskií au niveau quantique, on peut voir S^2 comme une variété réduite à partir de $T^*\mathbb{R}^2$. Avec la proposition ci-dessus en tête, je me contenterai juste de discuter l'aspect *classique*.

On fera l'hypothèse que le système est presque torique avec indice de défaut égal à 1, sauf pour un nombre fini de *t* qu'on appellera instants de bifurcation. En supposant que les seules bifurcations que subit le système soient des bifurcations de Hopf hamiltoniennes (qui correspondent à une transformation elliptique-elliptique \leftrightarrow foyer-foyer et sont génériques⁽⁸⁾), on confirme la conjecture de la façon suivante :

Proposition 5.7.2 Les polytopes correspondant à p(0) et p(1) sont des polygones généralisés d'un même système, le $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m_f})$ correspondant à leur différence est déterminé par la séquence des bifurcations de Hopf.

Autrement dit on passe d'un polygone à l'autre par une application affine par morceaux déterminée par la position des valeurs critiques qui bifurquent et leur indice de monodromie. Des bifurcations similaires ont été étudiées par Symington [133] sous le nom de « nodal slide » : la valeur critique foyerfoyer « glisse » vers le bord du polygone pour se transformer en valeur critique elliptique.

Supposons par exemple qu'on s'intéresse au spectre de la deuxième composante du système $P_2 = H$. Pour déterminer le changement observé dans le cardinal des polyades il suffit donc de comparer les formules donnant le volume des tranches horizontales des différents polytopes (formules de Duistermaat-Heckman). Cette comparaison est implicitement donnée par les transformations associées à \vec{e} , qui sont très simples. Écrire une formule explicite dans le cas général est, il est vrai, assez peu motivant ; c'est pourquoi

^{(8).} Elles sont génériques par exemple dans la classe des Hamiltoniens qui commutent avec une action de S^1 fixée.

la vision géométrique des transformations de polygone est, à mon sens, plus pertinente et suffit pour répondre à la question.

Remarque 5.7.3 Ce résultat a été la motivation essentielle pour introduire les polytopes généralisés, car ces derniers décrivent parfaitement de façon géométrique et combinatoire la redistribution des valeurs propres au sein des polyades. Il est naturel d'imaginer cependant qu'ils auront d'autres applications, pas nécessairement de type semi-classique (par exemple, un résultat de classification de type Delzant).

Remarque 5.7.4 Un problème semblable a été étudié par Faure et Zhilinskií [65] : dans le cadre de l'approximation de Born-Oppenheimer, on observe également des croisements de valeurs propres lorsqu'est varié un paramètre lent. L'arithmétique de cette redistribution est liée à l'indice de Chern (ou d'Atiyah-Singer) du fibré en vecteur propres. Il est naturel de penser que ce résultat est lié à celui de la proposition 5.7.2 en voyant l'approximation de Born-Oppenheimer comme un découplage des variables qui ferait donc apparaître un système intégrable. La limite semi-classique faisant apparaître la mesure de Duistermaat-Heckman correspondrait donc à la limite où le rang du fibré dans Atiyah-Singer tend vers l'infini, de façon analogue à [15]. \triangle

Exemple — Un exemple très simple où on observe la transformation du polytope moment généralisé est celui du couplage entre un oscillateur harmonique sur \mathbb{R}^2 et un « spin » : un moment angulaire sur S^2 . On peut le voir comme un dérivé du problème de Sadovskií et Zhilinskií obtenu en le linéarisant en un pôle d'une des deux sphères.

Sur $\mathbb{R}^2 = \{(u, v)\}$ on définit $N = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$.

Sur S^2 on définit le Hamiltonien z, coordonnée verticale lorsque $S^2 \in \mathbb{R}^3$ est la sphère $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

N et *z* ont tous deux un flot périodique de période 2π . On considère $M = S^2 \times \mathbb{R}^2$ et, sur *M*, le Hamiltonien périodique J = N + z. Enfin on introduit K = ux + vy: c'est le produit scalaire de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ avec la projection sur le plan (x, y) du point sur S^2 . Puisque, sous le flot de *J*, les projections d'un point de $S^2 \times \mathbb{R}^2$ sur ses facteurs S^2 et \mathbb{R}^2 tournent à la même vitesse, *K* est bien une quantité conservée : $\{J, K\} = 0$.

On peut alors définir sur *M* le système

$$F_t = (J, H_t)$$
 avec

$$H_t = (1 - 2t)(N - z) + tK.$$

On montre que F_t est *presque torique* pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, 1\}$. Elle est *de type torique* pour $t < \frac{1}{3}$ et t > 1 tandis que lorsque $t \in]\frac{1}{3}, 1[$ elle a un indice de défaut égal à 1. Les bifurcations à $t = \frac{1}{3}, 1$ sont de type Hopf hamiltonien. En particulier pour $t = \frac{1}{3}, 1, F_t$ possède une singularité qui *n'est pas* non dégénérée. L'évolution de l'image de l'application moment ainsi que les polytopes


moment généralisés correspondants sont montrés en figure 5.10. Il est fa-



FIGURE 5.10: Bifurcation de l'image du moment pour le couplage entre un spin et un oscillateur harmonique ($M = S^2 \times \mathbb{R}^2$). On a tracé les instants t = 1/5, 1/3, 1/2, 1 et 6/5. Le spectre conjoint a été calculé avec $\hbar = \frac{1}{4\pi}$.

cile d'obtenir le pendant quantique de cet exemple : si on voit S^2 comme une variété réduite à partir de \mathbb{R}^4 alors tous les opérateurs en jeu s'écrivent quadratiquement au moyen d'opérateurs de création et d'annihilation. Autrement dit, on peut tout quantifier par la quantification de Weyl. Un calcul numérique simple donne le tracé du spectre conjoint, en figure 5.10(c). Une version « animée » de ce spectre conjoint est visible sur la page web http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~svungoc/exposes/jspec.html.

Remarque 5.7.5 Les résultats présentés dans cette dernière partie n'ont certainement pas atteint leur formulation optimale. En particulier, au vu de la description du spectre conjoint dans le cas torique (théorème 5.5.2), il semble raisonnable que, même en présence de monodromie, on puisse montrer que le spectre semi-classique détermine entièrement le système classique. Bien sûr, il serait extrêmement intéressant de parvenir à incorporer les singularités hyperboliques dans cette problématique de « problème inverse », afin d'obtenir un énoncé général pour les systèmes admettant des singularités non dégénérées. \triangle

Index

A

action (intégrale d')	. 5, 10, 89, 92, 103
actions-angles	
affine	
groupe affine	
structure affine de Weinstein	
structure affine entière	90, 95, 123
Arnold, Vladimir	

B

Birkhoff (forme normale)	.44,	57
Bohr, Niels	9,	10
Bohr-Sommerfeld (règles)	96, 1	102

С

calcul symbolique	
Calderon-Vaillancourt (théorème)	
caustique	
Chern (classe de Chern-Duistermaat)	
cluster	
cocycle de Bohr-Sommerfeld	
cocycle de déformation d'un système intégrable	
commutant	66, 68, 77, 80

D

Darboux-Carathéodory (théorème)	
déformation infinitésimale d'un système	64
demi-densité	
densité spectrale	
développante	123, 125, 134
développement asymptotique	
diagramme de bifurcation	
Dirac (relations de commutation)	
double puits (potentiel à)	
Duistermaat-Heckman (formule)	

Ε	
Egorov (théorème)	
EINSTEIN, Albert	
Eliasson (théorème)	
ellipticité (d'un symbole)	
elliptique	voir singularité
équation cohomologique	
équivalence faible	
équivalence forte	
exact (symplectomorphisme)	

F

—	
faisceau	
feuilletage	
focus-focus	voir singularité
forme normale	
forme quadratique (classification symplectique)	
forme sous-principale	
Fourier (transformée)	
foyer-foyer	voir singularité
front d'onde	

Η

HEISENBERG, Werner	
holonomie	
homogène (théorie microlocale)	
Husimi (représentation)	
HUYGENS, Christiaan	
hyperbolique	voir singularité

Ι

intégrale oscillante	31
----------------------	----

Κ

Kolmogorov (condition)	
L	
lagrangienne (sous-variéte)	
Liouville-Arnold-Mineur (théorème)	
LIOUVILLE, Joseph	

Μ

mécanique	classique	.5,	15
mécanique	quantique	.8,	16

INDEX

MASLOV, Victor P.	11, 32
microsupport	voir front d'onde
MINEUR, Henri	
Mineur (formule)	
moment (application)	6, 16, 48, 65
application moment quantique	
monodromie	123, 124, 126
Moser (méthode)	
multiplicité (des valeurs propres conjointes)	

Ν

non auto-adjoint (opérateur)	
non dégénérée (singularité)	
non-dégénérescence (pour le théorème KAM)	.voir Kolmogorov

0

opérateurs intégraux de Fourier		30
opérateurs pseudo-différentiels	. 12, 18, 67, 69,	70
oscillateur harmonique		127

Р

pendule sphérique	
période	
périodique (Hamiltonien)	
polyade	127, 129, 132, 140
polytope moment	
polytope moment généralisé	
propre (application moment)	

Q

quasi-mode	 33,	. 92,	120
1			

R

K	
redistribution de valeurs propres	
réseau	9, 90, 96, 129, 132

S

SCHRÖDINGER Erwin	9.10
SCHRODINGER, EI WIII	
Schrödinger (opérateur)	17, 22, 25, 46
semi-global	
singularité	4, 8, 73
elliptique	50, 82, 97, 130
elliptique-hyperbolique	
foyer-foyer	2, 79, 85, 100, 126
hyperbolique	

INDEX

hyperbolique-hyperbolique	
solution microlocale	29, 71, 82
spectre conjoint exact	118, 120
spectre conjoint microlocal	93, 99, 120
spectre discret	
système complètement intégrable	6, 8, 59, 65

Т

Toeplitz (opérateur)	
tore de Liouville	6, 88
tore pincé	
torique (application moment)	
système de type torique	
système presque torique	
W	

Williamson (théorème)	• • • •	.7	79
-----------------------	---------	----	----

Table des figures

1	Christiaan Huygens et son livre sur les horloges à balancier	4
1.1 1.2 1.3	Représentation de Husimi et front d'onde d'une fonction BKW Construction d'une solution de $Pv_{\hbar} = O(\hbar^{\infty}) \dots \dots \dots$.	27 29
1.0	semi-classique	33
2.12.22.32.4	Les cercles invariants dans l'espace des phases de l'oscillateur harmonique	41 45 47 51
2.5 2.6	Trajectoires du pendule sphérique.Spectre conjoint du pendule sphériqueSpectre conjoint du pendule sphériqueSpectre conjoint du pendule sphérique	52 54
4.1 4.2	Le spectre conjoint microlocal et une carte affine semi-classique. Modèle de spectre conjoint près d'une singularité transversale-	96
4.3	ment elliptique	100
4.4	type foyer-foyer	101 101
4.5 4.6	Spectre conjoint au voisinage d'une valeur critique de type foyer- foyer	104 105
4.7	Les invariants symplectiques d'une singularité hyperbolique simple	e.107
4.8 4.9	La méthode du cocycle de Bohr-Sommerfeld sur le « 8 » Cercles critiques transversalement hyperboliques	109 111
4.10 4.11	Fibre critique hyperbolique avec symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ Portion du spectre conjoint pour une singularité transversale-	112
4.12	ment hyperbolique avec symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ Les quatre types topologiques d'une fibre hyperbolique-hyperbolique simple	113 <mark>ue</mark> 114
5.1	Allure du spectre et de $E(\hbar)$ en fonction de \hbar	122

5.2	Un exemple typique de diagramme de bifurcation pour $n = 2$.	122
5.3	Monodromie affine classique	124
5.4	Détermination manuelle de la monodromie quantique	125
5.5	Développement du spectre conjoint et visualisation de la mono-	
	dromie quantique	128
5.6	Les polyades de l'oscillateur harmonique en résonance 2 : 1	129
5.7	Construction d'une fibration lagrangienne de $S^2 \times S^2$ qui n'est	
	pas de type torique	130
5.8	Structure de l'image de <i>F</i>	136
5.9	Construction du polygone	138
5.10	Bifurcation de l'image du moment pour le couplage entre un spin	
	et un oscillateur harmonique ($M = S^2 \times \mathbb{R}^2$)	143

Bibliographie

- [1] ANNÉ (C.) et CHARBONNEL (A.-M.), « Bohr-Sommerfeld conditions for several commuting Hamiltonians », *Cubo*, vol. 6, nº 2, p. 15–34, 2004.
- [2] ARNOL'D (V. I.), « A theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics », *Siberian Math. J.*, vol. 4, 1963. English transl.
- [3] ARNOL'D (V. I.), « Characteristic class entering in quantization conditions », *Funkt. anal.i ego pril.*, vol. 1, nº 1, p. 1–14, 1967.
- [4] ARNOL'D (V. I.). Mathematical Methods of Classical Mechanics. Nº 60 in GTM. Springer, 1989. 2nd edition.
- [5] ARNOL'D (V. I.) et AVEZ (A.). Problèmes ergodiques de la mécanique classique. Nº 9 in Monographies Internationales de Mathématiques Modernes. Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [6] ATIYAH (M. F.), « Convexity and commuting Hamiltonians », *Bull. London Math. Soc.*, vol. 14, nº 1, p. 1–15, 1982.
- [7] AUDIN (M.). *The topology of torus actions on symplectic manifolds*. Progress in Math. Birkhäuser, 1991.
- [8] BALIAN (R.) et BLOCH (C.), « Solutions of the Schrödinger equation in terms of classical paths », *Ann. Phys.*, vol. 85, 1974.
- [9] BARGMANN (V.), « On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 19, p. 187–214, 1961.
- [10] BATES (S.) et WEINSTEIN (A.). Lectures on the Geometry of Quantization, vol. 8 (coll. Berkeley Mathematics Lecture Notes). AMS, 1997.
- [11] BEALS (R.), « A general calculus of pseudodifferential operators », Duke Math. J., vol. 42, p. 1–42, 1975.
- [12] BOLSINOV (A. V.) et FOMENKO (A. T.). *Integrable Hamiltonian systems*; *Geometry, topology, classification*. Chapman & Hall, 2004. Translated from the 1999 Russian original.
- [13] BOLSINOV (A.) et Vũ NGọc (S.). « Symplectic equivalence for integrable systems with common action integrals ». En préparation.

- [14] BOURBAKI (N.). *Groupes et algèbres de Lie*. Éléments de mathématique. Hermann, Paris, 1960–1975. Chap. 6.
- [15] BOUTET DE MONVEL (L.) et GUILLEMIN (V.). The spectral theory of Toeplitz operators. N° 99 in Annals of Mathematics Studies. Princeton university press, 1981.
- [16] BOUTET DE MONVEL (L.), « Nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique et polynôme de Hilbert-Samuel [d'après V. Guillemin] », *Séminaire Bourbaki*, nº 532, 1978/79.
- [17] BRION (M.), « Points entiers dans les polytopes convexes », Astérisque, nº 227, p. Exp. No. 780, 4, 145–169, 1995. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
- [18] BROER (H.). Bifurcation of Singularities in Volume Preserving Vector Fields. Thèse de Doctorat, Rijksuniversiteit te Groningen, 1979.
- [19] CHAPERON (M.). « Quelques outils de la théorie des actions différentiables ». dans III^e rencontre de géométrie de Schnepfenried, vol. 107-108 (coll. Astérisque), 1982.
- [20] CHARBONNEL (A.-M.), « Calcul fonctionnel à plusieurs variables pour des opérateurs pseudodifférentiels dans \mathbb{R}^n », *Israel J. Math.*, vol. 45, n° 1, p. 69–89, 1983.
- [21] CHARBONNEL (A.-M.), « Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent », Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5), vol. 5, nº 2, p. 109–147, 1983.
- [22] CHARBONNEL (A.-M.), « Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent », Asymptotic Analysis, vol. 1, p. 227–261, 1988.
- [23] CHARLES (L.), « Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators », Comm. Partial Differential Equations, vol. 28, nº 9-10, 2003.
- [24] CHARLES (L.) et Vũ NGọc (S.), « Spectral asymptotics via the semiclassical birkhoff normal form », *Duke Math. J.*, vol. 143, nº 3, p. 463–511, 2008.
- [25] CHAZARAIN (J.), « Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes », *Invent. Math.*, vol. 24, p. 65–82, 1974.
- [26] CHEVALLEY (C.) et EILENBERG (S.), « Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 83, p. 85–124, 1948.
- [27] CHILD (M. S.), WESTON (T.) et TENNYSON (J.), « Quantum monodromy in the spectrum of H₂O and other systems : new insight into the level structure of quasi-linear molecules », *Mol. Phys.*, vol. 96, nº 3, p. 371– 379, 1999.

- [28] COLIN DE VERDIÈRE (Y.), « Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques, i », *Compositio Math.*, vol. 27, p. 83–106, 1973.
- [29] COLIN DE VERDIÈRE (Y.), « Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent I », Duke Math. J., vol. 46, nº 1, p. 169–182, 1979.
- [30] COLIN DE VERDIÈRE (Y.), « Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques », *Comment. Math. Helv.*, vol. 54, p. 508–522, 1979.
- [31] COLIN DE VERDIÈRE (Y.), « Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent II », *Math. Z.*, vol. 171, p. 51–73, 1980.
- [32] COLIN DE VERDIÈRE (Y.). *Méthodes semi-classiques et Théorie Spectrale*. Cours de DEA. Université Grenoble I, 1992–2003.
- [33] COLIN DE VERDIÈRE (Y.), « Singular lagrangian manifolds and semiclassical analysis », *Duke Math. J.*, vol. 116, n° 2, p. 263–298, 2003.
- [34] COLIN DE VERDIÈRE (Y.) et PARISSE (B.), « Équilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale », *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 19, nº 9–10, p. 1535–1563, 1994.
- [35] COLIN DE VERDIÈRE (Y.) et PARISSE (B.), « Équilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerfeld », Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor., vol. 61, nº 3, p. 347–367, 1994.
- [36] COLIN DE VERDIÈRE (Y.) et PARISSE (B.), « Singular Bohr-Sommerfeld rules », *Commun. Math. Phys.*, vol. 205, p. 459–500, 1999.
- [37] COLIN DE VERDIÈRE (Y.) et VEY (J.), « Le lemme de Morse isochore », *Topology*, vol. 18, p. 283–293, 1979.
- [38] COLIN DE VERDIÈRE (Y.) et Vũ NGỌC (S.), « Singular Bohr-Sommerfeld rules for 2D integrable systems », Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), vol. 36, p. 1–55, 2003.
- [39] CUSHMAN (R.) et BATES (L.). *Global aspects of classical integrable systems*. Birkhäuser, 1997.
- [40] CUSHMAN (R.) et DUISTERMAAT (J. J.), « The quantum spherical pendulum », *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N.S.*), vol. 19, p. 475–479, 1988.
- [41] CUSHMAN (R.) et DUISTERMAAT (J. J.), « Non-hamiltonian monodromy », J. Differential Equations, vol. 172, p. 42–58, 2001.
- [42] CUSHMAN (R.) et Vũ NGọc (S.), « Sign of the monodromy for Liouville integrable systems », Annales Henri Poincaré, vol. 3, nº 5, p. 883–894, 2002.

- [43] DAVIES (E. B.). Spectral Theory and Differential Operators. Cambridge University Press, 1995.
- [44] DAZORD (P.) et DELZANT (T.), « Le problème général des variables actions-angles », J. Differential Geom., vol. 26, nº 2, p. 223–251, 1987.
- [45] DELZANT (T.), « Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment », *Bull. Soc. Math. France*, vol. 116, p. 315–339, 1988.
- [46] DIMASSI (M.) et SJÖSTRAND (J.). Spectral asymptotics in the semi-classical limit, vol. 268 (coll. London Mathematical Society Lecture Note Series). Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [47] DONG (S.-H.), « Quantum monodromy in the spectrum of Schrödinger equation with a decatic potential », *Int. J. of Theor. Phys.*, vol. 41, nº 1, p. 89–99, 2002.
- [48] DOZIAS (S.), « Clustering for the spectrum of *h*-pseudodifferential operators with periodic flow on an energy surface », *J. Funct. Anal.*, vol. 145, nº 2, p. 296–311, 1997.
- [49] DUFOUR (J.-P.), MOLINO (P.) et TOULET (A.), « Classification des systèmes intégrables en dimension 2 et invariants des modèles de Fomenko », C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 318, p. 949–952, 1994.
- [50] DUFOUR (J.) et MOLINO (P.), « Compactification d'actions de \mathbb{R}^n et variables actions-angles avec singularités », dans DAZORD et WEIN-STEIN, éditeurs, *Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley*, vol. 20, p. 151–167. MSRI, 1989.
- [51] DUISTERMAAT (J. J.), « Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 27, p. 207– 281, 1974.
- [52] DUISTERMAAT (J. J.), « On global action-angle variables », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 33, p. 687–706, 1980.
- [53] DUISTERMAAT (J. J.). Fourier Integral Operators. Progress in mathematics. Birkhäuser, 1996.
- [54] DUISTERMAAT (J. J.) et GUILLEMIN (V.), « The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics », *Invent. Math.*, vol. 29, p. 39–79, 1975.
- [55] DUISTERMAAT (J. J.) et HECKMAN (G. J.), « On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space », *Invent. Math.*, vol. 69, p. 259–268, 1982.
- [56] DUISTERMAAT (J. J.) et HÖRMANDER (L.), « Fourier integral operators II », Acta Math., vol. 128, p. 183–269, 1972.

- [57] DULLIN (H.) et Vũ NGọc (S.), « Vanishing twist near focus-focus points », *Nonlinearity*, vol. 17, nº 5, p. 1777–1785, 2004.
- [58] EFSTATHIOU (K.), JOYEUX (M.) et SADOVSKIÍ (D.), « Global bending quantum number and the absence of monodromy in the hcn- cnh molecule », *Phys. Rev. A*, vol. 69, p. 032504 (1–15), 2004.
- [59] EGOROV (J. V.), « The canonical transformations of pseudodifferential operators », *Uspehi Mat. Nauk*, vol. 24, nº 5 (149), p. 235–236, 1969.
- [60] EINSTEIN (A.), « Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein », Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen, vol. 19, p. 82–92, 1917.
- [61] ELIASSON (L.). *Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals*. Thèse de Doctorat, University of Stockholm, 1984.
- [62] ELIASSON (L.), « Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case », *Comment. Math. Helv.*, vol. 65, p. 4–35, 1990.
- [63] EPSTEIN (C.), MELROSE (R.) et MENDOZA (G.). The Heisenberg algebra, index theory and homology. (on line), 2000. Book in progress. http://www-math.mit.edu/~rbm/book.html.
- [64] EVANS (L.) et ZWORSKI (M.). « Lectures on semiclassical analysis ». http://math.berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf.
- [65] FAURE (F.) et ZHILINSKIÍ (B.), « Topological properties of the Born-Oppenheimer approximation and implications for the exact spectrum », *Lett. Math. Phys.*, vol. 55, nº 3, p. 219–238, 2001. Topological and geometrical methods (Dijon, 2000).
- [66] FEDOSOV (B.). Deformation quantization and index theory, vol. 9 (coll. Mathematical Topics). Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [67] FOLLAND (G. B.). *Harmonic analysis in phase space*, vol. 122 (coll. *Annals of Mathematics Studies*). Princeton University Press, 1989.
- [68] FOMENKO (A.). Topological classification of integrable systems, vol. 6 (coll. Advances in soviet mathematics). AMS, 1991.
- [69] GARAY (M. D.), « Stable moment mappings and singular lagrangian foliations », *Quart. J. Math*, vol. 56, p. 357–366, 2005.
- [70] GIACOBBE (A.), CUSHMAN (R.), SADOVSKIÍ (D.) et ZHILINSKIÍ (B.), « Monodromy of the quantum 1 :1 :2 resonant swing spring », J. Math. Phys., vol. 45, nº 12, p. 5076–5100, 2004.
- [71] GUILLEMIN (V.). Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian Tⁿ-spaces, vol. 122 (coll. Progress in Mathematics). Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

- [72] GUILLEMIN (V.) et SCHAEFFER (D.), « On a certain class of Fuchsian partial differential equations », *Duke Math. J.*, vol. 44, nº 1, p. 157–199, 1977.
- [73] GUILLEMIN (V.) et STERNBERG (S.), « Convexity properties of the moment mapping », *Invent. Math.*, vol. 67, nº 3, p. 491–513, 1982.
- [74] GUTZWILLER (M.), « Periodic orbits and classical quantization conditions », J. Math. Phys., vol. 12, p. 343–358, 1971.
- [75] GUTZWILLER (M.). *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer Verlag, 1990.
- [76] HAMILTON (W.). On a general Method in Dynamics. London Philosophical Transactions, 1834.
- [77] HEISENBERG (W.). *La partie et le tout*. Flammarion, 1990. Traduction du texte allemand de 1969.
- [78] HELFFER (B.). « 30 ans d'analyse semi-classique : Bibliographie commentée ». Notes d'exposé. http://www.math.u-psud.fr/~helffer/histoire2003.ps, 2003.
- [79] HELFFER (B.) et ROBERT (D.), « Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles », J. Funct. Anal., vol. 53, nº 3, p. 246–268, 1983.
- [80] HELFFER (B.) et ROBERT (D.), « Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique », Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor., vol. 41, p. 291–331, 1984.
- [81] HELFFER (B.) et SJÖSTRAND (J.), « Multiple wells in the semi-classical limit. I. », *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 9, p. 337–408, 1984.
- [82] HITRIK (M.) et SJÖSTRAND (J.), « Non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators in 2 dimensions. I », Ann. Henri Poincaré, vol. 5, nº 1, p. 1–73, 2004.
- [83] HITRIK (M.), SJÖSTRAND (J.) et VŨ NGỌC (S.), « Diophantine tori and spectral asymptotics for non-selfadjoint operators », Amer. J. Math., vol. 169, nº 1, p. 105–182, 2007.
- [84] HOFER (H.) et ZEHNDER (E.). Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.
- [85] HÖRMANDER (L.), « The Weyl calculus of pseudodifferential operators », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 32, nº 3, p. 360–444, 1979.
- [86] HÖRMANDER (L.). The analysis of linear partial differential operators, vol. I–IV. Springer, 1983–90.

- [87] HUYGENS (C.). Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum. Muguet, Paris, 1673.
- [88] JOYEUX (M.) et SUGNY (F.), « Canonical perturbation theory for highly excited dynamics », *Canadian J. of Phys.*, vol. 80, p. 1459–1480, 2002.
- [89] KARSHON (Y.), « Periodic hamiltonian flows on four dimensional manifolds », *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 672, 1999.
- [90] KELLER (J.), « Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems », *Ann. Phys.*, vol. 4, p. 180–188, 1958.
- [91] KOHN (J.) et NIRENBERG (L.), « An algebra of pseudo-differential operators », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 18, p. 269–305, 1965.
- [92] KONTSEVICH (M.), « Deformation quantization of Poisson manifolds », *Lett. Math. Phys.*, vol. 66, nº 3, p. 157–216, 2003.
- [93] LANDAU (L.) et LIFCHITZ (E.). *Mécanique quantique*. MIR, 1967. 2ème édition.
- [94] LAZUTKIN (V. F.). KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions, vol. 24 (coll. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]). Springer-Verlag, Berlin, 1993. With an addendum by A. I. Shnirelman.
- [95] LERAY (J.), « Analyse lagrangienne et mécanique quantique », dans Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1976–1977), I, p. Exp. No. 1, 303. Collège de France, Paris, 1977.
- [96] LERMAN (E.), MEINRENKEN (E.), TOLMAN (S.) et WOODWARD (C.), « Nonabelian convexity by symplectic cuts », *Topology*, vol. 37, nº 2, p. 245– 259, 1998.
- [97] LEUNG (N. C.) et SYMINGTON (M.). « Almost toric symplectic fourmanifolds ». Preprint math.SG/0312165, 2003.
- [98] LIOUVILLE (J.), « Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique », J. Math. Pures Appl., vol. 20, p. 137–138, 1855. Présentée en 1853.
- [99] LIOUVILLE (J.), « Note à l'occasion du Mémoire précédent », J. Math. Pures Appl., vol. 20, p. 201–202, 1855.
- [100] LIOUVILLE (J.), « Rapport sur un mémoire de M. Bour », J. Math. Pures Appl., vol. 20, p. 135–136, 1855.
- [101] LYCHAGIN (V. V.), « Local classification of non-linear first order partial differential equations », *Russian Math. Surveys*, vol. 30, nº 1, p. 105–175, 1975.

- [102] MASLOV (V. P.). *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. Dunod, Paris, 1972.
- [103] MATSUMOTO (Y.), « Torus fibrations over the 2-sphere with the simplest singular fibers », *J. Math. Soc. Japan*, vol. 37, nº 4, p. 605–636, 1985.
- [104] MATVEEV (V.), « Integrable hamiltonian systems with two degrees of freedom. Topological structure of saturated neighborhoods of saddlesaddle and focus points », *Mat. Sb.*, vol. 187, p. 29–58, 1996.
- [105] MATVEEV (V.) et TOPALOV (P.), « Quantum integrability of Beltrami-Laplace operator as geodesic equivalence », *Math. Z.*, vol. 238, nº 4, p. 833–866, 2001.
- [106] MELIN (A.) et SJÖSTRAND (J.), « Bohr-Sommerfeld quantization conditions for non-selfadjoint operators in dimension 2 », Astérisque, nº 284, p. 181–244, 2003.
- [107] MINEUR (H.), « Sur les systèmes mécaniques admettant *n* intégrales premières uniformes et l'extension ces systèmes de la méthode de quantification de Sommerfeld », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 200, p. 1571– 1573, 1935.
- [108] MINEUR (H.), « Réduction des systèmes mécaniques à *n* degrés de liberté admettant *n* intégrales premières uniformes en involution aux systèmes à variables séparées. », *J. Math. Pures Appl.*, vol. 15, p. 385– 389, 1936.
- [109] MINEUR (H.), « Sur les systèmes mécaniques dans lesquels figurent des paramètres fonctions du temps. Étude des systèmes admettant *n* intégrales premières uniformes en involution. Extension à ces systèmes des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. », *J. Ecole Polytechn.*, vol. III, n° Cahier 1, Fasc. 2 et 3, p. 173–191, 237–270, 1937.
- [110] MIRANDA (E.). On symplectic linearization of singular Lagrangian foliations. Thèse de Doctorat, Universitat de Barcelona, 2003.
- [111] MIRANDA (E.) et Vũ NGọc (S.), « A singular Poincaré lemma », Int. Math. Res. Not., vol. 2005, nº 1, p. 27–45, 2005.
- [112] MIRANDA (E.) et ZUNG (N. T.), « Equivariant normal form for nondegenerate singular orbits of integrable Hamiltonian systems », Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), vol. 37, nº 6, p. 819–839, 2004.
- [113] MOISHEZON (B.). Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes. N° 603 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.
- [114] MOSER (J.), « On the volume elements on a manifold », Trans. Amer. Math. Soc., vol. 120, p. 286–294, 1965.

- [115] MOSER (J.). Integrable hamiltonian systems and spectral theory. Lezioni Fermiane. Scu.Norm.Sup., 1981.
- [116] MOYAL (J. E.), « Quantum mechanics as a statistical theory », *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 45, p. 99–124, 1949.
- [117] NEKHOROSHEV (N.), « Action-angle variables and their generalization », *Trans. Mosc. Math. Soc.*, vol. 26, p. 181–198, 1972.
- [118] NEKHOROSHEV (N.), SADOVSKIÍ (D.) et ZHILINSKIÍ, B., « Fractional monodromy of resonant classical and quantum oscillators », C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 335, nº 11, p. 985–988, 2002.
- [119] POISSON (S.-D.), « Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique », *Journal de l'École Polytechnique*, 1809. XV^{ème} cahier.
- [120] POISSON (S.-D.), « Sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique », J. Math. Pures Appl., vol. 2, p. 317–336, 1837.
- [121] ROBERT (D.). Autour de l'approximation semi-classique, vol. 68 (coll. Progress in Mathematics). Birkhäuser, 1987.
- [122] Roy (N.), « The geometry of nondegeneracy conditions in completely integrable systems », Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., vol. 14, nº 4, p. 705– 719, 2005.
- [123] RÜSSMANN (H.), « Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtlösung », Math. Ann., vol. 154, p. 285–300, 1964.
- [124] SADOVSKIÍ (D.) et ZHILINSKIÍ (B.), « Counting levels within vibrational polyads », J. Chem. Phys., vol. 103, nº 24, 1995.
- [125] SADOVSKIÍ (D.) et ZHILINSKIÍ (B.), « Monodromy, diabolic points, and angular momentum coupling », *Phys. Lett. A*, vol. 256, nº 4, p. 235–244, 1999.
- [126] SEVENHECK (C.) et VAN STRATEN (D.), « Deformation of singular lagrangian subvarieties », *Math. Ann.*, vol. 327, nº 1, p. 79–102, 2003.
- [127] SHUBIN (M.). Pseudo-differential operators and Spectral Theory. Springer, 1987.
- [128] SJÖSTRAND (J.), « Semi-excited states in nondegenerate potential wells », *Asymptotic Analysis*, vol. 6, p. 29–43, 1992.
- [129] SJÖSTRAND (J.). « Perturbations of selfadjoint operators with periodic classical flow ». Preprint math.SP/0303023.
- [130] STEFAN (P.), « Accessible sets, orbits, and foliations with singularities », *Proc. London Math. Soc.* (3), vol. 29, p. 699–713, 1974.

- [131] STOLOVITCH (L.), « Singular complete integrability », Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., vol. 91, p. 133–210 (2001), 2000.
- [132] SYMINGTON (M.), « Generalized symplectic rational blowdowns », Algebraic and Geometric Topology, vol. 1, nº 26, p. 503–518, 2001.
- [133] SYMINGTON (M.), « Four dimensions from two in symplectic topology », dans *Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001)*, vol. 71 (coll. *Proc. Sympos. Pure Math.*), p. 153–208. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [134] TAYLOR (M. E.). Noncommutative harmonic analysis, vol. 22 (coll. Mathematical Surveys and Monographs). AMS, 1986.
- [135] Тотн (J.), « Various quantum mechanical aspects of quadratic forms », *Jour. Funct. Analysis*, vol. 130, p. 1–42, 1995.
- [136] Тотн (J.), « On the quantum expected values of integrable metric forms », J. Differential Geom., vol. 52, nº 2, p. 327–374, 1999.
- [137] TOTH (J.) et ZELDITCH (S.), « Riemannian manifolds with uniformly bounded eigenfunctions », *Duke Math. J.*, vol. 111, nº 1, p. 97–132, 2002.
- [138] TOTH (J.) et ZELDITCH (S.), « L^p norms of eigenfunctions in the completely integrable case », Ann. Henri Poincaré, vol. 4, nº 2, p. 343–368, 2003.
- [139] TOULET (A.). Classification des systèmes intégrables en dimension 2. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, 1996.
- [140] VEY (J.), « Sur certains systèmes dynamiques séparables », Amer. J. Math., vol. 100, p. 591–614, 1978.
- [141] VON NEUMANN (J.). Mathematische Grundlagen der Quantentheorie. N° 38 in Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Springer, Berlin, 1932. Réédité en français par Gabay [142].
- [142] VON NEUMANN (J.). Les fondements mathématiques de la mécanique quantique. Jacques Gabay, 1988. Traduit par A. Proca.
- [143] VOROS (A.), « The return of the quartic oscillator. the complex WKB method », Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor., vol. 39, nº 3, p. 211–338, 1983.
- [144] VOROS (A.). Spectre de l'équation de Schrödinger et méthode BKW, vol. 9 (coll. Publications Mathématiques d'Orsay 81). Université de Paris-Sud Département de Mathématique, Orsay, 1982.
- [145] Vũ Ngọc (S.). Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semiclassiques avec singularités. Thèse de Doctorat, Université Grenoble 1, 1998.

- [146] Vũ Ngọc (S.), « Quantum monodromy in integrable systems », Commun. Math. Phys., vol. 203, nº 2, p. 465–479, 1999.
- [147] Vũ Ngọc (S.), « Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 53, nº 2, p. 143–217, 2000.
- [148] Vũ Ngọc (S.), « Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment », Asymptotic Analysis, vol. 24, nº 3,4, p. 319–342, 2000.
- [149] Vũ Ngọc (S.). « Invariants symplectiques et semi-classiques des systèmes intégrables avec singularités ». dans Séminaire X-EDP, janvier 2001.
- [150] Vũ Ngọc (S.), « Quantum monodromy and Bohr-Sommerfeld rules », Lett. Math. Phys., vol. 55, nº 3, p. 205–217, 2001.
- [151] Vũ Ngọc (S.), « On semi-global invariants for focus-focus singularities », *Topology*, vol. 42, nº 2, p. 365–380, 2003.
- [152] Vũ Ngọc (S.), « Moment polytopes for symplectic manifolds with monodromy », *Adv. in Math.*, vol. 208, p. 909–934, 2007.
- [153] WAALKENS (H.) et DULLIN (H.), « Quantum monodromy in prolate ellipsoidal billiards », *Ann. Physics*, vol. 295, p. 81–112, 2002.
- [154] WEINSTEIN (A.), « Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds », *Adv. in Math.*, vol. 6, p. 329–346, 1971.
- [155] WEINSTEIN (A.), « Fourier integral operators, quantization, and the spectra of Riemannian manifolds », dans Géométrie symplectique et physique mathématique (Colloq. Internat. CNRS, No. 237, Aix-en-Provence, 1974), p. 289–298. Éditions C.N.R.S., Paris, 1975.
- [156] WEINSTEIN (A.), « Asymptotics of eigenvalue clusters for the laplacian plus a potential », Duke Math. J., vol. 44, nº 4, p. 883–892, 1977.
- [157] WEINSTEIN (A.), « Connections of Berry and Hannay type for moving lagrangean submanifolds », *Adv. in Math.*, vol. 82, p. 135–159, 1990.
- [158] WEINSTEIN (A.), « Deformation quantization », *Séminaire Bourbaki*, 1993-94.
- [159] WEYL (H.). *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover, 1950. Translated from the (second) German edition.
- [160] WIDOM (H.), « A complete symbolic calculus for pseudodifferential operators », *Bull. Sci. Math.* (2), vol. 104, nº 1, p. 19–63, 1980.
- [161] WILLIAMSON (J.), « On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems », Amer. J. Math., vol. 58, nº 1, p. 141–163, 1936.

- [162] ZELDITCH (S.), « Wave invariants at elliptic closed geodesics », Geom. Funct. Anal.., vol. 7, nº 1, p. 145–213, 1997.
- [163] Zelditch (S.), « Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plane domains », *Geom. Funct. Anal.*, vol. 10, nº 3, p. 628–677, 2000.
- [164] Zou (M.), « Monodromy in two degrees of freedom integrable systems », J. Geom. Phys., vol. 10, p. 37–45, 1992.
- [165] ZUNG (N. T.), « Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, I : Arnold-Liouville with singularities », *Compositio Math.*, vol. 101, p. 179–215, 1996.
- [166] ZUNG (N. T.), « A note on focus-focus singularities », Diff. Geom. Appl., vol. 7, nº 2, p. 123–130, 1997.
- [167] ZUNG (N. T.), « Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, II : Topological classification », *Compositio Math.*, vol. 138, nº 2, p. 125–156, 2003.
- [168] ZUNG (N. T.), « Torus actions and integrable systems », dans BOLSI-NOV (A. V.), FOMENKO (A. T.) et OSHMENKO (A. A.), éditeurs, *Topological Methods in the Theory of Integrable Systems*, p. 289–330. Cambridge Scientific Publishers, 2006.