## Université Grenoble 1 – Joseph Fourier Centre National de la Recherche Scientifique U.M.R. 5582

# THÈSE

pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

 $Math{\acute{e}matiques}^{\rm sp\acute{e}cialit\acute{e}\,:}$ 

 $\stackrel{\rm présentée \ par}{\rm V} \tilde{\rm U} \ {\rm NG} \\ OC \ {\rm SAN}$ 

Titre:

Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités

> date de soutenance : 15 décembre 1998 Jury : Louis BOUTET DE MONVEL Michel BRION Yves COLIN DE VERDIÈRE Johannes DUISTERMAAT Alain JOYE Raoul ROBERT

à ma femme Delphine

## REMERCIEMENTS

D<sup>E</sup> NOMBREUSES PERSONNES ont contribué à l'élaboration de cette thèse. C'est avec plaisir que je leur exprime ici ma grande reconnaissance.

Mes premiers remerciements vont à Yves Colin de Verdière, qui a bien voulu diriger mes recherches. J'ai apprécié non seulement la pertinence de ses nombreuses idées, sans lesquelles ce travail n'aurait pas vu le jour, mais aussi la liberté avec laquelle il me laissait organiser mes reflexions.

Johannes Duistermaat a accepté de me recevoir à Utrecht. Je voudrais le remercier pour son accueil chaleureux et son intérêt pour mon travail. Je lui suis en outre reconnaissant de me faire l'honneur d'être l'un des rapporteurs de ma thèse.

C'est également un honneur pour moi que Louis Boutet de Monvel ait accepté d'être l'autre rapporteur. Je l'en remercie vivement.

Je voudrais aussi remercier Michel Brion, Alain Joye et Raoul Robert pour avoir bien voulu faire partie de mon jury.

L'enthousiasme de Richard Cushman pour mes travaux a été une source d'encouragement très appréciable. Je l'en remercie sincèrement, ainsi que tous ceux qui, collègues et amis, m'ont aidé et entouré durant ces années.

CETTE THÈSE, préparée au sein de l'Institut Fourier, à Grenoble, se termine alors que je suis hôte de l'Université d'Utrecht, où j'effectue mon Service National en coopération. J'ai ainsi eu la chance de profiter de la qualité et de la diversité de deux départements de mathématiques, à qui je dois toute ma gratitude.

**Attention:** Cette version a été recompilée plusieurs années après, et la pagination est légèrement différente de la version originale disponible sur le site de l'Institut Fourier.

# Table des matières

1	Introduction			
	1.1	Introduction	2	
	1.2	Résumé des principaux résultats 16	6	
		1.2.1 Formes normales $\ldots \ldots \ldots$	6	
		1.2.2 Monodromie quantique $\ldots \ldots \ldots$	9	
		1.2.3 Bohr-Sommerfeld et singularités focus-focus	0	
		1.2.4 Forme normale de Birkhoff et états semi-excités 28	5	
	1.3	Autres pistes de recherche	7	
		1.3.1 Singularités non-dégénérées en dimension 4 $\dots \dots $	7	
		1.3.2 Focus-focus en codimension 4 $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 2$	7	
		1.3.3 Invariants symplectiques <i>focus-focus</i>	8	
		1.3.4 Calcul numérique	8	
		1.3.5 Problèmes inverses et classe de Chern	8	
		1.3.6 Asymptotiques spectrales pour Sturm-Liouville 29	9	
		1.3.7 États semi-excités en résonance $k : \ell$	9	
<b>2</b>	For	nes normales 31	1	
	2.1	Introduction	2	
	2.2	Formes normales classiques	4	
		2.2.1 Le théorème d'Eliasson $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 3^4$	4	
		2.2.2 Un exemple : le problème de C. Neumann classique 36	6	
		2.2.3 Le commutant classique	8	
		2.2.4 Un « Lemme de Poincaré » critique	1	
		$2.2.4.1$ Le cas hyperbolique formel $\ldots \ldots \ldots \ldots 43$	3	
		2.2.4.2 Preuve du théorème 2.2.12 $\ldots \ldots \ldots 44$	5	
	2.3	Systèmes intégrables quantiques	7	
		2.3.1 Introduction	7	
		2.3.2 Quantification semi-classique $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 48$	8	
		2.3.3 Formes normales microlocales	9	
		2.3.4 Le commutant semi-classique	0	
		2.3.5 Preuve du théorème 2.3.1 $\ldots$ 52	2	
		2.3.6 Remarques finales	5	
3	Moi	odromie quantique 57	7	
	3.1	Introduction	8	
	3.2	Construction of the quantum monodromy $\ldots \ldots \ldots$	8	

	3.3	Quant	$cum = classical \dots \dots$		62
	3.4	Mono	dromy of a <i>focus-focus</i> singularity		65
	3.5	How t	o detect quantum monodromy		67
		3.5.1	Introduction		67
		3.5.2	Parallel transport on $\Sigma(h)$		67
		3.5.3	Unwinding the spectrum		69
		~			
4	Boh	r-Som	imerfeld et singularités <i>focus-focus</i>		73
	4.1	Introd		•••	(4 75
	4.2	Classi	cal completely integrable systems	• •	75 75
		4.2.1		• •	70 70
	4.9	4.2.2 C	Known results	•••	70 77
	4.3	Semi-o	Classical integrable systems	•••	( (
		4.3.1		•••	
		4.3.2	The sub-principal form	• •	
			$4.3.2.1  \text{Definition}  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  $	•••	((
			4.3.2.2 Deformation of lagrangean submanifolds	•••	(8)
			4.3.2.3 Deformation of the Action integral	•••	80
	4 4	<b>١</b> .	4.3.2.4 $\kappa$ as a semi-classical deformation	• •	80
	4.4	MICTO		• •	81
		4.4.1		•••	02
		4.4.2	Escurior internal operators	• •	83
		4.4.5	Fourier integral operators	•••	00 96
		4.4.4	<i>N</i> -admissible functionals	•••	00
		4.4.0	Microlocal solutions	•••	09
	45	4.4.0 Non di	ingular quantization conditions	•••	91
	4.0	1 5 1	Dimension of the space of microlevel solutions	•••	90
		4.5.1	The sheet of microlocal solutions	• •	95
		4.5.2	WKB method	•••	90
		4.5.3	The regular quantization conditions	•••	100
		4.5.4	Spectral parameter dependence	•••	100
	4.6	4.0.0 Bohr-9	Sommerfeld for a focus focus singularity	•••	101
	1.0	4 6 1	Integrable systems with a non-degenerate singularity	•••	103
		4.6.2	Linear focus-focus	•••	100
		4.6.3	Geometry of the singular lagrangean		104
		4.6.4	Monodromy of the lagrangean fibration around $\Lambda_0$		107
		465	Microlocal focus-focus		109
		466	Regularization of $[\kappa]$	•••	114
		467	Global solutions	• •	118
		1.0.1	4.6.7.1 The microlocal bundle		122
			4.6.7.2 The local holonomy at $m$		124
			4.6.7.3 The outer holonomy		127
			4.6.7.4 Recover the regular conditions		129
	4.7	Struct	sure of the joint spectrum		131
		4.7.1	The joint spectrum		131
		4.7.2	Quantum monodromy		133
			-		

		4.7.3	The exact counting function	. 134					
		4.7.4	Shape of the spectrum near the critical value	. 138					
		4.7.5	Weyl's formula	. 142					
<b>5</b>	Forme normale de Birkhoff et états semi-excités								
	5.1	Introd	luction	. 148					
	5.2	La for	me normale de Birkhoff quantique	. 149					
		5.2.1	Motivation	. 149					
		5.2.2	La forme normale de Birkhoff générale	. 149					
		5.2.3	Opérateurs différentiels polynômiaux	. 152					
	5.3	Micro	localisation	. 153					
		5.3.1	Symboles	. 154					
		5.3.2	Série de Taylor	. 154					
		5.3.3	Forme normale de Birkhoff	. 156					
	5.4	Appro	oximation des états semi-excités	. 157					
		5.4.1	Résultat principal	. 157					
		5.4.2	Microlocalisation	. 159					
		5.4.3	Première étape	. 160					
		5.4.4	Deuxième étape	. 161					
		5.4.5	Asymptotiques de fond de puits	. 164					
		5.4.6	Fonction de comptage	. 164					
	5.5	Réson	ances	. 165					
		5.5.1	Partie complètement intégrable	. 165					
		5.5.2	Résonance $1:1:\cdots:1$	. 166					
Table des figures17									
Bibliographie 1									
Bibliographie									

Chapitre 1

# Introduction

Ce chapitre introduit le cadre général et résume les principaux résultats de cette thèse. Il présente aussi quelques pistes pour des recherches futures.

### 1.1 Introduction

Selon J.B. Keller, « la mécanique semi-classique est une méthode consistant à utiliser la mécanique classique pour résoudre des problèmes de mécanique quantique » [63]. Tous les résultats énoncés dans cette thèse peuvent aisément se réclamer de cet adage, si par mécanique classique on entend dynamique hamiltonienne et si « mécanique quantique » est pris au sens d'« étude des équations aux dérivées partielles linéaires dépendant d'un petit paramètre ». Nous appellerons toujours h le petit paramètre, en référence à la constante de Planck, même si d'un point de vue physique il vaut mieux parler d'une normalisation sans dimension de cette même constante, faute de quoi il semble péremptoire de vouloir faire tendre cette « constante » vers zéro... Dans d'autres circonstances, le petit paramètre pourrait être 1/N, où N désigne une certaine dimension d'espace destinée à être très grande, ou encore 1/c, où c est une certaine normalisation de la vitesse de la lumière. On peut aussi coupler ces descriptions, comme nous le ferons au chapitre 5: le paramètre semi-classique est de la forme 1/N(h), où N(h) est une dimension tendant vers l'infini lorsque h tend vers zéro.

La plupart des résultats que nous présenterons ici peuvent répondre à des questions posées par la mécanique quantique; néanmoins, il est clair qu'il existe de nombreux problèmes mathématiques, issus ou non de motivations physiques, dont le caractère semi-classique est caché. Étant donnée la puissance des techniques semi-classiques actuelles, principalement issues de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et opérateurs intégraux de Fourier (développés en particulier par Hörmander [57]), on peut s'attendre à ce que de tels problèmes révèlent rapidement de nouvelles propriétés. Un exemple de cette démarche est donné par l'étude du spectre de l'équation de Mathieu discrète (ou équation de Harper). Le spectre, dit « papillon de Hofstadter », dépend des propriétés de rationalité d'un certain paramètre  $\alpha$ . Dans une série d'articles [53],[55] et [54], Helffer et Sjöstrand montrent, suivant une idée de Wilkinson, comment mener à bien cette étude en considérant  $\alpha$  comme paramètre semi-classique.

Le travail de cette thèse est concentré sur la classe de systèmes dont les caractéristiques semblent les mieux connues tant au niveau « classique » que « quantique », à savoir les systèmes dits complètement intégrables. Ces systèmes ont une longue histoire qui a surtout consisté à comprendre pourquoi, localement et presque partout, ils sont séparables, et donc, au moins du point de vue du physicien ou du chimiste quantique, facilement intégrables. Mais il suffit de ne plus se satisfaire du « localement et presque partout » pour se rendre compte que nous sommes encore loin de comprendre toutes les finesses de ces systèmes. L'exemple du pendule sphérique est une bonne illustration de cet état de fait. C'est en effet l'un des systèmes complètement intégrables les plus simples, connu de Huygens (1673! [60]), dont la dynamique globale n'a été décrite qu'en 1980 [37] et pour lequel la question, posée en 1988 [32], de l'analyse semi-classique du spectre conjoint du système quantique associé, est résolue par les résultats de cette thèse.

**Historique.** Au niveau classique, l'idée que les solutions d'une équation différentielle sont bien décrites par la donnée d'intégrales du mouvement est très ancienne, et apparaît dès la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle dans la *Mécanique céleste* de Laplace. Plus on dispose de telles intégrales, plus on a de chances de pouvoir intégrer le système. En langage moderne, la connaissance de nouvelles intégrales permet d'augmenter la codimension des surfaces invariantes. Mais la notion de système complètement intégrable est un peu plus tardive; on la fait remonter en général à la célèbre note de Liouville présentée au bureau des Longitudes en 1853 [66]. Dès 1840, Jacobi et Liouville [61] reconnaissaient en le fameux « crochet de Poisson », introduit par Poisson dans son mémoire de 1809, un outil très important pour l'étude des systèmes appelés aujourd'hui hamiltoniens. Non seulement le crochet de deux intégrales du mouvement en est une autre, ce qui peut permettre de découvrir de nouvelles intégrales, mais en outre, comme le dit Liouville en 1855 « il y a souvent un autre parti à tirer des intégrales connues, pour achever ou du moins pousser plus loin l'intégration ». Dans sa note de 1853, Liouville avait montré comment, pour un système hamiltonien à 2n variables, la connaissance de n intégrales premières indépendantes en involution permet d'intégrer complètement le système. La clef du raisonnement était (en langage actuel) une certaine 1-forme – la fameuse 1-forme de Liouville, justement – dont la restriction à la sous-variété lagrangienne invariante donnée par les intégrales du mouvement est fermée.

D'un point de vue analytique, on ne fait guère mieux de nos jours. La naissance et l'extension spectaculaire de l'outillage symplectique a surtout permis de comprendre la nature intrinsèque des constructions de Liouville, et par suite de poser le problème de la structure globale, ou plutôt *semi-globale* des systèmes complètement intégrables. Par semi-global on entend : dans un voisinage d'une lagrangienne invariante. L'amélioration la plus connue du résultat de Liouville est le théorème de Liouville-Arnold [1], qui s'énonce comme suit : On suppose l'existence de *n* fonctions  $C^{\infty}$   $f_1, \ldots, f_n$  en involution, et on appelle application moment la fonction  $F = (f_1, \ldots, f_n)$ . Si *c* est une valeur régulière de *F* telle que  $\Lambda_c \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(c)$  est compacte, alors  $\Lambda_c$  est difféomorphe à un tore, et un voisinage de  $\Lambda_c$  est *symplectiquement* difféomorphe à un voisinage de la section nulle de  $T^*(\mathbb{T}^n)$ ; en outre, si on note  $(x,\xi)$  les coordonnées canoniques de ce cotangent, *F* s'écrit  $F(\xi)$ . (Ce résultat était essentiellement connu dès 1936 [69]). On appelle  $(x,\xi)$  des coordonnées *actions-angles*. L'existence *locale* de coordonnées symplectiques  $(x,\xi)$  dans lesquelles  $F = F(\xi)$  était aussi connue bien avant Arnold; on cite en général Carathéodory [15].

Il ne faut pas croire que les physiciens quantiques aient attendu les derniers développements de la théorie des systèmes de Liouville pour proposer les conditions de quantification supposées résoudre les systèmes quantiques dont la limite classique est complètement intégrable. Dès 1915, Sommerfeld et Wilson proposent une généralisation à ces systèmes des conditions de quantification de Planck et Bohr. Il est remarquable que ces premiers essais précèdent l'interprétation des énergies quantifiées comme valeurs propres d'opérateurs sur des espaces de Hilbert. Cependant, même si Einstein présente en 1917 une amélioration de ces conditions, elles restent mathématiquement infondées, et d'ailleurs se révéleront inexactes dans la mesure où elles ignorent la correction dite de Keller-Maslov. Cette correction apparaît dans les années 1925, avec la méthode BKW (Brillouin, Kramers et Wentzel) destinée à trouver des solutions approchées de l'équation de Schrödinger. Mais tous ces travaux restent vagues sur la formulation quantique des transformations canoniques, qui sont pourtant centrales dans la théorie classique, et il semble qu'il faille attendre Maslov (1965) pour disposer d'une formulation intrinsèque de ces fameuses conditions, dites de Bohr-Sommerfeld.

L'analyse de Maslov, reprise et étendue dans un premier temps par Leray, Hörmander et Duistermaat a enfin permis d'appliquer les techniques de dynamique hamiltonienne aux systèmes quantiques. C'est dans ce nouveau cadre d'analyse dite microlocale que s'insère cette thèse. La théorie des opérateurs intégraux de Fourier ([58], [40]) permet ainsi d'obtenir un analogue quantique des coordonnées locales de Darboux-Carathéodory, qui constitue le premier résultat moderne sur les systèmes complètement intégrables quantiques: un tel système est la donnée de n opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints  $P_i$  qui commutent sur une variété de dimension n et le théorème affirme que, lorsque les coordonnées de Darboux-Carathéodory existent, il existe un opérateur intégral de Fourier formellement unitaire qui conjugue microlocalement les  $P_j$  en les opérateurs  $\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Ce théorème apparaît dans le travail de Colin de Verdière [22, théorème 2.1], c'est une généralisation du cas d'un seul opérateur traité dans l'article [40]; nous le rappelons au chapitre 2. On trouve les premières applications quantiques de résultats semi-globaux comme le théorème de Liouville-Arnold dans les travaux [21] et [23]. Quelques années plus tard, ces résultats sont revus dans le cadre, plus proche de la motivation initiale de la mécanique quantique, de l'analyse *semi-classique*, où l'on remet le petit paramètre sur le devant de la scène. La machinerie développée par Robert et Helffer (voir en particulier le livre [75] permet ainsi à Charbonnel d'étudier l'asymptotique, lorsque h tend vers zéro, du spectre conjoint de n h-opérateurs pseudo-différentiels sur  $\mathbb{R}^n$ , lorsque s'applique le théorème de Liouville-Arnold. Nous montrerons au chapitre 4 comment retrouver ces résultats en reprenant l'idée des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld.

À ce stade-là, l'analyse semi-classique des systèmes complètement intégrables semble avoir rejoint la mécanique classique, perdant ainsi sa motivation pour progresser. Nous espérons que cette thèse contribuera à montrer qu'on peut s'attendre à trouver un analogue semi-classique de tout résultat classique dépassant le théorème de Liouville-Arnold, comme les problèmes de globalisation des variables actions-angles [37], ou de construction de variables actions-angles à singularités [43], dont le cas de la dimension 1 a déjà été appliqué avec succès par Colin de Verdière et Parisse [27], [28], [29].

**Problématique.** On se donne un *h*-opérateur pseudo-différentiel P(h) autoadjoint sur une variété différentielle X de dimension n. On supposera toujours qu'on s'intéresse à une partie discrète du spectre de P(h). D'après le théorème de propagation des singularités, les fonctions propres sont microlocalisées sur des ensembles invariants par le flot hamiltonien de p. On a donc tout intérêt à trouver le plus d'intégrales possibles de p, pour diminuer la dimension des variétés invariantes génériques. Si  $f_1 = p, f_2, \ldots, f_k$  sont des fonctions presque partout indépendantes sur  $T^*X$  et telles que  $\{f_i, f_j\} = 0 \ \forall i, j$ , alors les surfaces de niveau de l'application moment  $F = (f_1, \ldots, f_k)$  sont coisotropes (donc  $k \leq n$ ) et invariantes par le flot k-dimensionnel engendré par les  $f_i$ . Le cas complètement intégrable est celui où k = n, pour lequel les fibres de F, en dehors des singularités, sont les tores de Liouville-Arnold.

La même réduction s'opère au niveau quantique : si on dispose d'un nouvel opérateur auto-adjoint  $P_2(h)$  commutant avec  $P_1(h) = P(h)$ , on décrira mieux le spectre de P(h) par le biais du spectre conjoint des deux opérateurs : l'ensemble des  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  tels qu'il existe  $u \in L^2(X)$  de norme 1 avec  $P_1 u = \lambda_1 u$  et  $P_2 u = \lambda_2 u$ . La situation complètement intégrable apparaît lorsqu'on dispose de n opérateurs  $P_i(h)$  tels que  $[P_i(h), P_j(h)] = 0$ , et dont on suppose en outre que les symboles principaux forment un système complètement intégrable classique. Prenons un exemple simple : on suppose n = 2, et on considère le système intégrable  $Q_j = -\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{x_j^2}{2}$ . Le spectre conjoint est immédiat : c'est le « réseau positif »  $h((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{N}^2)$ , chaque élément étant de multiplicité 1. Pourtant, il n'est pas si aisé de décrire la suite unidimensionnelle des valeurs propres d'un opérateur de la forme  $f(Q_1, Q_2)$ . Elle peut se révéler de natures très différentes selon les relations de dépendances  $\mathbb{Z}$ -linéaires entre les dérivées  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$ .

Cet exemple est moins particulier qu'il ne le paraît, puisque, à un difféomorphisme près, il donne le spectre de tout système complètement intégrable  $P_1, P_2$  à deux degrés de liberté autour d'une singularité de type elliptique, *i.e.* telle que les hessiens des symboles principaux soient indépendants et, dans une certaine base symplectique, combinaisons linéaires des  $q_j = \frac{1}{2}(x_j^2 + \xi_j^2)$ . (On suppose aussi de bonnes hypothèses sur le comportement des symboles à l'infini; essentiellement, on demande que l'application moment soit propre.) Ce résultat découle de la forme normale d'Eliasson pour les singularités elliptiques [43] (voir aussi l'article [35] et notre chapitre 2) qui montre que le flot hamiltonien du système se réduit à une action torique près de la singularité. Il reste ensuite à appliquer la théorie spectrale des actions toriques de Colin de Verdière [23]. La forme normale que nous énonçons au chapitre 2 permet de retrouver ce résultat. L'ingrédient crucial pour ce problème est que la dynamique est entièrement localisée près de la singularité (on a un problème de type « fond de puits »). Plusieurs questions sont alors naturelles. D'une part, peut-on utiliser une méthode analogue pour d'autres types de singularités, pour lesquelles la dynamique n'est plus localisée? D'autre part, l'hypothèse de complète intégrabilité n'est pas nécessaire pour localiser la dynamique : tout hamiltonien admettant un minimum local non-dégénéré possède cette caractéristique; peut-on obtenir une description semblable du spectre sans l'hypothèse de complète intégrabilité?

Un argument en faveur d'une réponse positive à la première question est donné par les articles de Colin de Verdière et Parisse qui, en dimension 1, appliquent le lemme de Morse isochore au cas d'une singularité hyperbolique. Les valeurs propres ne sont plus données par une formule explicite, mais par des conditions de quantification de type Bohr-Sommerfeld. Il reste qu'en dimension supérieure le contrôle du flot loin de la singularité paraît plutôt délicat... Nous montrerons au chapitre 4 comment, dans le cas d'une singularité de type *focus-focus*, on arrive à décrire précisément la fibration lagrangienne singulière, et comment on peut en déduire la structure du spectre conjoint par le biais de conditions de Bohr-Sommerfeld singulières.

La deuxième question est discutée au chapitre 5. Sans l'hypothèse de complète intégrabilité, on ne peut obtenir qu'une forme normale *formelle*. Les travaux de Sjöstrand [79] ont montré comment en déduire la structure du spectre correspondant aux états semi-excités, c'est-à-dire pour des valeurs propres de taille  $O(h^{\gamma})$ ,  $\gamma > 0$ . Nous reprendrons ces résultats dans un cadre qui nous semble plus adapté, permettant en particulier de s'attaquer au problème des résonances.

### 1.2 Résumé des principaux résultats

La présence d'une singularité dans un système complètement intégrable a d'une part des effets sur la dynamique *locale* du flot au voisinage du point critique, et d'autre part des conséquences *globales* sur la topologie des feuilles lagrangiennes autour de la feuille singulière. Quelles sont les répercussions de ces deux aspects au niveau quantique?

Le chapitre 2 traite de l'aspect local. Sous des hypothèses de non-dégénérescence pour la singularité, nous montrons que la structure locale du flot classique implique une forme normale pour le système complètement intégrable semi-classique.

L'impact sur le spectre conjoint de la non-trivialité topologique de la fibration lagrangienne autour de la fibre singulière est discuté au chapitre 3. Nous définissons un invariant affine du spectre conjoint qui est identifié à la monodromie classique du système.

Le chapitre 4, le plus conséquent de ce travail de thèse, traite en détail le cas de la singularité *focus-focus*, où les aspects locaux et globaux coexistent. À l'aide de conditions de type Bohr-Sommerfeld, nous décrivons la structure du spectre conjoint dans un voisinage de la valeur critique, en expliquant le passage du local au global.

Au chapitre 5, nous abandonnons l'hypothèse de complète intégrabilité et développons une théorie spectrale pour les états semi-excités de type fond de puits, qui permet d'aller au delà des résultats de Sjöstrand.

#### 1.2.1 Chapitre 2: Formes normales

Le but de ce chapitre est de trouver une forme normale microlocale pour un système complètement intégrable semi-classique au voisinage d'une singularité non-dégénérée. Le texte se scinde en deux parties. La première introduit la théorie classique des singularités non-dégénérées des systèmes complètement intégrables, essentiellement basée sur les travaux d'Eliasson. La deuxième partie procède à la quantification des résultats classiques.

L'espace ambiant est une variété différentielle X de dimension n. On supposera toujours que les opérateurs pseudo-différentiels utilisés sont classiques. Les résultats étant de nature microlocale, nous n'imposerons aucun comportement particulier pour les symboles à l'infini. On dira qu'un opérateur P(h) est  $O(h^{\infty})$ sur un ouvert  $\Omega \in T^*X$  si, dans un système de coordonnées locales, son symbole de Weyl est  $O(h^{\infty})$  sur  $\Omega$ . Pour plus de détails sur le calcul symbolique, on pourra se référer au chapitre 4.

On se donne un système de n h-opérateurs pseudo-différentiels  $P_1, \ldots, P_n$ d'ordre zéro qui vérifie les conditions suivantes :

- $[P_i, P_j] = O(h^{\infty}), \quad \forall i, j;$
- les symboles principaux  $p_i = \sigma(P_i)$  sont réels et presque partout indépendants.

En particulier, on ne suppose pas que les  $P_j$  soient auto-adjoints. Mais cette hypothèse supplémentaire, ajoutée à celle de l'exacte commutation des  $P_j$ , sera requise pour l'étude spectrale des chapitres 3 et 4.

On dira que le système complètement intégrable donné par les  $p_i$  admet une singularité non-dégénérée au point  $m \in T^*X$  si les  $p_i$  sont critiques en m et si l'algèbre de Lie commutative  $\mathfrak{c}_p$  engendrée par les Hessiens  $\mathcal{H}(p_i)$  est une sousalgèbre de Cartan de l'algèbre de Lie des formes quadratiques  $\mathcal{Q}(T_m(T^*X))$ , munie du crochet de Poisson symplectique. Par un choix de coordonnées symplectiques près de m, on pourra identifier l'algèbre des formes quadratiques à  $\mathfrak{sp}(2n)$ .

Toute sous-algèbre commutative de  $\mathfrak{sp}(2n)$  de dimension n est génériquement une sous-algèbre de Cartan (voir proposition 2.2.1). Le théorème de Williamson, que nous reprouvons rapidement (théorème 2.2.2) donne une classification simple des sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{sp}(2n)$ , qui est la suivante.

Il existe une base symplectique linéaire de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans laquelle  $\mathfrak{c}_p$  admet la base  $q_1, \ldots, q_n$ , où les  $q_i$  sont choisis parmi les possibilités suivantes :

- $-q_i = x_i \xi_i$  (singularité hyperbolique);
- $-q_i = x_i^2 + \xi_i^2$  (singularité *elliptique*);
- $-q_i = x_i\xi_{i+1} x_{i+1}\xi_i$ , auquel cas on demande que  $q_{i+1} = x_i\xi_i + x_{i+1}\xi_{i+1}$  (singularité *focus-focus*).

Une telle base est unique à permutation près de ses éléments, et appelée une base standard de  $c_p$ . On notera M la matrice  $n \times n$  inversible telle que

$$(\mathcal{H}(p_1),\ldots,\mathcal{H}(p_n)) = M.(q_1,\ldots,q_n).$$
(1.1)

À chaque élément d'une base standard correspond un opérateur différentiel, donné par la quantification de Weyl:

- cas hyperbolique:  $Q_j = \frac{h}{i} (x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2});$ 

- cas elliptique:  $Q_j = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_j^2;$ 

- cas focus-focus: 
$$Q_j = \frac{h}{i} (x_j \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_j})$$
 et  $Q_{j+1} = \frac{h}{i} (1 + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}}).$ 

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal du chapitre :

**Théorème 1.2.1 (théorème 2.3.4)** Avec les notations précédentes, il existe un opérateur intégral de Fourier U elliptique (et microlocalement unitaire si les  $P_j$  sont formellement auto-adjoints), une matrice de taille  $n \times n$  microlocalement inversible  $\mathcal{M}$  d'opérateurs pseudo-différentiels commutant avec les  $Q_j$  (modulo  $O(h^{\infty})$ ), et des constantes  $\alpha_j^{(\ell)} \in \mathbb{C}$   $(j = 0, ..., n \text{ et } \ell \in \mathbb{N}^*)$  telles que, microlocalement au voisinage de m,

$$U^{-1}(P_1,\ldots,P_n)U = \mathcal{M}(Q_1 - \alpha_1(h),\ldots,Q_n - \alpha_n(h)) + O(h^{\infty})$$

On a noté  $\alpha_j(h) = \sum_{\ell \ge 1} \alpha_j^{(\ell)} h^{\ell}$ .

Les  $\alpha_j^{(1)}$  se décrivent à l'aide des valeurs en m des symboles sous-principaux  $r_j$  des  $P_j$  par:

$$\alpha^{(1)} = -M^{-1}.r(m),$$

où M (la valeur en 0 du symbole principal de  $\mathcal{M}$ ) est la matrice définie par (1.1).

On verra au chapitre 4 que les séries formelles  $\alpha_j(h)$  sont uniquement déterminées dans le cas *focus-focus*. C'est encore vrai en dimension 1 pour le cas hyperbolique [26], mais nous n'avons pas montré le cas général.

Cet énoncé appelle encore quelques remarques. La forme normale proposée est particulièrement adaptée à la résolution du système  $P_j u = 0$ , puisqu'on peut alors oublier le facteur elliptique  $\mathcal{M}$ . On pouvait néanmoins s'attendre à une formulation différente, dans laquelle on se ramènerait à des opérateurs de la forme  $F_j(Q_1, \ldots, Q_n) + O(h^{\infty})$ . C'est justement un point important de ce chapitre de voir que cette formulation est a priori valable uniquement lorsque la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{c}_p$  ne contient pas d'élément hyperbolique. Dans ce cas, le théorème donne le résultat voulu, puisque nous montrerons que les opérateurs de la forme  $F(Q_1, \ldots, Q_n) + O(h^{\infty})$  sont exactement – en l'absence d'éléments hyperboliques – ceux qui commutent modulo  $O(h^{\infty})$  avec les  $Q_j$  (proposition 2.3.3).

Comme d'habitude pour ce genre de résultat, la preuve du théorème s'obtient en deux étapes, du type équation eiconale plus une suite infinie d'équations de transport. L'équation eiconale est résolue par le théorème d'Eliasson, et nous présenterons les équations de transport comme un « lemme de Poincaré critique », permettant d'intégrer localement une 1-forme fermée définie sur une lagrangienne singulière; la géométrie sous-jacente à ce point de vue est développée au chapitre 4. Il reste, pour arriver à la formulation énoncée, à utiliser des lemmes de division pour les fonctions  $C^{\infty}$  commutant avec les  $q_j$ , lemmes qui sont compliqués par la présence possible d'éléments hyperboliques parmi les  $q_j$ . Cette complication est due à la non-connexité locale des fibres de l'application moment  $(q_1, \ldots, q_n)$ .

#### 1.2.2 Chapitre 3: Monodromie quantique

On se donne dans ce chapitre un système complètement intégrable quantique  $P_1, \ldots, P_n$ , où les  $P_j$  sont auto-adjoints et commutent deux à deux. On demande en outre, comme nous le ferons tout au long de cette thèse, que l'application moment  $F = (p_1, \ldots, p_n)$  soit propre. Les travaux de Charbonnel [17] permettent alors de définir le *spectre conjoint* des  $P_j$ , qui est discret.

Si  $c \in \mathbb{R}^n$  est une valeur régulière de F, le théorème de Liouville-Arnold, mentionné en introduction, fournit des variables actions-angles sur un ouvert invariant de la forme  $F^{-1}(U)$ , où U est un petit voisinage de c. Au niveau quantique, l'existence des variables actions-angles se traduit par l'existence d'une structure de réseau asymptotique pour le spectre conjoint dans un voisinage de c ([17],[23]).

On connaît depuis l'article de Duistermaat [37] les obstructions à l'existence de coordonnées actions-angles au dessus de tout l'ouvert  $U_r$  des valeurs régulières de c. Il est donc naturel de se demander quelles sont les manifestations de ces obstructions sur le spectre conjoint.

Les invariants classiques introduits par Duistermaat sont au nombre de deux : la monodromie et la classe de Chern. La monodromie est une obstruction à l'existence d'une base de  $H_1(\Lambda_c,\mathbb{Z})$  dépendant continûment de c dans  $U_r$ , et donc d'une structure de  $\mathbb{T}^n$ -fibré principal pour la fibration F. On la voit comme un homomorphisme de  $\pi_1(U_r)$  dans  $Aut(H_1(\Lambda_c,\mathbb{Z})) \simeq GL(n,\mathbb{Z})$ . En cas de nullité de la monodromie, l'existence d'une section globale lagrangienne de F est donnée par la nullité de la classe de Chern. Nous ne nous intéresserons dans ce chapitre qu'à la monodromie, géométriquement la plus facile à manipuler. D'ailleurs, au voisinage d'une singularité de type focus-focus, que nous étudions en détail au chapitre 4, seule la monodromie est non triviale. En outre, même si on peut construire des exemples ayant une classe de Chern arbitraire (cf. Bates [4]), je ne connais pas d'exemple, ayant une signification physique, où cette classe soit non nulle (en fait, je ne connais pas d'exemple où la structure symplectique soit un cotangent, ce qui rend difficile la construction d'un exemple quantique).

Le lecteur pourra constater que les idées de ce chapitre sont intuitivement très simples; la difficulté consistait à les énoncer de façon précise. Voici comment nous avons procédé. Nous commençons par définir la notion abstraite de réseau affine asymptotique (définition 3.2.1), destinée à regrouper toutes les caractéristiques du spectre conjoint des  $P_j$  au voisinage d'une valeur régulière de F. Essentiellement, un tel réseau, défini dans un ouvert U, est localement difféomorphe à une portion d'un réseau droit de la forme  $c_0 + h\mathbb{Z}^n$ . On montre ensuite qu'à un tel objet est associé de façon unique un cocycle dans  $\check{H}^1(U,GA(n,\mathbb{Z}))$ , où  $GA(n,\mathbb{Z})$  désigne le groupe affine à coefficients entiers. Ce cocycle est une obstruction à décrire globalement le réseau affine asymptotique comme une portion de  $c_0+h\mathbb{Z}^n$ . Lorsqu'il provient d'un système complètement intégrable quantique, ce cocycle est appelé la monodromie quantique du système.

Le résultat théorique principal du chapitre est alors le théorème 3.3.2, qui

affirme que (à transposition près) la partie linéaire de la monodromie quantique est égale à la monodromie classique du système complètement intégrable sousjacent.

Le résultat pratique principal est la description de la procédure à suivre pour déceler la monodromie quantique – et donc classique – sur un dessin du spectre (proposition 3.5.2 et surtout figure 3.6). Partant du fait que la monodromie s'interprète comme l'holonomie d'un certain revêtement, on explique la construction d'une application développante, qui envoie tout chemin polygonal dont les sommets sont des points « consécutifs » du spectre joint sur un chemin polygonal dans  $\mathbb{Z}^n$ . Si l'on part d'un chemin fermé, on obtient en général une ligne ouverte, et la différence entre les deux extrémités donne la monodromie quantique.

Appliquée au cas d'une singularité *focus-focus*, (n = 2), cette description prouve le résultat conjecturé par Cushman et Duistermaat pour l'exemple du pendule sphérique [32]. En outre, nous verrons au chapitre 4 que l'analyse microlocale des singularités *focus-focus* va nous permettre d'énoncer un résultat assez spectaculaire, puisqu'il permet, à l'aide de l'application développante, de compter exactement le nombre de points du spectre conjoint à l'intérieur d'une telle « ligne polygonale fermée » (théorème 4.7.3).

#### 1.2.3 Chapitre 4: Conditions de Bohr-Sommerfeld et singularités *focus-focus*

Ce chapitre, qui constitue le cœur de ce travail, est centré sur l'écriture rigoureuse des conditions de Bohr-Sommerfeld, vues comme le lien le plus naturel entre le spectre joint semi-classique et la géométrie du système complètement intégrable classique sous-jacent. Dans une première partie (sections 2 à 5), nous mettons en œuvre les techniques permettant d'établir ce lien en l'absence de singularité du système. La plupart de ces techniques sont standard (théorème de Liouville-Arnold, analyse microlocale, méthode BKW), d'autres le sont peutêtre moins, telles l'interprétation semi-classique des symboles sous-principaux, le contrôle microlocal de la dimension de l'espace des solutions et l'écriture des conditions de Bohr-Sommerfeld comme holonomie d'un certain fibré plat à coefficients dans un groupe de symboles numériques en h. La deuxième partie (section 6) généralise ces méthodes en présence d'une singularité de type focus-focus, en s'inspirant des travaux déjà mentionnés de Colin de Verdière et Parisse. On commence par invoquer la forme normale du chapitre 2 qui donne la forme des solutions microlocales du système  $P_1 u \sim 0$ ,  $P_2 u \sim 0$  au voisinage du point singulier (le symbole  $\sim$  désigne l'égalité microlocale). Puis, une description précise de la dynamique du système hamiltonien dans les fibres lagrangiennes voisines de la lagrangienne critique et de la topologie de la fibration singulière permet de décrire la propagation du microsupport des solutions, et donc, comme pour le cas régulier, de calculer l'holonomie dont l'annulation donne les conditions de Bohr-Sommerfeld recherchées. Enfin, le chapitre se termine par l'application de ces conditions à l'étude du spectre conjoint des systèmes semi-classiques admettant une singularité focus-focus. L'accumulation des valeurs propres près de la valeur critique est discutée sous divers angles, puis illustrée par l'exemple numérique de la bouteille de Champagne.

1. On se donne donc un système semi-classique  $P_1, \ldots, P_n$  complètement intégrable. Pour simplifier, on supposera les  $P_j$  auto-adjoints et commutant exactement deux à deux. Néanmoins, dans toute la partie générale sur les conditions de Bohr-Sommerfeld, seuls sont nécessaires la commutation modulo  $O(h^{\infty})$  et la réalité des symboles principaux et sous-principaux.

On sait d'une part que les solutions du système

$$(P_j - E_j)u_h = 0 (1.2)$$

sont, lorsque E ne dépend pas de h, microlocalisées sur la lagrangienne  $\Lambda_E \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(E)$ , où F désigne toujours l'application moment du système classique. D'autre part, on sait bien que, puisque les  $E_j$  sont destinés à former le spectre conjoint cherché, seul les éléments d'un réseau discret (pour h fixé) de  $\Lambda_E$  peuvent être candidats à porter une telle solution. En outre, ces  $E_j$  vont évidemment dépendre de h...

La méthode que nous adoptons pour éviter ce problème classique posé par les conditions de Bohr-Sommerfeld est de considérer des distributions  $u_h^E$  dépendant elles-mêmes de E. Une solution du système est alors une famille  $(u_h^E)$ , où (h, E)varie dans un sous-ensemble  $\Gamma \subset ]0,1] \times V$ , V petit voisinage compact de  $E_o$  dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que la projection de  $\Gamma$  sur son premier facteur admet 0 comme point d'accumulation, et telle que le système (1.2) soit microlocalement vérifié dans un voisinage de  $\Lambda_{E_o}$ , uniformément pour  $(h, E) \in \Gamma$ .

La démarche est alors assez claire. On commence par montrer que, dans un petit voisinage dans  $T^*X$  d'un point régulier de F, le système (1.2) admet toujours des solutions microlocales, et même que l'espace de telles solutions est un module libre de rang 1 sur un anneau des coefficients formels dépendants de h (cf. la remarque 4.4.3), et les solutions dépendent régulièrement de E. Ce résultat est une conséquence des coordonnées de Darboux-Carathéodory semiclassiques mentionnées en introduction : si  $P_j - E_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ , il est clair que seules les constantes sont solutions. En comparant les solutions locales, on obtient donc un 1-cocycle de Čech  $[c^E(h)]$  sur la variété  $\Lambda$  des points réguliers de  $\Lambda_E$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}_h^*$ , qui s'interprète comme l'holonomie du fibré plat des solutions microlocales sur  $\Lambda$ . On a alors

**Proposition 1.2.2 (proposition 4.5.5)** Il existe une solution microlocale de (1.2) sur  $\Lambda$  si et seulement si  $[c^E(h)] = [1] + O(h^{\infty})$ .

Il reste à expliciter un peu plus ce cocycle; on montre (théorème 4.5.8) qu'on peut écrire  $[c^E(h)] = \exp(i[\lambda^E(h)])$ , où  $\lambda^E(h)$  est une 1-forme réelle admettant un développement asymptotique en puissances entières de h de la forme

$$[\lambda^{E}(h)] = \frac{1}{h}[\alpha_{0}] + [\kappa^{E}] + [\mu]\frac{\pi}{2} + O(h).$$

On a noté  $\alpha_0$  la restriction à  $\Lambda$  de la 1-forme canonique de Liouville,  $\mu$  le cocycle de Maslov et  $\kappa^E$  la forme *sous-principale* du système (voir la section 4.3.2.1).

Si E varie dans un ouvert U de valeurs régulières de F,  $\Lambda = \Lambda_E$  et on retrouve l'énoncé classique des conditions de Bohr-Sommerfeld :

«  $u_h^E$  est solution microlocale de (1.2) au voisinage de  $F^{-1}(U)$  si et seulement si l'ensemble  $\Gamma \ni (h, E)$  vérifie

$$\frac{1}{h}\int_{\gamma^E}\alpha_0 + \int_{\gamma^E}\kappa^E + \mu(\gamma^E)\frac{\pi}{2} \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h)$$

pour tout lacet  $\gamma^E$  tracé sur  $\Lambda_E$ . »

2. Le résultat principal de ce chapitre est le fait qu'une analyse du même type peut être menée en présence d'une singularité *focus-focus*, lorsque n = 2, pour des valeurs propres conjointes proches de la valeur critique. La philosophie des conditions de Bohr-Sommerfeld reste donc la même, mais la présence de la singularité introduit un facteur nouveau dans le calcul de l'holonomie.

A partir de maintenant, n ne désigne plus la dimension de l'espace.

Le théorème de forme normales du chapitre 2 transforme le système (1.2) près de la singularité *focus-focus* en le nouveau système

$$(Q_1 - \mathfrak{R}(\boldsymbol{\epsilon}^E(h))u_h^E \sim 0, \quad (Q_2 - \mathfrak{I}(\boldsymbol{\epsilon}^E(h))u_h^E \sim 0,$$

où les  $Q_j$  sont les opérateurs standard donnés au paragraphe précédent, qui s'écrivent aussi, en coordonnées polaires :

$$Q_1 = \frac{h}{i}(r\frac{\partial}{\partial r} + 1)$$
 and  $Q_2 = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial \theta}$ .

 $\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h)$  est une série formelle en puissances positives de h, dont les termes sont des fonctions  $C^{\infty}$  de E. En outre, les deux premiers termes sont donnés explicitement en fonction, respectivement, des symboles principaux et sous-principaux de  $(P_1, P_2)$ . On en déduit que le système admet une solution microlocale au voisinage du point singulier si et seulement si  $\mathfrak{I}(\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h)) = hn \in h\mathbb{Z} + O(h^{\infty})$ , et que, dans ce cas, le module des solutions est libre de rang 1, engendré par la distribution homogène

$$u_{\epsilon^{E}(h)} = \frac{1}{r} e^{i \frac{\Re(\epsilon^{E}(h))}{h} \ln r} e^{in\theta}.$$

On veut maintenant calculer le cocycle de Bohr-Sommerfeld singulier en propageant la phase sur la lagrangienne critique  $\Lambda_0$ . Cette dernière a la topologie d'un tore pincé au point critique m (qui est isolé). Des deux générateurs canoniques du groupe fondamental du tore, l'un devient contractible en m. C'est lui qui, néanmoins, est responsable de la condition de quantification  $\Im(\epsilon^E(h)) \in h\mathbb{Z} + O(h^{\infty})$ , que l'on supposera toujours vérifiée. Il reste donc à examiner la propagation de la solution sur l'autre cycle  $\gamma$ . En dehors de m, cette propagation est régie par la théorie régulière, décrite précédemment. On sait donc décrire l'holonomie associée, qui admet un développement asymptotique en puissances  $\geq -1$  de h. Pour calculer la contribution du point singulier, on remarque les points suivants :

- Dans les coordonnées symplectiques (x,ξ,y,η) où le système classique est en forme normale, Λ<sub>0</sub> est égale, près de 0, à l'union des deux plans lagrangiens P<sub>s</sub> = {x = ξ = 0} et P<sub>u</sub> = {y = η = 0} (voir figure 4.1);
- 2. le lacet  $\gamma$  (ou  $-\gamma$ ) s'éloigne de m via  $P_u$  et y revient via  $P_s$ ;
- 3. sur  $P_u \setminus \{0\}$ ,  $u_{\epsilon^E(h)}$  est une intégrale oscillante classique;
- 4.  $\mathcal{F}_{h}^{-1}(u_{-\overline{\epsilon^{E}}(h)})$  est une autre solution du système, et c'est une intégrale oscillante classique sur  $P_{s} \setminus \{0\}$  ( $\mathcal{F}_{h}$  désigne la transformation de Fourier semi-classique).

On en déduit que la partie singulière du cocycle recherché est exactement l'argument de la constante  $C^E(h)$  telle que

$$u_{\epsilon^{E}(h)} = C^{E}(h)\mathcal{F}_{h}^{-1}u_{-\overline{\epsilon^{E}}(h)}.$$

Il se trouve que cette constante apparaît dans l'étude des distributions homogènes du plan, initiée apparemment par Tate [16], et reprise indépendamment par Gelfan'd [46]. Nous en donnerons une nouvelle dérivation (voir proposition 4.6.11). On trouve

$$C^{E}(h) = i^{-n} (2h)^{i \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h))/h} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(i \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h))/h + 1 + n)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(-i \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h))/h + 1 + n)\right)}$$

Remarquons que  $|C^E(h)| = 1$ , comme la théorie l'imposait. Le théorème principal est alors le suivant :

**Théorème 1.2.3 (théorème 4.6.9)** Il existe un symbole  $(\lambda^E)^{out} = (\lambda^E)^{out}(h)$ à valeurs dans  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , admettant un développement asymptotique en puissances  $\geq -1$  de h et dont les termes sont des fonctions lisses de E, tel que le système (1.2) admet une solution microlocale  $(u_h^E)$ ,  $(h, E) \in \Gamma$  dans un voisinage de  $\Lambda_0$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées, uniformément pour  $(h, E) \in \Gamma$ :

1. 
$$\mathfrak{I}(\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h)) \in h\mathbb{Z} + O(h^{\infty});$$
  
2.  $(\lambda^{E})^{out} + n\frac{\pi}{2} - \frac{\mathfrak{R}(\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h))}{h}\ln(2h) - 2\arg\Gamma\left(\frac{i\,\mathfrak{R}(\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h))/h + 1 + n}{2}\right) \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h^{\infty}), \text{ où } n = n^{E}(h) \in \mathbb{Z} \text{ est tel que } \mathfrak{I}(\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h))/h = n + O(h^{\infty}).$ 

En outre, les termes principaux et sous-principaux de  $(\lambda^E)^{out}$  se calculent explicitement.

Nous n'avons pas parlé ici du calcul des premiers termes de  $\lambda^E(h)$ , qui constitue en fait une partie importante du théorème 4.6.9. Nous donnerons dans ce chapitre une interprétation géométrique de ces termes, qui fait intervenir une régularisation de l'intégrale divergente  $\int_{\gamma} \kappa$ , lorsque  $\gamma$  est un représentant du cycle non trivial de  $H_1(\Lambda_0)$ .

**3.** La fin du chapitre est consacrée à l'application du théorème ci-dessus à l'étude du spectre conjoint, c'est-à-dire à la structure des ensembles  $\Gamma \ni (h, E)$  vérifiant les conditions de quantification du théorème. Nous obtenons deux résultats principaux. Le premier, mentionné au paragraphe précédent, compte le nombre de valeurs propres à l'intérieur d'une ligne polygonale fermée; le deuxième établit une estimation précise de la distance asymptotique entre deux valeurs propres « consécutives », à distance O(h) de la valeur critique. Nous en déduisons une formule asymptotique de type Weyl analogue à celles de Brummelhuis, Paul et Uribe [14].

On a montré au paragraphe précédent comment construire une application développante du spectre conjoint dans  $\mathbb{Z}^2$ . Étant donnée la nature de la monodromie de la singularité *focus-focus* (voir la section 3.4 – chapitre 3), il existe une droite invariante  $L_0$ , c'est-à-dire telle que le développement d'un lacet « polygonal » à partir d'un point sur  $L_0$  donne lieu à une ligne polygonale *fermée*. On peut donc se poser la question de comparer le nombre de valeurs propres conjointes à l'intérieur du lacet de départ avec le nombre de points entiers du polytope obtenu. Un argument simple, n'impliquant pas l'étude de la singularité, indique que ces deux quantités diffèrent d'une constante universelle. Il se trouve que les conditions de quantification singulières obtenues permettent de calculer cette constante, qui se révèle être nulle (théorème 4.7.3).

Pour étudier le spectre conjoint à distance O(h) de la valeur critique, il est commode de voir l'application  $(hE_1, hE_2) \rightarrow (\Re(\epsilon^E(h)), \Im(\epsilon^E(h)))$  comme un changement de variables semi-classique, permettant de décrire le spectre en terme des variables  $(x,y) = \epsilon/h$ . On voit ainsi que les valeurs propres sont distribuées sur les droites  $y \in \mathbb{Z}$ , la droite  $L_0$  étant justement celle donnée par l'équation y = 0. La répartition des valeurs propres sur ces droites fait l'objet du théorème suivant.

**Théorème 1.2.4 (théorème 4.7.6)** Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  fixé, on note  $x_k = x_k(h)$  la suite croissante des valeurs propres sur la droite y = n. On a alors l'estimation :

$$|x_{k+1} - x_k| = \frac{2\pi a}{|\ln h| + B - \ln 2 - \Psi'_n(x)} (1 + O(h))$$
(1.3)

 $a \ et \ B \ sont \ des \ constantes \ géométriques \ ne \ dépendant \ que \ du \ système \ classique, et$ 

$$\Psi_n(x) = 2\arg\Gamma\left(\frac{ix+1+|n|}{2}\right).$$

Il est ensuite facile d'en déduire une formule de type Weyl pour le nombre de valeurs propres jointes dans un compact de la forme hK. D'autre part, l'étude de la fonction  $\Psi'_n$  montre que les espacements de niveau  $|x_{k+1} - x_k|$  présentent un minimum très marqué autour de x = 0, surtout pour n = 0. Cette information peut être utile afin de retrouver la position de la valeur critique à partir des données du spectre.

Enfin, nous testons ces résultat sur les calculs numériques de Child effectués pour l'exemple de la bouteille de Champagne. Les constantes a et B sont alors explicites, et l'accord avec notre formule semble très bon (figures 4.11, 4.12).

# 1.2.4 Chapitre 5 : Forme normale de Birkhoff quantique et états semi-excités

Aux chapitres précédents, l'hypothèse de complète intégrabilité classique a permis l'utilisation de formes normales  $C^{\infty}$  pour les hamiltoniens du système; leurs analogues quantiques naturels consistaient en des formes normales dans l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels microlocaux, valables dans un ouvert de taille fixe de l'espace des phases. Nous voulons, dans ce chapitre, abandonner l'hypothèse de complète intégrabilité; quelles formes normales utiliser alors?

Lorsqu'un hamiltonien possède une singularité de Morse, on peut lui appliquer la forme normale de Birkhoff; on sait bien qu'elle donne lieu à une série formelle de polynômes homogènes de degrés croissants, dont le rayon de convergence est en général nul. On peut alors, comme le font Sjöstrand [79] et, dans un cadre un peu différent, Duistermaat [13], écrire une resommation à la Borel de la série normalisée pour obtenir cette fois encore une forme normale quantique dans l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels microlocaux. Sjöstrand montre ensuite que la forme normale obtenue est pertinente pour l'étude du spectre dans les régions *semi-excitées*, c.-à-d. de taille  $O(h^{\gamma}), \gamma > 0$ .

Cette méthode n'est peut-être pas la plus naturelle. Son avantage est de fournir des objets manipulables sans avoir à tronquer la forme normale à un rang fini, ce qui est d'habitude la méthode traditionnelle d'utilisation de la forme normale de Birkhoff. Il reste cependant que la forme normale obtenue ne donne pas davantage de renseignements que la série formelle initiale, dans la mesure où elle est obtenue par quantification « après coup » de la forme normale classique. En outre, l'intérêt de la normalisation à la Birkhoff réside aussi dans l'obtention d'une approximation à un ordre arbitraire par des *polynômes*, qui sont des objets faciles à manipuler; on perd cet avantage en cherchant à resommer.

Nous proposons dans ce chapitre d'utiliser une forme normale quantique dans une algèbre naturellement associée à la normalisation classique, celle des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux. Partant d'un opérateur de type Schrödinger, on obtient une série formelle normalisée dont les troncatures donneront des approximations arbitraires du spectre dans les région semi-excitées. Nous montrerons que cette approche permet non seulement de retrouver les résultats de l'article [79], mais aussi d'étudier les problèmes de résonances entre les fréquences principales du système, en profitant de la facilité d'étude des opérateurs différentiels polynômiaux donnée par la théorie des opérateurs de Toeplitz (Boutet de Monvel et Guillemin, [12]). Le cas de la résonance  $1 : 1 : \cdots : 1$  sera présenté. Un travail conjoint avec Y. Colin de Verdière devrait traiter prochainement le cas de la résonance 2 : 1, pour lequel on utilisera la théorie des systèmes complètement intégrables (en dimension 2, la forme normale est quantiquement complètement intégrable).

Venons-en à l'énoncé du théorème principal. On se donne un *h*-opérateur pseudo-différentiel  $\hat{H}(h)$  dans  $S^0(\mathbb{R}^{2n})$  auto-adjoint, dont le symbole de Weyl est classique, et dont le symbole principal p vérifie  $\liminf_{(x,\xi)\to\infty} p(x,\xi) > 0$  et admet un minimum global non-dégénéré en l'origine, de valeur 0. Quitte à

effectuer un changement symplectique linéaire pour les calculs de symboles, on peut supposer que la partie quadratique de p à l'origine s'écrit :

$$q_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (x_i^2 + \xi_i^2).$$

On lui associe alors l'opérateur « oscillateur (an)harmonique quantique »:

$$\tilde{H}_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2 \right).$$

En fait, on peut associer à  $\hat{H}(h)$  de façon unique, via son symbole de Weyl, toute une série formelle  $\tilde{H}(\varepsilon) = \tilde{H}_2 + \varepsilon \tilde{H}_3 + \varepsilon^2 \tilde{H}_4 + \dots$ , où  $\tilde{H}_j$  est un opérateur différentiel à coefficients polynômiaux, somme de termes homogènes de degrés  $\leq j$  et de même parité que j.

Finalement, la forme normale de Birkhoff quantique (proposition 5.2.2) associe à  $\tilde{H}(\varepsilon)$  une série normalisée  $\tilde{K}(\varepsilon)$  de même nature, mais dont les termes commutent avec  $\tilde{H}_2$  (et en outre  $\tilde{K}_2 = \tilde{H}_2$ ).

On désigne par  $\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon)$  la série tronquée à l'ordre N :

$$\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \tilde{K}_{j+2},$$

et pour tout C > 0, on note  $\mathfrak{E}^{\delta}(C,\varepsilon)$  le sous-espace propre de  $\tilde{H}_2$  associé aux valeurs propres inférieures à  $C\varepsilon^{-\delta}$ . Rappelons qu'on connaît explicitement les fonctions propres et valeurs propres de  $\tilde{H}_2$  (voir section 5.4.1). Le résultat principal du chapitre est le suivant :

**Théorème 1.2.5 (théorème 5.4.1)** Soit  $\gamma \in [0,1]$  et  $\delta = 2(1 - \gamma)$ . Pour tout c > 0, il existe C > c tel que, si  $E_0(h) \leq E_1(h) \leq \cdots$  et  $\tilde{E}_0^{(N)}(\varepsilon) \leq \tilde{E}_1^{(N)}(\varepsilon) \leq \cdots$  sont les valeurs propres de  $\hat{H}(h)$  et  $\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon)_{\uparrow \mathfrak{C}^{\delta}(C,\varepsilon)}$ , alors

$$E_j(h) - h\tilde{E}_j^{(N)}(\sqrt{h}) = O(h^{(N+3)\frac{\gamma}{2}}),$$

uniformément pour tous j tels que  $E_j(h)$  (ou  $h\tilde{E}_j^{(N)}(\sqrt{h})) \leq ch^{\gamma}$ .

On peut donc se ramener à l'étude spectrale de  $\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon)_{\dagger \mathfrak{E}^{\delta}(C,\varepsilon)}$ . Lorsque les fréquences  $\omega_i$  ne présentent pas de relation de résonance jusqu'à un certain ordre  $N_0 + 2$ , la série normalisée tronquée  $\tilde{K}^{(N_0)}(\varepsilon)$  est complètement intégrable, et on retrouve le résultat principal de l'article [79] : il existe un symbole  $g(x_1, \ldots, x_n; h) \sim \sum_{k \ge 0} h^k g_k$  tel que les valeurs propres de  $\hat{H}(h)$  dans une région semi-excitée sont de la forme

$$g\left(h(\alpha_1+\frac{1}{2}),\ldots,h(\alpha_n+\frac{1}{2});h\right)+O(h^{\frac{\gamma}{2}(N_0+3)}),$$

avec  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Lorsque  $\gamma = 1$ , le théorème permet de retrouver le développement asymptotique des états de fond de puits de Helffer-Sjöstrand; l'espace  $\mathfrak{E}^{\delta}(C,\varepsilon)$  est alors de dimension finie indépendante de  $\varepsilon$ , et les valeurs propres cherchées sont données par la théorie de Kato des perturbations analytiques de matrices autoadjointes. On comprend alors bien l'existence de puissances demi-entières de hdans le développement asymptotique; celles-ci apparaissent pour des exposants supérieurs à  $N_0/2 + 1$ .

Les applications nouvelles du théorème concernent l'étude de cas résonnants. Lorsque la résonance est de type  $1 : 1 : \dots : 1$ , nous obtenons que les valeurs propres semi-excitées sont réparties dans des bandes de largeur  $O(h^{2\gamma})$  ( $\gamma \in ]0,1[$ ) autour des valeurs propres  $h\lambda_k = h\omega_1(k + \frac{n}{2})$  de l'oscillateur harmonique. Ces bandes peuvent se recouvrir les unes les autres, mais on montre que pour ktendant vers  $\infty$ , la partie principale de leur répartition est située dans des bandes de largeur  $O(h^{\gamma+1})$ , qui sont donc, cette fois-ci, deux à deux distinctes pour hassez petit. Le contrôle précis de cette répartition asymptotique est déterminé par le symbole principal de  $\tilde{K}_4$  (théorème 5.5.1).

### **1.3** Autres pistes de recherche

Les travaux que nous avons effectués sur les singularités des systèmes complètement intégrables classiques et semi-classiques nous ont amené à nous poser de multiples questions. Diverses discussions avec des collègues en ont soulevé bien d'autres. Cependant, il faut bien l'admettre, nombreuses sont celles qui sont encore sans réponse... Nous présentons ici, un peu en vrac, quelques unes de ces questions, qui nous semblent directement reliées avec les résultats de cette thèse. Nous espérons qu'elles donneront lieu à de prochains travaux, tout en sachant que certaines demanderont probablement un temps non négligeable...

#### 1.3.1 Singularités non-dégénérées en dimension 4

Des quatre types de singularités non-dégénérées pour les systèmes complètement intégrables en dimension 2n = 4, nous avons traité celui qui semblait le plus « original », car sans équivalent en dimension 2, la singularité *focusfocus*. Nous avons aussi indiqué comment se traitait le cas elliptique-elliptique par la théorie des actions toriques. Restent les cas elliptique-hyperbolique et hyperbolique-hyperbolique. Il est probable qu'une mixture des singularités de dimension 2 (c.-à-d. à 1 degré de liberté), dont le cas hyperbolique est fourni par les articles de Colin de Verdière et Parisse, puisse en venir à bout. La description adéquate de la topologie de la fibration lagrangienne devrait pouvoir être extraite du livre de Lerman et Umanskiy [65].

#### 1.3.2 *Focus-focus* en codimension 4

Les résultats du chapitre 4 devraient en principe pouvoir être étendus au cas d'une variété de points critiques de dimension 2n - 4, transversalement à

laquelle la singularité est de type *focus-focus*. La variété critique est un tore isotrope et il suffit peut-être de dire que les résultats obtenus sont uniformes lorsqu'on décrit le tore.

#### 1.3.3 Invariants symplectiques focus-focus

Les conditions de Bohr-Sommerfeld associées à une singularité focus-focus, données par le théorème 4.6.9, font intervenir une quantité géométrique  $I_{\gamma_0}$  qui s'obtient par déformation et régularisation des intégrales d'action. On peut aussi l'exprimer à l'aide des fonctions f(c) et g(c) définies de la manière suivante. On se place dans des coordonnées locales symplectiques dans lesquelles le système classique s'écrit sous la forme normale focus-focus standard  $(q_1,q_2)$ . Nous avons défini au paragraphe 4.6.3 les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$ , donnés par les  $q_i$ près du point critique. Pour c proche, mais différent, de la valeur critique 0, on note (t(c),s(c)) les coordonnées d'un générateur du réseau des périodes : c.-à-d. tels que  $t(c)\mathcal{X}_1 + s(c)\mathcal{X}_2$  soit périodique de période primitive 1. On pose alors

$$f(c) = t(c) + \ln c \text{ et } g(c) = s(c) - \arg c.$$

Ce sont des fonctions  $C^{\infty}$  dans un voisinage de 0 dont on peut montrer que leurs germes formels en 0 ne dépendent pas de la transformation canonique utilisée pour arriver à la forme normale. Ces germes sont-ils les seuls invariants *semiglobaux* de la fibration singulière? Autrement dit, deux telles fibrations ayant les mêmes fonctions f et g sont-elles symplectiquement difféomorphes dans un voisinage de la fibre critique?

#### 1.3.4 Calcul numérique

Nous avons mentionné l'intérêt que les conditions de Bohr-Sommerfeld singulières présentent pour la détermination numérique du spectre. D'une part, elles devraient donner lieu à des calculs extrêmement rapides, comparés aux techniques standard de diagonalisations de grandes matrices. D'autre part, elles sont spécifiquement écrites pour étudier la singularité du système, alors que les méthodes habituelles ont justement tendance à perdre beaucoup de précision en présence de singularités. Il serait peut-être utile de disposer d'un programme calculant le spectre conjoint à partir des données géométriques du système, afin de pouvoir le comparer aux résultats des méthodes habituelles, et de persuader les analystes numériciens de l'intérêt des conditions de Bohr-Sommerfeld singulières...

De la même façon, il serait intéressant d'appliquer numériquement le théorème 5.4.1 pour la détermination des états semi-excités de fond de puits.

#### 1.3.5 Problèmes inverses et classe de Chern

Nous avons montré comment déceler sur le spectre la présence de la monodromie du système. En cas de multiples points *focus-focus*, on devrait donc être capable de compter ce nombre de points sur un relevé du spectre. On a montré en outre comment localiser la valeur critique sur le spectre. Il reste à comprendre la façon dont se manifeste au niveau quantique l'autre invariant symplectique des fibrations complètement intégrables, à savoir la classe de Chern du système ([37]). Et, si possible, trouver des exemples physiques où elle intervient. Cette question est posée aussi par Bates dans l'article [3].

#### 1.3.6 Asymptotiques spectrales pour Sturm-Liouville

Cette question m'a été posée par J.J. Duistermaat. Les formules asymptotiques pour le spectre conjoint des systèmes admettant une singularité de type *focus-focus* s'appliquent en particulier au problème du pendule sphérique. Or ce dernier peut aussi s'écrire sous la forme d'un opérateur de Sturm-Liouville

$$-\frac{h^2}{2}\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz} + \frac{h^2n^2}{2(1-z^2)} + z \quad \text{pour } z \in ]-1,1[,$$

qui n'est a priori pas facile à étudier. Une telle remarque est faite aussi par Charbonnel [17] et Child [19] pour le problème analogue dans  $\mathbb{R}^2$ , avec un potentiel radial V(r). Dans ce dernier article, l'auteur propose d'oublier dans V(r) les termes petits lorsque  $r \sim 0$ , ce qui le mène à l'étude de l'équation de Kummer dont les solutions sont connues explicitement en termes de fonctions hypergéométriques. Nos résultats devraient être en mesure de justifier cette approximation; peuvent-ils donc fournir un nouveau point de vue sur les opérateurs de Sturm-Liouville?

#### **1.3.7** États semi-excités en résonance $k : \ell$

Nous avons mentionné que l'étude des états semi-excités en dimension n = 2pour des opérateurs pseudo-différentiels ayant un minimum non-dégénéré dont les fréquences principales sont en résonance 2 : 1 fera l'objet d'un prochain travail avec Y. Colin de Verdière. Il semble naturel de penser qu'elle devrait se généraliser à une résonance quelconque  $k : \ell$ , puisqu'on est toujours dans la situation où la forme normale de Birkhoff est complètement intégrable. Le problème est que la dynamique classique dépend fortement des coefficients k et  $\ell$  (cf. l'article [38]). 

# Chapitre 2

# Formes normales

Ce chapitre présente, dans un premier temps, la classification locale des singularités nondégénérées des systèmes complètement intégrable, due à Eliasson. Ces résultats sont ensuite utilisés pour prouver plusieurs théorèmes de formes normales pour les systèmes semi-classiques correspondants.

Le texte de ce chapitre est basé sur la prépublication [81]. L'étude des propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger  $-\frac{h^2}{2}\Delta + V$ en régime semi-classique  $(h \to 0)$  en fonction de la forme du potentiel V pose naturellement le problème de savoir dans quelle mesure, étant donné un hopérateur pseudo-différentiel P(h), son symbole principal p influe sur la nature des solutions microlocales de l'équation :

$$Pu = O(h^{\infty}). \tag{2.1}$$

Dans le cas où P est auto-adjoint à variétés caractéristiques compactes (par exemple, l'opérateur de Schrödinger sur  $\mathbb{R}$  avec un potentiel tendant vers l'infini en  $\pm \infty$ ), on a ainsi accès au comportement microlocal du spectre semi-classique. Ce problème est discuté par exemple dans les articles [51], [52] et les références qui y sont citées.

Au voisinage de *points réguliers* de p, la théorie est bien connue et ne réserve plus guère de surprise. En effet, P se conjugue par un opérateur intégral de Fourier à un opérateur de dérivation  $\frac{h}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x}$ . Cette forme normale, qui n'est qu'une autre formulation des solutions BKW, permet de trouver les conditions, dites « de Maslov-Bohr-Sommerfeld», sous lesquelles l'équation (2.1) admet des solutions  $L^2$ . L'article [36] constitue l'une des meilleures introductions au sujet. Nous étudierons en détail ces conditions au chapitre 4.

La présence de *points critiques*, et en particulier instables, rend les choses plus intéressantes, comme en témoignent par exemple les articles [14], [77], [27], [28]. Néanmoins, comme l'ont remarqué les auteurs des articles [77], [27], on peut encore trouver une *forme normale* au voisinage du point critique, pourvu que celui-ci soit non-dégénéré. Y .Colin de Verdière et B .Parisse [28] montrent comment en déduire une version singulière des conditions de Bohr-Sommerfeld qui permet une description très précise du spectre semi-classique.

Le but de ce chapitre est de généraliser le théorème de forme normale microlocale à des systèmes complètement intégrables d'opérateurs pseudo-différentiels en dimension quelconque. On obtient des analogues semi-classiques étroits des résultats classiques d'Eliasson.

Nous montrerons au chapitre 4 comment ces résultats permettent, via des conditions de Bohr-Sommerfeld singulières, de décrire très précisément le *spectre conjoint* de ces systèmes complètement intégrables, pour un certain type de singularité.

Mentionnons aussi que Bleher, Kosygin et Sinai [7] arrivent à une description spectrale des systèmes de Liouville (qui représentent une classe générale de systèmes intégrables en dimension 2), par une approche différente.

### 2.1 Introduction

Sur une variété symplectique  $(M,\omega)$  de dimension 2n, un système complètement intégrable est la donnée de n fonctions  $f_1, \ldots, f_n$  en involution pour le crochet de Poisson défini par la structure symplectique, et dont les différentielles sont presque partout indépendantes. Si H est un hamiltonien appartenant à l'algèbre des fonctions  $C^{\infty}$  fonctionnellement engendrées par  $f_1, \ldots, f_n$ , il est dit complètement intégrable et les  $f_i$  sont des intégrales premières du mouvement. Un tel système définit une action hamiltonienne locale de  $\mathbb{R}^n$  dans M, d'application moment :

$$F : M \ni m \mapsto (f_1(m), \dots, f_n(m)) \in \mathbb{R}^n,$$

et dont les orbites sont génériquement les fibres lagrangiennes  $F^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Plus précisément, on sait (théorème d'Arnold-Liouville [37]) que si c est une valeur régulière de F, et si  $F^{-1}(c)$  est compacte, alors au voisinage de c, les ensembles de niveau de F sont des tores lagrangiens qui s'écrivent  $\xi = cst$  dans des bonnes coordonnées symplectiques  $(x,\xi)$ . En outre, dans ces coordonnées – dites « actions  $(\xi)$  - angles (x) » – le mouvement dans chaque tore est linéaire.

Supposons maintenant qu'on se donne n opérateurs pseudo-différentiels  $P_1$ , ...,  $P_n$  sur une variété X de dimension n, qui commutent deux-à-deux, et dont les symboles principaux forment un système complètement intégrable sur  $T^*X$ . En dehors des points critiques de l'application moment, l'usage des coordonnées actions-angles classiques permet alors de se ramener au cas où les opérateurs sont simplement les  $\frac{h}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Une telle forme normale permet d'écrire les conditions de Bohr-Sommerfeld sous lesquelles on peut résoudre simultanément les équations  $P_i u = O(h^{\infty})$  et qui sous certaines hypothèses, donnent la forme du spectre conjoint des  $P_i$ . Comme le cas unidimensionnel mentionné plus haut, ceci est connu depuis longtemps, au moins des physiciens quantiques. Les preuves mathématiques rigoureuses de ce phénomène, comprenant les asymptotiques complètes des valeurs propres, sont données par les travaux d'Anne-Marie Charbonnel [17] et Yves Colin de Verdière [23].

La question qui nous intéresse est donc de savoir ce que devient le système au voisinage d'un point critique de F. Au niveau classique, on est amené à se placer dans l'hypothèse d'un point critique « de Morse », ou « non-dégénéré », en un sens précisé en section 2.2.

Le résultat principal (théorèmes 2.3.1 et 2.3.4) peut, en gros, se formuler ainsi :

« l'algèbre engendrée par les opérateurs  $P_i$  est, à  $O(h^{\infty})$  près, conjuguée par un opérateur intégral de Fourier à une algèbre standard ne dépendant que des dérivées secondes des symboles principaux  $p_i$  au point critique. »

C'est une généralisation du théorème 12 de l'article [27], où le résultat est donné en dimension 1. Nous verrons cependant que, comme le théorème d'Eliasson le laissait prévoir, le cas multi-dimensionnel introduit une subtilité, due au fait que l'algèbre standard en question peut avoir une formulation légèrement différente selon que les fibres lagrangiennes sont localement connexes ou non. On en donnera malgré tout une description complète dans le cas général (proposition 2.3.2).

### 2.2 Formes normales classiques

Le but de cette section est de présenter les théorèmes de formes normales classiques, qui sont essentiellement dus à Eliasson [42], mais aussi de mettre clairement en valeur les ingrédients essentiels pour la quantification semi-classique de la section suivante, comme le *commutant classique* (proposition 2.2.6) et le *lemme de Poincaré critique*.

#### 2.2.1 Le théorème d'Eliasson

Soit  $(M,\omega)$  une variété symplectique de dimension 2n, et  $m \in M$ . Le crochet de Poisson munit l'espace des fonctions  $C^{\infty}$  sur M d'une structure d'algèbre de Lie. On fixe des coordonnées symplectiques  $(x,\xi)$  sur  $T_mM$  et on note  $\mathcal{H}$  l'homomorphisme de la sous-algèbre de Lie des fonctions critiques en m sur l'espace  $\mathcal{Q}(2n)$  des formes quadratiques sur  $\mathbb{R}^{2n} = \{(x,\xi)\}$ , qui à f associe sa hessienne. La structure d'algèbre de Lie de  $\mathcal{Q}(2n)$  est aussi donnée par le crochet de Poisson.  $\mathcal{Q}(2n)$  est ainsi canoniquement isomorphe aux matrices hamiltoniennes  $\mathfrak{sp}(2n)$ : si  $q \in \mathcal{Q}(2n)$  est représentée par la matrice symétrique B, il lui est associé l'élément  $JB \in \mathfrak{sp}(2n)$ , où J est la matrice de la forme symplectique.

Soit  $(f_1, \ldots, f_n)$  un système complètement intégrable sur M. On dit que m est un point critique du système s'il est critique pour l'application moment F. Dans toute cette thèse, on considérera toujours que la singularité est de codimension maximale, au sens où chaque  $f_i$  est critique en m. On supposera aussi que  $f_i(m) = 0$ , ce qui n'ôte aucune généralité.

À un tel système complètement intégrable singulier, on peut associer une sous-algèbre réelle  $\mathfrak{c}_F$  de  $\mathcal{Q}(2n)$ , à savoir la sous-algèbre engendrée par

$$\{\mathcal{H}(f_1),\ldots,\mathcal{H}(f_n)\}.$$

On remarque que  $\mathfrak{c}_F$  est toujours abélienne.

**Définition 2.2.1** Un système complètement intégrable singulier d'application moment F est dit non-dégénéré au point m si  $\mathfrak{c}_F$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathcal{Q}(2n)$ .

Rappelons qu'on appelle sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semisimple  $\mathfrak{a}$  un élément maximal parmi les sous-algèbres de Lie  $\mathfrak{c}$  commutatives et qui vérifient la propriété suivante :

 $\forall H \in \mathfrak{c}, \quad \mathrm{ad}_H \text{ est un endomorphisme semi-simple de } \mathfrak{a}.$  (2.2)

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}(2n)$  est de rang n, et ses éléments réguliers sont les matrices semi-simples à valeurs propres simples. Puisque les sous-algèbres de Cartan sont les commutants des éléments réguliers (voir par exemple Bourbaki [9]), on en déduit la caractérisation suivante :

**Proposition 2.2.1** Une sous-algèbre commutative c de  $\mathfrak{sp}(2n)$  de dimension n est une sous-algèbre de Cartan si et seulement si elle contient une matrice semi-simple à valeurs propres simples. Elle est alors égale au commutant de cette matrice. En effet, supposons que  $\mathfrak{c}$  contienne une telle matrice A. Le commutant de A est une sous-algèbre de Cartan, donc de dimension n; puisqu'elle contient  $\mathfrak{c}$ , elle est égale à  $\mathfrak{c}$ .

La proposition indique aussi que le fait d'être Cartan est stable par petite perturbation de l'algèbre  $\mathfrak{c}$ .

Cherchons maintenant à classifier les matrices hamiltoniennes semi-simples (réelles) modulo conjugaison par un symplectomorphisme linéaire (le résultat est dû à Williamson [89]).

Les valeurs propres d'une matrice hamiltonienne A vont par paires  $(\lambda, -\lambda)$ ; si les valeurs propres sont toutes distinctes, ce qu'on suppose désormais, elle est donc inversible. On vérifie facilement que les sous-espaces propres  $E_{\pm\lambda} = \ker(A - \lambda I) \oplus \ker(A + \lambda I)$  associés à des paires différentes sont symplectiquement orthogonaux. Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on peut construire une base symplectique de  $E_{\pm\lambda}$  dans laquelle la restriction  $A_{\uparrow E_{\pm\lambda}}$  est donnée par le bloc, dit hyperbolique,

$$\left(\begin{array}{cc}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{array}\right).$$

Si  $\lambda = i\omega \in i\mathbb{R}$ , le même résultat vaut pour le bloc *elliptique* 

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{array}\right).$$

Enfin si  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha\beta \neq 0$ , il existe une base symplectique de  $E_{\pm\lambda} \oplus E_{\pm\bar{\lambda}}$  dans laquelle la restriction de A est donnée par le bloc suivant, dit *focus-focus* (on trouve aussi la terminologie « hyperbolique complexe » ou « loxodromique »; cf. [90])

$$\left(\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & -\alpha \end{array}\right)$$

Les matrices qui commutent avec A laissent stable cette décomposition par blocs, ce qui implique la classification suivante des sous-algèbres de Cartan réelles de  $\mathcal{Q}(2n)$ :

**Théorème 2.2.2 (Williamson)** Soit  $\mathfrak{c}$  une sous-algèbre de Cartan réelle de  $\mathcal{Q}(2n)$ . Il existe des coordonnées symplectiques linéaires  $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , et une base  $q_1, \ldots, q_n$  de  $\mathfrak{c}$  telle que chaque  $q_i$  ait l'une des trois formes suivantes :

- $q_i = x_i \xi_i$  (singularité hyperbolique)
- $-q_i = x_i^2 + \xi_i^2$  (singularité elliptique)
- $q_i = x_i \xi_{i+1} x_{i+1} \xi_i$ , auquel cas on demande que  $q_{i+1} = x_i \xi_i + x_{i+1} \xi_{i+1}$ (singularité focus-focus).

Suivant Eliasson [42], on appellera  $(q_1, \ldots, q_n)$  une base standard de  $\mathfrak{c}$ ; on dira que  $\mathfrak{c}$  est de type  $(m_e, m_h, m_f)$ , avec  $m_e + m_h + 2m_f = n$ , si une base standard

contient  $m_e$  éléments de type elliptique,  $m_h$  éléments hyperboliques, et  $m_l$  paires de type focus-focus.

**Remarque 2.2.1.** La condition (2.2) est nécessaire; par exemple, pour  $\mathfrak{a} = \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ , la sous-algèbre engendrée par  $q = \xi^2$  est commutative maximale mais ne relève pas de la classification ci-dessus. En effet,  $\mathrm{ad}_q = 2\xi \frac{\partial}{\partial x}$  est nilpotente donc pas semi-simple.

On note  $\mathcal{A}$  la sous-algèbre de Lie de  $C^{\infty}(M)$  fonctionnellement engendrée par les  $f_1, \ldots, f_n$ . Si  $g_1, \ldots, g_n$  est un système générateur de  $\mathcal{A}$ , de telle sorte qu'il existe des fonctions  $F_1, \ldots, F_n$  telles que

$$f_i = F_i(g_1, \dots, g_n), \ i = 1, \dots, n$$

alors les  $\mathcal{H}(g_i)$  forment une base de A qui s'obtient à partir de  $\mathcal{H}(f_i)$  par le changement de base linéaire  $dF^{-1}(0)$ . Ceci montre en particulier que la sousalgèbre de Cartan associée ne dépend pas de la base de  $\mathcal{A}$  choisie.

On a alors le théorème fondamental:

**Théorème 2.2.3 (Eliasson [42, 4.1])** Pour un tel système complètement intégrable, soit  $(q_1, \ldots, q_n)$  une base standard de l'algèbre de Cartan associée. Alors le feuilletage lagrangien singulier donné par les surfaces de niveau des  $f_i$  est localement symplectiquement égal à celui donné par les  $q_i$ .

Autrement dit, il existe un difféomorphisme symplectique  $\varphi$  au voisinage de m tel que :

$$\forall i,j \quad \{f_i \circ \varphi, q_j\} = 0.$$

#### 2.2.2 Un exemple : le problème de C. Neumann classique

Le problème de C. Neumann est celui du mouvement d'une particule sur une sphère de dimension n soumise à une force dérivant d'un potentiel quadratique. On se donne donc une matrice symétrique réelle A définie positive de taille n+1. Le potentiel V est la restriction à  $S^n$  de la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  associée :

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle.$$

Le mouvement est décrit sur  $T^*S^n$  par l'hamiltonien

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x).$$

La métrique sur la sphère est celle induite par la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et la structure symplectique sur  $T^*S^n$  n'est autre que la restriction de la structure standard de  $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ . Remarquons ici que le problème est invariant par antipodie, ce qui nous autorise à le considérer sur  $\mathbb{P}^n$  plutôt que sur  $S^n$ .

Il est pratique de voir ce système comme la restriction d'un système hamiltonien sur  $T^* \mathbb{R}^{n+1}$  de la façon suivante :
Contraindre le mouvement à s'effectuer sur  $S^n$  revient à tenir compte d'une force de réaction normale à la sphère. L'équation du mouvement prend la forme :

$$\ddot{x} = -V'(x) + \lambda x.$$

De  $|x|^2 = 1$ , on tire  $\langle x, \dot{x} \rangle = \langle x, \ddot{x} \rangle + |\dot{x}|^2 = 0$ , ce qui permet de déterminer  $\lambda$ :

$$\lambda = \langle V'(x), x \rangle - |\dot{x}|^2 = 2V(x) - |\dot{x}|^2.$$

On peut alors vérifier que cette équation est obtenue en restreignant à

$$T^*S^n = \{(x,\xi), |x|^2 = 1, \langle x,\xi \rangle = 0\}$$
 (2.3)

le champ de vecteurs sur  $T^* \mathbb{R}^{n+1}$  d'hamiltonien :

$$H_0(x,\xi) = V(x) + \frac{1}{2}(|x|^2|\xi|^2 - \langle x,\xi\rangle^2).$$

On peut alors montrer que  $H_0$  est complètement intégrable, et on dispose même d'un système explicite d'intégrales en involution, trouvé en 1975 par Uhlenbeck. Ce problème a des liens très étroits avec le flot géodésique sur un *n*-ellipsoïde; à ce sujet, voir l'article de Moser [70].

Nous nous intéressons ici aux points fixes du flot.

**Proposition 2.2.4** Le problème de C. Neumann sur  $T^*\mathbb{P}^n$  a exactement n+1 points fixes  $p_0, \ldots, p_n$ . En ordonnant convenablement les  $p_i$ , pour un potentiel générique, le système complètement intégrable associé est, au voisinage de  $p_i$ , non-dégénéré de type (n - i, i, 0).

**Démonstration**. On détermine les points critiques de H par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On trouve les n + 1 points  $p_i = (e_i, 0)$ , où  $(e_1, \ldots, e_{n+1})$  est une base orthonormée de vecteurs propres de A. On note  $\lambda_i^2$ les valeurs propres de A, et on suppose qu'elles sont indicées en ordre croissant. On note  $(x,\xi)$  la base symplectique de  $T^*\mathbb{R}^{n+1}$  induite par  $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ , de sorte que  $(x_1, \ldots, \check{x}_i, \ldots, x_{n+1}, \xi_1, \ldots, \check{\xi}_i, \ldots, \xi_{n+1})$  forme une carte locale canonique de  $T^*S^n$  près de  $p_i$ . En  $p_i$ , la partie quadratique de H s'écrit alors :

$$\mathcal{H}_{p_i}(H) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \left( (\lambda_j^2 - \lambda_i^2) x_j^2 + \xi_j^2 \right),$$

qui devient, par le changement symplectique  $x_j \to |\lambda_j^2 - \lambda_i^2|^{-\frac{1}{4}} x_j, \, \xi_j \to |\lambda_j^2 - \lambda_i^2|^{\frac{1}{4}} \xi_j,$ 

$$\mathcal{H}_{p_i}(H) = \frac{1}{2} \left( \sum_{j < i} \sqrt{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} (\xi_j^2 - x_j^2) + \sum_{j > i} \sqrt{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} (x_j^2 + \xi_j^2) \right).$$

On voit que si les  $\lambda_j$  sont deux à deux distinctes (ce qui constitue la condition de généricité énoncée),  $\mathcal{H}_{p_i}(H)$  est pour chaque i un élément régulier de  $\mathcal{Q}(2n)$ , de type (n - i, i, 0).

**Remarque 2.2.2.** On n'obtient pas dans cet exemple de singularité focusfocus. Mais ce dernier type de singularité, même s'il a longtemps été négligé, est loin d'être rare; il apparaît par exemple au point d'équilibre instable du pendule sphérique (Duistermaat [37]), ou de la « bouteille de Champagne » (Bates [4]). Une étude détaillée de la singularité focus-focus est présentée au chapitre 4.  $\triangle$ 

## 2.2.3 Le commutant classique

De la même façon qu'au niveau quadratique l'objet essentiel était pour nous la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{c}_F$ , égale au commutant des  $q_j$  dans  $\mathcal{Q}(2n)$ , on voit à l'énoncé du théorème 2.2.3 que l'algèbre de fonctions  $C^{\infty}$  qui va nous intéresser tout au long de ce chapitre est le *commutant classique* des  $q_j$ , qu'on note  $C_q$ :

$$C_q = \{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}), \forall j, \{ f, q_j \} = 0 \}.$$

C'est l'algèbre des fonctions localement constantes sous l'action des champs hamiltoniens des  $q_i$ .

Décrivons la structure de cette algèbre. Une première idée naturelle est que, au moins formellement, tout élément de  $C_q$  doit pouvoir s'exprimer comme « fonction des seules variables  $q_1, \ldots, q_n$  ». En dehors du cadre formel, ce n'est cependant pas aussi simple.

Notons  $z_i = (x_i, \xi_i)$ , et soit  $H_i$  l'ensemble des points  $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que  $z_i = 0$ . L'union des  $H_i$  est exactement le lieu des points critiques de l'application moment  $q = (q_1, \ldots, q_n)$ .

**Lemme 2.2.5** Soit U un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} H_i)$  tel que pour tous  $c \in \mathbb{R}^n$ , la feuille lagrangienne  $U \cap q^{-1}(c)$  soit connexe (ou vide). Alors la restriction de toute fonction  $f \in C_q$  à U peut s'écrire comme fonction  $C^{\infty}$  de  $(q_1, \ldots, q_n)$ uniquement.

**Démonstration.** En chaque point z de  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} H_i)$ , les fonctions  $q_1, \ldots, q_n$ sont indépendantes, donc, d'après le théorème de Darboux-Carathéodory, elles peuvent être complétées en une carte symplectique  $(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n)$  sur un voisinage  $\Omega$  de z. La condition d'appartenance à  $C_q$  devient alors  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ . En recouvrant U par de tels voisinages  $\Omega_{\alpha}$ , on obtient des fonctions  $F_{\alpha}$  telles que

$$f_{\upharpoonright \Omega_{\alpha}} = F_{\alpha}(q_1, \ldots, q_n).$$

L'hypothèse de connexité des surfaces de niveau de q implique que la valeur de  $F_{\alpha}(q_1, \ldots, q_n)$  ne dépend pas de  $\alpha$ . On obtient ainsi une unique fonction  $C^{\infty} F$  telle que

$$f_{\upharpoonright U} = F(q_1, \ldots, q_n)$$

ce qui répond à la question.

Une conséquence directe de lemme est que  $C_q$  est une algèbre *commuta*tive. En effet, deux fonctions  $F_1(q_1, \ldots, q_n)$  et  $F_2(q_1, \ldots, q_n)$  commutent. Donc deux éléments  $f_1$  et  $f_2$  de  $C_q$  commutent presque partout, et donc partout, par continuité du crochet de Poisson.

Supposons maintenant que n = 1 et que l'algèbre de Cartan  $\mathfrak{c}_q$  soit de type (1,0,0) (autrement dit, q est elliptique). Les surfaces de niveau de q sont des cercles; on peut donc, dans le précédent lemme, choisir  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et obtenir que toute  $f \in C_q$  s'écrive F(q) sur U. On peut montrer facilement qu'un tel F est en réalité  $C^{\infty}$  en 0, et donc que f s'écrit F(q) sur tout  $\mathbb{R}^2$ . Un même phénomène se produit lorsque n = 2 et que  $\mathfrak{c}_q$  est de type focus-focus (0,0,1); il suffit pour cela de faire le calcul en coordonnées complexes

$$u = x_1 + \sqrt{-1}x_2, \quad v = \xi_1 + \sqrt{-1}\xi_2,$$

dans lesquelles les surfaces de niveau s'écrivent  $\bar{u}v = cste$  et sont connexes (voir la thèse [42] pour le détail des calculs).

Le cas pathologique est donc celui d'une algèbre de type (0,1,0) (hyperbolique). En effet les surfaces de niveau ont chacune deux composantes connexes. Un élément de  $C_q$  est donc décrit par deux fonctions  $F_+$  et  $F_-$  telles que, par exemple,

$$f_{\uparrow x>0} = F_+(q), \quad f_{\uparrow x<0} = F_-(q).$$
 (2.4)

On voit facilement que  $F_+ - F_-$  doit être plate en 0, et réciproquement, tout couple de fonctions  $(F_+, F_-)$  sur  $\mathbb{R}$  tel que  $F_+ - F_-$  est plat en 0 définit un élément de  $C_q$  par (2.4).

On obtient ainsi l'énoncé suivant :

**Proposition 2.2.6**  $C_q$  est une algèbre de Poisson commutative. Si la sousalgèbre de Cartan  $\mathbf{c}_q$  est de type  $(m_e, m_h, m_l)$ , on note  $(q_1, \ldots, q_n)$  une base standard ordonnée, comportant en premier lieu les éléments hyperboliques. Pour chaque  $m_h$ -uplet  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{m_h}), \ \boldsymbol{\epsilon}_i = \pm 1$ , on pose

$$E_{\epsilon} = \{ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \forall i = 1, \dots, m_h, \quad \epsilon_i x_i > 0 \}.$$

Un élément f de  $C_q$  est caractérisé par la donnée de  $2^{m_h}$  fonctions  $F_{\epsilon} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  telles que :

$$\begin{array}{l} - \forall \epsilon, \ f_{\restriction E_{\epsilon}} = F_{\epsilon}(q_1, \dots, q_n). \\ - \forall (\epsilon, \epsilon'), \ F_{\epsilon} - F_{\epsilon'} \ est \ plate \ sur \ \overline{E_{\epsilon}} \cap \overline{E_{\epsilon'}} \end{array}$$

On en déduit un « lemme de division » que nous utiliserons souvent :

Lemme 2.2.7 Soit  $g \in C_q$ . Alors

- il existe des fonctions  $g_i \in C_q$  telles que :

$$g = g(0) + \sum_{i=1}^{n} g_i q_i.$$

- il existe des fonctions  $a_i \in C_q$  telles que :

$$\mathcal{X}_g = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{q_i}.$$

**Démonstration.** Par la formule de Taylor, chaque  $G_{\epsilon}$  correspondant à g et donné par la proposition 2.2.6 s'écrit:

$$G_{\epsilon}(q_1,\ldots,q_n) = G_{\epsilon}(0) + \sum_{i=1}^n q_i G_{\epsilon}^i(q_1,\ldots,q_n).$$

Pour chaque *i*, les couples  $(G_{\epsilon}^i, G_{\epsilon'}^i)$  vérifient les mêmes hypothèses de platitude, et donc définissent un élément  $g_i$  de  $C_q$ . Ces  $g_i$  répondent au premier point.

De la même façon, sur chaque  $E_{\epsilon}$  on a

$$\mathcal{X}_g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_\epsilon}{\partial q_i} \mathcal{X}_{q_i}.$$

En posant  $a_{\epsilon}^{i} = \frac{\partial G_{\epsilon}}{\partial q_{i}}$ , on voit que les  $a_{\epsilon}^{i}$  vérifient toujours les bonnes hypothèses de platitude. Ils définissent donc des fonctions  $a_{i} \in C_{q}$  qui répondent au deuxième point.

Revenant au théorème d'Eliasson, la proposition 2.2.6 implique immédiatement l'existence de formes normales « fortes » en l'absence d'élément hyperbolique :

**Corollaire 2.2.8** Soit  $\mathcal{A}$  un système complètement intégrable critique non dégénéré; soit  $(q_1, \ldots, q_n)$  une base standard de l'algèbre de Cartan associée. On suppose qu'il n'y a pas parmi les  $q_i$  d'élément hyperbolique. Alors il existe des coordonnées symplectiques dans lesquelles  $\mathcal{A}$  est engendrée par les  $q_i$ .

En d'autres termes, il existe un difféomorphisme symplectique  $\varphi$  au voisinage de m et des fonctions  $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , de différentielles indépendantes en 0, telles que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad f_i \circ \varphi = F_i(q_i, \dots, q_n).$$

**Remarque 2.2.3.** Il n'est pas certain que l'hypothèse de connexité des feuilles lagrangiennes soit nécessaire, puisque le résultat a été prouvé pour toute singularité non dégénérée en dimension deux : c'est le « Lemme de Morse isochore » ([30]). En outre, on sait (« théorème de Sternberg ») qu'en dimension quelconque n, un hamiltonien H hyperbolique non résonnant s'écrit  $\sum \lambda_i x_i \xi_i$  avec des  $\lambda_i$ indépendants sur  $\mathbb{Z}$ ) est complètement intégrable : il existe un symplectomorphisme local  $\varphi$  tel que  $H \circ \varphi$  soit une fonction des  $x_i \xi_i$ . Or si l'on se donne un système complètement intégrable  $\mathcal{A}$  de type purement hyperbolique ( $m_h = n$ ), il existe une base de  $\mathcal{A}$  formée par des fonctions toutes non-résonnantes. Il ne paraît donc pas absurde de penser qu'il puisse exister une forme normale dans ce cas. Guillemin et Schaeffer ([48]) exposent une belle démonstration du théorème de Sternberg, mais celle-ci semble ne pas pouvoir s'adapter à notre situation.

Cependant, bien que le résultat serait intéressant en lui-même, une forme normale générale ne nous serait pas utile puisque le lemme crucial 2.2.12, nécessaire pour traiter le problème au niveau semi-classique est, quant à lui, faux en présence d'un mélange d'éléments hyperboliques avec des éléments d'autres types.  $\triangle$ 

**Remarque 2.2.4.** Lorsque la singularité est entièrement *elliptique*  $(q_i = x_i^2 + \xi_i^2)$ , le corollaire 2.2.8 est montré d'une façon différente par Dufour et Molino [35].

**Remarque 2.2.5.** Dans la catégorie analytique, la structure du commutant perd toute sa richesse, puisqu'il n'y a pas de fonctions analytiques plates, en dehors des fonctions constantes... D'ailleurs l'analogue analytique du théorème 2.2.3 était connu bien avant (Rüssmann [76] en dimension 2, et Vey [80] en dimension quelconque).  $\triangle$ 

Si maintenant  $c_q$  contient des éléments hyperboliques  $(m_h \neq 0)$ , nous utiliserons l'énoncé suivant, corollaire du théorème 2.2.3 et du lemme 2.2.7:

**Corollaire 2.2.9** Soient  $f_1, \ldots, f_n$  des fonctions définissant un système complètement intégrable critique non dégénéré, et  $q_1, \ldots, q_n$  une base standard de l'algèbre de Cartan associée (de type quelconque); alors il existe un symplectomorphisme  $\varphi$  tel qu'on ait, au voisinage de 0, :

$$(f_1,\ldots,f_n)\circ\varphi=M.(q_1,\ldots,q_n),$$

où M est une matrice  $n \times n$  de fonctions éléments de  $C_q$ , inversible en z = 0.

Le fait que M soit inversible en 0 découle de l'hypothèse de non-dégénérescence du système : M(0) est la matrice telle que :

$$(\mathcal{H}(f_1),\ldots,\mathcal{H}(f_n))=M(0).\left(\mathcal{H}(q_1),\ldots,\mathcal{H}(q_n)\right)$$

Notons que, sur l'ouvert où M est inversible, son inverse reste formé d'éléments de  $C_q$ , puisque ce dernier est une algèbre de Poisson.

### 2.2.4 Un « Lemme de Poincaré » critique

Après les théorèmes de forme normale 2.2.3 et 2.2.8, l'ingrédient le plus important dont nous auront besoin pour mener à bien la quantification semiclassique est le résultat suivant :

**Théorème 2.2.10 (Eliasson)** Soit  $q_1, \ldots, q_n$  une base standard d'une sousalgèbre de Cartan  $\mathbf{c}_q$  de  $\mathfrak{sp}(2n)$ . Dans tout voisinage de 0, il existe un sousvoisinage  $\Omega$  de 0, tel que, si  $g_1, \ldots, g_n$  sont des fonctions  $C^{\infty}$  à valeurs réelles ou complexes vérifiant:

$$\forall i, j = 1, \dots, n \quad \{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\} \ sur \ \Omega,$$
(2.5)

alors il existe une fonction f définie sur  $\Omega$ , et des fonctions  $F_i \in C_q$  formellement uniques, telles que, sur  $\Omega$ ,

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \{f, q_i\} = g_i - F_i.$$
 (2.6)

En réalité, l'énoncé d'Eliasson dans le travail [42] ne mentionne pas l'existence d'un voisinage universel  $\Omega$ , mais celui-ci se déduit facilement de sa preuve. On rappellera comment lors de la preuve de la variante 2.2.12.

**Remarque 2.2.6.** La preuve étant constructive, si les  $g_i$  dépendent d'un paramètre de façon  $C^{\infty}$ , on peut trouver des fonctions f et  $F_i$  vérifiant (2.6) et dépendant aussi régulièrement de ce paramètre.  $\bigtriangleup$ 

**Remarque 2.2.7.** Pour  $c \in \mathbb{R}^n$ , notons  $\Omega_c$  la lagrangienne  $\cap q_i^{-1}(c_i)$ . Elle est singulière pour c = 0. Aux points réguliers, les champs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{q_i}$  forment une base de l'espace tangent à  $\Omega_c$ , ce qui permet de définir une 1-forme  $g_c$  sur  $\Omega_c$  par :

$$g_c(\mathcal{X}_{q_i}) = g_i$$

L'hypothèse du théorème 2.2.10 traduit alors que cette 1-forme est fermée. L'intégrer serait trouver une fonction f vérifiant  $\{f,q_i\} = g_i$ . Le théorème montre qu'on peut trouver une primitive f dépendant régulièrement du paramètre cmême en c = 0, pourvu qu'on retranche à g une certaine fonction de c uniquement. Cette fonction contient donc les singularités « gênantes » de g en 0.  $\Delta$ 

**Remarque 2.2.8.** La remarque précédente prouve que l'hypothèse 2.5 du théorème est nécessaire, ce qui se vérifie aussi immédiatement en utilisant l'identité de Jacobi.  $\triangle$ 

Supposons maintenant que  $f_1, \ldots, f_n$  soient des fonctions définissant un système complètement intégrable critique non dégénéré en un point m, et soit  $(q_1, \ldots, q_n)$  une base standard du la sous-algèbre de Cartan associée. Appliquant le théorème 2.2.3, on peut toujours supposer que, localement, les  $f_i$  sont dans  $C_q$ . Le théorème 2.2.10 admet alors le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.11** Avec les hypothèse précédentes, dans tout voisinage de m, il existe un sous-voisinage  $\Omega$  tel que, si  $g_1, \ldots, g_n$  sont des fonctions vérifiant:

$$\forall i,j=1,\ldots,n \quad \{g_i,f_j\}=\{g_j,f_i\} \ sur \ \Omega,$$

alors il existe une fonction a sur  $\Omega$  et des fonctions  $F_i$  dans  $C_q$  telles que

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \{a, f_i\} = g_i - F_i.$$
 (2.7)

**Démonstration**. Une application du lemme 2.2.7 donne l'existence d'une matrice N de fonctions dans  $C_q$ , inversible en 0, telle que :

$$(\mathcal{X}_{f_1},\ldots,\mathcal{X}_{f_n})=N.(\mathcal{X}_{q_1},\ldots,\mathcal{X}_{q_n}).$$

La 1-forme  $g_c$  définie sur les parties régulières des feuilles lagrangiennes  $\Omega_c$  par  $g_c(\mathcal{X}_{f_i}) = g_i$ , est donc donnée, dans la base  $(\mathcal{X}_{q_1}, \ldots, \mathcal{X}_{q_n})$ , par

$$(g_c(\mathcal{X}_{q_1}),\ldots,g_c(\mathcal{X}_{q_n}))=N^{-1}.(g_1,\ldots,g_n)$$

ce qui implique que l'hypothèse de fermeture  $\{g_i, f_j\} = \{g_j, f_i\}$  est équivalente à  $\{\tilde{g}_i, q_j\} = \{\tilde{g}_j, q_i\}$ , où on a noté

$$(\tilde{g}_1,\ldots,\tilde{g}_n)=N^{-1}.(g_1,\ldots,g_n).$$

Appliquant alors le théorème 2.2.10, on obtient, sur  $\Omega$ , une fonction a et des fonctions  $\tilde{F}_i$  telles que :

$$(\{a,q_1\},\ldots,\{a,q_n\}) = (\tilde{g}_1,\ldots,\tilde{g}_n) - (\tilde{F}_1,\ldots,\tilde{F}_n),$$

ce qui se réécrit:

$$N.(\{a,q_1\},\ldots,\{a,q_n\}) = (g_1,\ldots,g_n) - N.(\tilde{F}_1,\ldots,\tilde{F}_n).$$

Or  $N.(\{a,q_1\},...,\{a,q_n\}) = (\{a,f_1\},...,\{a,f_n\})$ , donc les fonctions *a* et

$$(F_1,\ldots,F_n)=N.(\tilde{F}_1,\ldots,\tilde{F}_n)$$

répondent à la question.

Bien sûr, diverses variantes de l'énoncé du théorème 2.2.10 et du corollaire ci-dessus s'obtiennent immédiatement en utilisant la proposition 2.2.6 et le lemme 2.2.7. En particulier, lorsque la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{c}_q$  ne contient pas d'élément hyperbolique  $(m_h = 0)$ , les  $F_i$  s'écrivent comme fonctions  $C^{\infty}$  de  $(q_1, \ldots, q_n)$ 

Nous allons montrer maintenant que tel est aussi le cas dans la situation extrême où  $\mathfrak{c}_q$  est de type entièrement hyperbolique  $(m_h = n)$ .

**Théorème 2.2.12** Avec les hypothèses du théorème 2.2.10, si en outre la sousalgèbre de Cartan  $\mathbf{c}_q$  est de type hyperbolique (0,n,0), alors il existe une fonction f définie sur  $\Omega$ , et des fonctions  $C^{\infty}$   $F_1, \ldots, F_n$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  telles que, sur  $\Omega$ ,

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \{f, q_i\} = g_i - F_i(q_1, \dots, q_n).$$
 (2.8)

On obtient ainsi un résultat optimal, dans le sens où une telle formulation devient fausse dès que  $m_h \neq 0$  et  $m_h \neq n$ .

**Démonstration.** Tout au long des sections (2.2.4.1) et (2.2.4.2), on pose donc  $q_i = x_i \xi_i$ . Le schéma de la preuve est classique : on commence par examiner le cas formel (2.2.4.1), qui résout le problème modulo des fonctions plates, puis la solution du système (2.8) est donnée par une formule explicite (2.2.4.2).

#### 2.2.4.1 Le cas hyperbolique formel

On note  $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^{2n})$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré k en les variables  $x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ . L'algèbre de Lie (pour le crochet de Poisson) des fonctions formelles est constituée par l'espace

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k.$$

Si  $P \in \mathcal{P}_m$ , la représentation adjointe

$$\operatorname{ad}_P : Q \mapsto \{P,Q\}$$

est un endomorphisme de  $\mathcal{P}$  envoyant  $\mathcal{P}_k$  sur  $\mathcal{P}_{m+k-2}$ . En particulier, si P est quadratique, ad<sub>P</sub> est un endomorphisme de chaque  $\mathcal{P}_k$ , et ad est une représentation de  $\mathcal{Q}(2n) = \mathcal{P}_2$ .

Soit  $\hat{\mathcal{A}}$  la sous-algèbre des fonctions formelles des  $q_i$  (une base de  $\hat{\mathcal{A}}$  est ainsi constituée par les monômes  $x^{\alpha}\xi^{\beta}$  avec  $\alpha = \beta$ ). Par abus de notation, on identifiera parfois  $\hat{\mathcal{A}}$  avec  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  par  $F = F(q_1, \ldots, q_n)$ .

On veut donc prouver le résultat suivant :

**Proposition 2.2.13** Soient  $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{P}$  telles que

$$\forall i, j = 1, \dots, n \quad \{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\}.$$

Alors il existe une fonction  $f \in \mathcal{P}$ , et des fonctions  $F_i \in \hat{\mathcal{A}}$  telles que

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \{f, q_i\} = g_i - F_i(q_1, \dots, q_n).$$

**Démonstration**. Pour tous i,  $\hat{\mathcal{A}} \in \ker(\operatorname{ad}_{q_i})$  donc  $\operatorname{ad}_{q_i}$  se quotiente en un endomorphisme de  $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$  (on désigne ainsi le quotient gradué  $\oplus \mathcal{P}_k/\hat{\mathcal{A}}_k$ ). Plaçonsnous pour toute cette démonstration dans  $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$ ; la proposition s'énonce alors ainsi :

$$\exists f, \quad \forall i, \quad \mathrm{ad}_{q_i} f = g_i. \tag{2.9}$$

Nous allons montrer que le système (2.9) peut se réduire à une seule équation, à savoir

$$\operatorname{ad}_q f = g$$
, où  $q = \sum \lambda_i q_i$  et  $g = \sum \lambda_i g_i$ ,

où les  $\lambda_i$  sont fixés indépendants sur  $\mathbb{Z}$ .

 $\mathrm{ad}_q$  étant diagonalisable, de valeurs propres  $\sum \lambda_i(\beta_i - \alpha_i)$  (associées aux vecteurs propres  $x^{\alpha}\xi^{\beta}$ ), elle est inversible dans  $\mathrm{End}(\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}})$  ( $= \oplus \mathrm{End}(\mathcal{P}_k/\hat{\mathcal{A}}_k)$ ) et f est donc uniquement déterminée (dans  $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$ ).

Montrons que  $f = (ad_q)^{-1}g$  convient:

$$\operatorname{ad}_{q_i} f = \operatorname{ad}_{q_i} (\operatorname{ad}_q)^{-1} g = (\operatorname{ad}_q)^{-1} \operatorname{ad}_{q_i} g$$

car ad<sub>qi</sub> et ad<sub>q</sub> commutent (car  $\{q_i,q\} = 0$ ). Or l'hypothèse  $\{g_i,q_j\} = \{g_j,q_i\}$ entraîne

$$\operatorname{ad}_{q_i} g = \operatorname{ad}_q g_i$$

donc  $\operatorname{ad}_{q_i} f = g_i$  et la proposition est démontrée.

**Remarque 2.2.9.** Il existe un relèvement canonique de  $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$  dans  $\mathcal{P}$ , ce qui nous assure que, si les coefficients de g dépendent régulièrement d'un paramètre, on peut trouver f et  $F_i$  ayant la même propriété.

### 2.2.4.2 Preuve du théorème 2.2.12

En appliquant la proposition précédente aux jets formels d'ordre infini  $\hat{g}_i$  de  $g_i$  (qui vérifient toujours  $\{\hat{g}_i, q_j\} = \{\hat{g}_j, q_i\}$ ), et en prenant des représentants  $C^{\infty}$  des fonctions  $\hat{f}$  et  $F_i$  obtenues, on obtient que la fonction

$$\{\hat{f}, q_i\} - (\hat{g}_i - F_i(q_1, \dots, q_n))$$

est plate en 0. Posons  $f = \hat{f} + h$ ; on est ainsi ramené à chercher une fonction h telle que  $\{h,q_i\} = \tilde{g}_i$ , où  $\tilde{g}_i = g_i - F_i - \{\hat{f},q_i\}$  est plate en 0. Remarquons que  $\tilde{g}_i$  vérifie toujours l'hypothèse 2.5.

Il suffit donc de montrer:

**Proposition 2.2.14** Dans tout voisinage de 0, il existe un voisinage  $\Omega$  de 0 tel que, si  $g_i$  sont des fonctions  $C^{\infty}$  plates en 0, vérifiant, sur  $\Omega$ ,

$$\{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\},\$$

alors il existe une fonction  $f \ sur \ \Omega$  (plate en 0) telle que

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \{f, q_i\} = g_i$$

**Démonstration.** Il serait tentant d'utiliser les méthodes de l'article [48]. Malheureusement, cela nécessiterait de pouvoir supposer que les  $g_i$  soient à support compact, ce qui ne paraît pas compatible avec (2.5). Toujours est-il qu'en dimension 1, l'hypothèse (2.5) est vide, et la méthode marche très bien (cf. [48, theo 4]).

Nous allons donc nous rabattre sur les techniques d'intégration standard, expliquées en dimension 1 dans les travaux [30] et [42]. On montrera ici comment elles permettent de traiter le cas complètement intégrable.

On désigne toujours par  $U_i(t)$  les flots des  $q_i$ . Notons  $T_i(z)$  le temps que met z sous l'action de  $U_i$  à placer la coordonnée  $z_i$  sur l'unique hyperplan diagonal ou antidiagonal  $x_i = \pm \xi_i$  qui rencontre le flot partant de z. C'est une fonction bien définie et  $C^{\infty}$  en dehors des hyperplans de coordonnées. On montre dans les références sus-citées que, pour toute fonction g plate en 0, l'intégrale:

$$\int_0^{T_i(z)} g(U_i(s)z) ds$$

définit une fonction  $C^{\infty}$  sur un voisinage de 0. Notons  $\Delta_i(z)$  la projection de z sur le *i*ème hyperplan (anti)diagonal le long du flot de  $q_i$ , c'est-à-dire  $\Delta_i(z) = U_i(T_i(z))z$  (voir figure 2.1). Il est essentiel de remarquer ici que tout voisinage de 0 contient un sous-voisinage stable par  $\Delta_i$ ; on choisit pour  $\Omega$  un tel voisinage stable.

**Lemme 2.2.15** Soit g une fonction plate en 0 et, pour  $z \in \Omega$ , soit  $f_i(z) = \int_0^{T_i(z)} g(U_i(s)z) ds$ . Alors:

$$\{f_i, q_i\} = g,$$

et, pour  $j \neq i$ , si h est une fonction vérifiant  $\{g,q_i\} = \{h,q_i\}$  sur  $\Omega$ , alors :

$$\{f_i, q_j\} = h - \Delta_i^* h.$$



Démonstration. C'est un simple calcul, reposant sur :

$$\{f_i, q_j\} = -\frac{d}{dt} \int_{t=0}^{t} f_i(U_j(t)) dt$$

Pour i = j, on utilise que  $T_i(U_i(t)z) = T_i(z) - t$ , tandis que pour  $j \neq i$ , c'est l'invariance de  $T_i$  par  $U_j$ , jointe à l'hypothèse de commutation, qui donne le résultat. Cette hypothèse est utilisée sous la forme:

$$\frac{d}{dt}g(U_j(t)U_i(s)z) = \{q_j,g\}U_j(t)U_i(s)z =$$
$$= \{q_i,h\}U_i(s)U_j(t)z = \frac{d}{ds}h(U_i(s)U_j(t)z).$$

Revenons à la preuve de la proposition. En appliquant le lemme avec i = j = 1, on résout la première équation:  $\{f_i, q_i\} = g_1$ . On cherche alors une solution du système de la forme  $f_1 + f_2$ , ce qui mène aux équations :

$$\{f_2, q_1\} = 0$$
, et  $\forall j > 1$ ,  $\{f_2, q_j\} = \tilde{g_j}$ 

où  $\tilde{g}_j = g_j - \{f_1, q_j\}$ . Le membre de droite vaut  $\Delta_1^* g_j$ , d'après le lemme. Les fonctions  $\Delta_1^* g_j$  et  $T_j$  sont invariantes par le flot de  $q_1$ , donc une nouvelle application du lemme avec  $g = \Delta_1^* g_2$  résout la deuxième équation tout en laissant la première intacte. On peut ainsi recommencer... jusqu'à épuisement du système. Le lemme assurera que les dérivées croisées sont les bonnes.

On peut même s'offrir une formule explicite, dont on vérifie la validité grâce au lemme :

$$f = \int_0^{T_1(z)} g_1(U_1(s)z)ds + \int_0^{T_2(z)} \Delta_1^* g_2(U_2(s)z)ds + \int_0^{T_3(z)} \Delta_2^* \Delta_1^* g_3(U_3(s)z)ds + \cdots$$

## 2.3 Systèmes intégrables quantiques

### 2.3.1 Introduction

D'un point de vue purement quantique, pour lequel un opérateur est considéré comme un hamiltonien linéaire sur un espace symplectique de dimension infinie, la notion d'intégrabilité ne présente guère d'intérêt. Pour voir cela, prenons  $(E,h\omega)$  un espace vectoriel symplectique (de dimension finie, au moins dans un premier temps). La matrice symplectique standard J, vérifiant  $J^2 = -I$ , munit E d'une structure complexe. D'autre part E est muni d'un produit scalaire euclidien par  $(x,y) = \omega(Jx,y)$ , qui n'est autre que le produit euclidien usuel. On obtient ainsi une structure hermitienne sur E grâce au produit hermitien  $\langle x,y \rangle = (x,y) + ih\omega(x,y)$ . Réciproquement, tout espace de Hilbert  $\mathbb{C}^n$  est muni de la forme symplectique égale à la partie imaginaire de la forme hermitienne.

On vérifie alors facilement qu'un endomorphisme de E est *hermitien* si et seulement s'il commute avec J et est symétrique (pour le produit scalaire euclidien). Ou plutôt, voyant Herm(E,J) comme  $J\mathfrak{u}(n)$ , on a:

$$\operatorname{Herm}(E,J) = J(\mathfrak{sp}(E) \cap \mathfrak{o}(E)).$$

On veut maintenant résoudre l'équation de Schrödinger associée à B, à savoir :

$$\frac{h}{i}\frac{d}{dt}\psi = B\psi,$$

où on a noté *i* pour *J*. Si  $H(\psi) = (B\psi, \psi)$  est la forme quadratique associée à *B*, on vérifie immédiatement que l'hamiltonien de *H* est  $\mathcal{X}_H(\psi) = \frac{i}{h}B(\psi)$ . L'équation de Schrödinger n'est donc autre que l'équation du flot de  $\mathcal{X}_H$ :

$$\frac{d}{dt}\psi = \mathcal{X}_H(\psi).$$

Or un hamiltonien hermitien est évidemment complètement intégrable, puisqu'en le diagonalisant en base hermitienne, on obtient une base symplectique (et orthonormée) dans laquelle

$$B = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

B s'écrit donc  $\sum \lambda_i (x_i^2 + \xi_i^2)$  et les  $x_i^2 + \xi_i^2$  sont des intégrales en involution.

On peut remarquer ici que le crochet de Poisson de deux hamiltoniens hermitiens s'écrit

$$\{B_1, B_2\} = \frac{i}{h}[B_1, B_2],$$

où [,] est le crochet usuel des endomorphismes.

Supposons maintenant que  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert quelconque sur lequel on se donne un opérateur B symétrique non borné. On suppose aussi qu'il existe une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$  formée de fonctions propres  $\psi_n$  associées aux valeurs propres  $\lambda_n$ . L'équation de Schrödinger peut alors être vue comme un système hamiltonien de dimension infinie, dont l'hamiltonien est la fonctionnelle  $H(\psi) = \langle B\psi,\psi\rangle = \sum \lambda_n |z_n|^2$ ,  $(z_n = x_n + i\xi_n \text{ est la coordonnées de }\psi \text{ sur }\psi_n)$  pour la structure symplectique  $h \Im \langle \psi, \psi' \rangle = h \sum d\xi_n \wedge dx_n(z_n, z'_n)$ . Il est donc automatiquement « complètement intégrable », au sens où il admet les  $x_n^2 + \xi_n^2$  comme famille complète d'intégrales premières.

Ceci dit, on n'est guère plus avancé... C'est pourquoi il est standard d'introduire une autre notion de complète intégrabilité quantique, qu'on pourra aussi appeler la complète intégrabilité semi-classique, puisqu'elle va coïncider avec la notion classique dans la limite semi-classique.

## 2.3.2 Quantification semi-classique

On note  $\mathcal{E}$  l'espace des *h*-opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sur un ouvert *W* d'une variété *X* de dimension *n*. Rappelons qu'un opérateur pseudo-différentiel P(h) est dit *classique* si son symbole de Weyl p(h) admet un développement asymptotique de la forme :

$$p(h)(x,\xi) \sim \sum h^k p_k(x,\xi)$$

(le développement est alors unique). Les résultats présentés ici seront microlocaux au voisinage d'un point ou d'une sous-variété lagrangienne compacte; en particulier, peu importent les hypothèses que l'on peut faire sur le comportement à l'infini des symboles (cf. [24], [75]). Rappelons aussi que deux opérateurs pseudo-différentiels sont dits microlocalement égaux (ou égaux modulo  $O(h^{\infty})$ ) au voisinage d'un point  $m \in T^*X$  si les développement asymptotique de leurs symboles de Weyl coïncident sur ce voisinage.

 $\mathcal{E}$  est, comme en dimension finie, muni d'une structure d'algèbre de Lie :

$$\{P,Q\} = \frac{i}{h}[P,Q].$$

L'opération  $\sigma$  (symbole principal) est un morphisme surjectif de  $(\mathcal{E}, \{\})$  sur l'algèbre des observables classiques  $(C^{\infty}(T^*W), \{\})$ .

**Définition 2.3.1** Suivant les articles [23], [17], on appelle système semi-classique complètement intégrable la donnée de n opérateurs  $P_1, \ldots, P_n$  de  $\mathcal{E}$  tels que :

- les symboles principaux  $p_i = \sigma(P_i)$  sont des fonctions à valeurs réelles formant un système complètement intégrable classique;

$$- \forall i,j, \ [P_i,P_j] = O(h^{\infty}).$$

Cette notion est bien adaptée à ce qu'il semble naturel d'appeler une « quantification semi-classique » d'un système classique complètement intégrable.

Par exemple, le problème de Neumann présenté en section 2.2.2 est semiclassiquement intégrable; il est même quantiquement intégrable, au sens où il existe des opérateurs différentiels sur  $S^n$  qui quantifient les hamiltoniens classiques en commutant exactement ([50]). Cette définition soulève naturellement la question suivante :

Lorsqu'un système complètement intégrable classique associé à un système complètement intégrable semi-classique est réductible à une forme normale (par exemple, s'il satisfait aux hypothèses du théorème 2.2.8; c'est aussi vrai dès que l'application moment  $J = (p_1, \ldots, p_n)$  est une submersion locale), existe-t'il aussi une forme normale pour le système semi-classique?

La réponse à cette question est connue, et positive, au voisinage de points réguliers des feuilles lagrangiennes du système. Elle est principalement due à Colin de Verdière [23] et A.-M. Charbonnel [17] (même si, rigoureusement, ces auteurs ne traitent que le cas où les opérateurs sont formellement auto-adjoints).

Nous verrons dans la section suivante que cela reste le cas en présence d'une singularité non-dégénérée : tous les résultats énoncés en section 2.2 auront leur analogue semi-classique.

### 2.3.3 Formes normales microlocales

Soit  $(P_1(h), \ldots, P_n(h))$  un système semi-classique complètement intégrable, défini sur un ouvert W d'une variété X de dimension n. Rappelons que les  $P_i$  ne sont pas nécessairement formellement auto-adjoints, mais que le symbole principal est supposé réel.

On note  $p_j$  les symboles principaux; ils définissent un système complètement intégrable classique de  $T^*W$ . On suppose ici que ce système admet un point critique non-dégénéré  $m \in T^*W$ , et on note  $\mathfrak{c}_q$  la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{sp}(2n)$  associée. On suppose toujours que  $p_j(m) = 0$ .

Soit  $(q_1, \ldots, q_n)$  une base standard de  $\mathfrak{c}_q$ . On note  $Q_j$  les *h*-quantifiés symétriques (ou de Weyl) des  $q_j$ , c'est-à-dire:

$$- \operatorname{si} q_j = x_j^2 + \xi_j^2, \quad Q_j = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2;$$
  
$$- \operatorname{si} q_j = x_j \xi_j, \quad Q_j = \frac{h}{i} (x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2});$$

- et pour le cas focus-focus, on a respectivement  $Q_j = \frac{h}{i} (x_j \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_j})$ et  $Q_{j+1} = \frac{h}{i} (1 + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}})$  (ce qui donne en coordonnées polaires  $\begin{cases} x_j = \rho \cos(\theta) \\ x_{j+1} = \rho \sin(\theta) \end{cases}$ , les opérateurs respectifs  $\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}$  et  $\frac{h}{i} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 1)$ ).

Outre la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{c}_q$ , l'ingrédient principal de la section 2.2 était une sous-algèbre de Poisson de  $C^{\infty}(T^*W)$ , le commutant classique  $C_q$ . On définit de la même façon le *commutant semi-classique*  $\mathcal{C}_Q$  comme étant la sous-algèbre de  $\mathcal{E}$  donnée par :

$$\mathcal{C}_Q = \{ P(h) \in \mathcal{E}, \forall j, [P,Q_j] = O(h^\infty) \}.$$

La version semi-classique du théorème d'Eliasson est alors la suivante :

**Théorème 2.3.1** Soit  $(P_1, \ldots, P_n)$  un système semi-classique complètement intégrable, avec une singularité non dégénérée de type quelconque, et  $Q_1, \ldots, Q_n$  les opérateurs différentiels correspondants. Alors il existe un opérateur intégral de Fourier elliptique (et unitaire si les  $P_j$  sont formellement auto-adjoints) U(h), et des opérateurs pseudo-différentiels  $F_j(h)$  dans  $C_Q$ , tels que, microlocalement au voisinage de m.

$$\forall j, \quad U^{-1}P_{j}U = F_{j} + O(h^{\infty}).$$

Avant de donner la preuve de ce théorème, notre première tâche est donc de décrire la structure de  $C_Q$ .

### 2.3.4 Le commutant semi-classique

F

 $\mathcal{C}_Q$  est directement relié au commutant classique  $C_q$  par le résultat suivant :

**Proposition 2.3.2**  $C_Q$  est une algèbre de Lie commutative. L'application  $\sigma_W$  (symbole de Weyl) est, modulo  $O(h^{\infty})$ , un isomorphisme de  $C_Q$  dans l'algèbre de Lie formelle :

$$C_q(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^k C_q.$$

**Démonstration.** La formule de Moyal (cf. [44]) exprime la relation entre la quantification de Weyl et le crochet de commutation : si A et B sont les quantifiés de Weyl des symboles a et b, on a, formellement :

$$\sigma_{Weyl}([A,B]) = \frac{2}{i}a\sin(\frac{h\mathcal{D}}{2})b,$$

avec

$$\mathcal{D} = \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \xi}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial \xi}} \right).$$

On l'utilise en général pour la formule suivante :

$$\sigma_{Weyl}([A,B]) = \frac{h}{i} \left( \{a,b\} + O(h^2) \right).$$

Commençons par montrer la commutativité de  $C_Q$ . Sur chaque ouvert  $E_{\epsilon}$ (voir proposition 2.2.6), les symboles principaux des  $Q_j$  sont indépendants. D'après le théorème de forme normale standard associé à une carte de Darboux-Carathéodory  $(x,\xi)$  (voir par exemple l'article [23]), les  $Q_j$  sont conjugués aux opérateurs  $\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ . En appliquant la formule de Moyal, on obtient que tout opérateur pseudo-différentiel qui commute avec les  $\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} = Op^W(\xi_j)$  a un symbole de Weyl dont le développement asymptotique est indépendant de x. Par une nouvelle application de cette formule on voit que deux tels opérateurs commutent à l'ordre  $O(h^{\infty})$ .

Finalement, si P(h) et Q(h) sont dans  $C_Q$ , le crochet [P,Q] est un opérateur pseudo-différentiel classique dont le symbole de Weyl a un développement asymptotique nul sur les ouverts  $E_{\epsilon}$ . Par continuité des termes de ce développement asymptotique, ils sont nuls partout. Donc  $[P,Q] = O(h^{\infty})$ . Venons-en maintenant au deuxième point de la proposition. Appliquant la formule de Moyal dans les coordonnées initiales, le fait que  $q_j$  soit quadratique implique que pour tous  $k \ge 3$  et pour toutes fonctions f,

$$f\mathcal{D}^k q_j = 0.$$

On dispose donc d'une règle de quantification « exacte », au sens où :

$$\sigma_{Weyl}([Op^W(f),Q_j]) = \frac{h}{i} \left( \{f,q_j\} + O(h^\infty) \right),$$

On en déduit qu'un opérateur P(h) est dans  $C_Q$  si et seulement si le développement asymptotique de son symbole de Weyl  $p(h) \sim \sum p_k h^k$  vérifie

$$\sum h^k \{p_k, q_j\} = O(h^\infty),$$

ce qui est équivalent, par unicité du développement asymptotique, à :

$$\forall k, j, \quad \{p_k, q_j\} = 0,$$

c'est-à-dire  $\forall k, p_k \in C_q$ .

Lorsque la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{c}_q$  ne contient pas d'élément hyperbolique  $(m_h = 0)$ , on sait que la structure de  $C_q$  est particulièrement simple : c'est l'ensemble des fonctions  $f(q_1, \ldots, q_n)$ . On a un résultat analogue pour le commutant semi-classique.

Notons tout d'abord que puisque les opérateurs  $Q_j$  sont formellement autoadjoints, on peut utiliser un calcul fonctionnel à plusieurs variables comme celui développé par Charbonnel [17]. On peut ainsi donner un sens microlocal à  $f(Q_1, \ldots, Q_n)$  pour toute fonction  $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  et par là, à  $f(h)(Q_1, \ldots, Q_n)$ , où  $f(h) \sim f_0 + hf_1 + \ldots$  est un symbole semi-classique admettant un développement en puissance de  $h: f(h)(Q_1, \ldots, Q_n)$  commute alors avec les  $Q_j$  et admet  $f_0(q_1, \ldots, q_n)$  comme symbole principal.

Il faut remarquer que microlocalement sur un domaine  $\Omega$  voisinage de m, les hypothèses à l'infini pour le calcul fonctionnel sont inutiles. Ainsi, seule la symétrie des opérateurs est importante. En effet, quitte à tronquer les symboles en dehors de  $\Omega$ , on peut supposer que les opérateurs h-quantifiés sont semi-bornés inférieurement. On dispose alors par exemple de l'extension de Friedrichs qui est auto-adjointe. Enfin, deux extensions d'un même opérateur, dont les domaines contiennent  $C_0^{\infty}(\Omega)$ , auront le même symbole de Weyl sur  $\Omega$ . En particulier, le choix d'une extension auto-adjointe est sans incidence sur le calcul fonctionnel, au niveau microlocal.

On peut maintenant énoncer la proposition suivante :

**Proposition 2.3.3** Si  $m_h = 0$ , alors tout élément de  $C_Q$  s'écrit, microlocalement au voisinage de 0, sous la forme  $f(h)(Q_1, \ldots, Q_n) + O(h^{\infty})$ .

**Démonstration.** Soit  $P(h) \in C_Q$ . D'après la proposition 2.3.2, son symbole principal appartient à  $C_q$ , et donc s'écrit  $f^{(0)}(q_1, \ldots, q_n)$ . Posons, microlocalement au voisinage de 0,

$$P^{(0)} = f^{(0)}(Q_1, \dots, Q_n).$$

P et  $P^{(0)}$  ayant même symbole principal, on a :

$$P = P^{(0)} + hR^{(1)},$$

où, nécessairement,  $R^{(1)} \in C_Q$ . En recommençant la même décomposition pour  $R^{(1)}$ , et ainsi de suite, on obtient par récurrence l'existence de fonctions  $f^{(N)} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  telles que :

$$\forall N, P(h) = (\sum_{k=0}^{N} h^k f^{(k)})(Q_1, \dots, Q_n) + O(h^{N+1}),$$

ce qui prouve la proposition.

### 2.3.5 Preuve du théorème 2.3.1

Plutôt que de montrer directement le théorème 2.3.1, nous allons énoncer et prouver une formulation légèrement différente qui se rapproche du corollaire 2.2.9, et qui est plus utile pour les applications lorsque  $m_h \neq 0$ . Dans le cas  $m_h = 0$ , la forme la plus utile est bien sûr celle du théorème 2.3.1 associé à la proposition 2.3.3.

**Théorème 2.3.4** Soit  $(P_1, \ldots, P_n)$  un système semi-classique complètement intégrable, avec une singularité non dégénérée de type quelconque, et  $Q_1, \ldots, Q_n$  les opérateurs différentiels correspondants. Alors il existe un opérateur intégral de Fourier elliptique (et unitaire si les  $P_j$  sont formellement auto-adjoints) U(h), une matrice de taille  $n \times n$  microlocalement inversible  $\mathcal{M}(h)$  d'opérateurs pseudodifférentiels appartenant à  $\mathcal{C}_Q$ , et des constantes  $\alpha_j^{(\ell)} \in \mathbb{C}$   $(j = 0, \ldots, n \text{ et } \ell \in \mathbb{N}^*)$ telles que, microlocalement au voisinage de m,

$$U^{-1}(P_1,\ldots,P_n)U = \mathcal{M}.(Q_1 - \alpha_1(h),\ldots,Q_n - \alpha_n(h)) + O(h^\infty).$$

On a noté  $\alpha_j(h) = \sum_{\ell \ge 1} \alpha_j^{(\ell)} h^{\ell}$ .

Les  $\alpha_j^{(1)}$  se décrivent à l'aide des valeurs en m des symboles sous-principaux  $r_j$  des  $P_j$  par:

$$\alpha^{(1)} = -M^{-1}(0).r(m).$$

où M est la matrice de fonctions donnée par le corollaire 2.2.9.

**Démonstration.** On commence par appliquer le corollaire 2.2.9. En choisissant un opérateur intégral de Fourier microlocalement unitaire U associé au symplectomorphisme  $\varphi$ , et en conjuguant les  $P_j$  par U, on se ramène au cas où les symboles principaux  $p_j$  vérifient, dans un voisinage de 0,

$$(p_1,\ldots,p_n)=M.(q_1,\ldots,q_n).$$

M étant une matrice de fonctions commutant avec les  $q_k$ , une application de la proposition 2.3.2 nous fournit une matrice  $\mathcal{M}^{(0)}$  d'opérateurs pseudodifférentiels éléments de  $\mathcal{C}_Q$ , de symbole principal M. En conséquence, il existe des opérateurs  $R_i^{(1)} \in \mathcal{E}$  tels que :

$$(P_1,\ldots,P_n) = \mathcal{M}^{(0)}.(Q_1,\ldots,Q_n) + h(R_1^{(1)},\ldots,R_n^{(1)}).$$

Notons  $(M_1, \ldots, M_n) = \mathcal{M}^{(0)}.(Q_1, \ldots, Q_n)$ . Les  $M_j$  sont des éléments de  $\mathcal{C}_Q$ , de symboles principaux  $(p_1, \ldots, p_n)$ . L'hypothèse de commutation des  $P_j$  s'écrit :

$$[M_j, M_k] + h ([M_j, R_k] + [R_j, M_k]) + h^2 [R_j, R_k] = 0.$$

Puisque  $C_Q$  est abélien (proposition 2.3.2), on obtient, en prenant les symboles principaux de cette égalité :

$$\forall j,k, \{p_j,r_k\} = \{p_k,r_j\}.$$

La preuve du théorème se poursuit alors en deux étapes : la première traitant spécifiquement du niveau *sous-principal*, et la deuxième traitant, par un même schéma, tous les niveaux suivants.

• La première étape consiste à chercher une matrice  $\mathcal{M}^{(1)}$  d'éléments de  $\mathcal{C}_Q$ , des constantes  $\alpha_j^{(1)} \in \mathbb{C}$ , et un opérateur pseudo-différentiel elliptique  $V \in \mathcal{E}$ tels que :

$$V^{-1}(P_1,\ldots,P_n)V = (\mathcal{M}^{(0)} + h\mathcal{M}^{(1)}).(Q_1 - h\alpha_1^{(1)},\ldots,Q_n - h\alpha_n^{(1)}) + O(h^2).$$

Ce système se réécrit en :

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} Q_k, V\right] = h\left(V \sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(1)} Q_k - V \sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(1)} - R_j V\right) + O(h^2),$$

qui est équivalent, en prenant les symboles principaux des deux membres, au système d'équations de transport suivant :

$$\forall j, \{p_j, v\} = iv \left( \sum_{k=1}^n m_{jk}^{(1)} q_k - \sum_{k=1}^n m_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(1)} - r_j \right).$$

Posons  $v = e^{id}$ ; on a  $\{f, v\} = iv\{f, d\}$ ; il suffit donc de résoudre :

$$\forall j, \{p_j, d\} = \left(\sum_{k=1}^n m_{jk}^{(1)} q_k - \sum_{k=1}^n m_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(1)} - r_j\right).$$

Le corollaire 2.2.11 fournit une telle fonction d définie sur un voisinage  $\Omega$  de 0 et des éléments  $F_j$  de  $C_q$  tels que

$$\forall j, \quad \{p_j, d\} = F_j - r_j.$$

La matrice  $(m_{jk}^{(0)}) = M$  étant inversible, le n-uplet  $M^{-1}.(F_1, \ldots, F_n)$  est le plus général des n-uplets de  $C_q^n$ , donc, d'après le lemme 2.2.7, il s'écrit

$$-(\alpha_1^{(1)},\ldots,\alpha_n^{(1)})+\tilde{M}.(q_1,\ldots,q_n),$$

où  $\tilde{M}$  est une matrice d'éléments de  $C_q$ , et les  $\alpha_j^{(1)}$  sont nécessairement donnés par :

$$\forall j, \quad -\sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(0)}(0) \alpha_k^{(1)} = F_j(0) = r_j(0).$$

Le système est donc résolu, avec  $(m_{jk}^{(1)}) = M.\tilde{M}.$ 

En quantifiant les  $m_{jk}^{(1)}$  par la proposition 2.3.2, on obtient une matrice  $\mathcal{M}^{(1)}$ d'opérateurs pseudo-différentiels de  $\mathcal{C}_Q$  qui résout le problème modulo  $O(h^2)$ .

Notons que si les  $P_j$  sont formellement auto-adjoints, alors d est réel, et V peut être quantifié en un opérateur microlocalement unitaire.

• La deuxième étape termine la preuve par récurrence : supposons que les  $P_j$  vérifient

$$(P_1, \dots, P_n) = \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} h^{\ell} \mathcal{M}^{(\ell)}\right) . (Q_1 - \alpha_1(h), \dots, Q_n - \alpha_n(h)) + h^N(R_1^{(N)}, \dots, R_n^{(N)}),$$

où  $\alpha_j(h) = \sum_{\ell=1}^{N-1} h^\ell \alpha_j^{(\ell)}$ , et les  $\mathcal{M}^{(\ell)}$  sont des matrices  $n \times n$  d'éléments de  $\mathcal{C}_Q$ . Comme tous ces éléments commutent entre eux, l'hypothèse de commutation des  $P_j$  s'écrit, à l'ordre principal N:

$$h^{N}\left([M_{j}, R_{k}^{(N)}] + [R_{j}^{(N)}, M_{k}]\right) = O(h^{\infty}),$$

ce qui donne:

$$\{p_j, r_k^{(N)}\} = \{p_k, r_j^{(N)}\}.$$

Alors il existe un opérateur pseudo-différentiel  $C \in \mathcal{E}$ , une matrice  $\mathcal{M}^{(N)}$  d'éléments de  $\mathcal{C}_Q$ , et des constantes  $\alpha_j^{(N)} \in \mathbb{C}$  telles que :

$$\forall j, \quad (I+h^{N-1}iC)^{-1}(P_1,\dots,P_n)(I+h^{N-1}iC) = \left(\sum_{\ell=0}^N h^\ell \mathcal{M}^{(\ell)}\right).(Q_1 - \tilde{\alpha}_1(h),\dots,Q_n - \tilde{\alpha}_n(h)) + O(h^{N+1}), \quad (2.10)$$

avec  $\tilde{\alpha}_j(h) = \alpha_j(h) + h^N \alpha_j^{(N)}$ . En effet, pour  $N \ge 2$ , ce système se réécrit modulo des termes d'ordre  $O(h^{N+1})$  en :

$$h^{N-1}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} Q_{k}, iC\right] = h^{N}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(N)} Q_{k} - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} \alpha_{k}^{(N)} - R_{j}^{(N)}\right).$$

Il donne lieu, au niveau des symboles principaux, à des équations de transport que l'on résout comme précédemment.

Notons que si les  $P_j$  sont formellement auto-adjoints, le symbole c est réel. Au lieu de conjuguer par l'opérateur elliptique  $I + h^{N-1}iC$ , on utilise la transformée de Cayley  $W = \frac{I + ih^{N-1}C/2}{I - ih^{N-1}C/2}$ . L'opérateur W est unitaire, et comme  $W = I + ih^{N-1}C + O(h^N)$ , il convient tout aussi bien pour la résolution de (2.10).

Ceci termine la démonstration du théorème 2.3.4.

Le théorème 2.3.1 en est bien sûr un corollaire immédiat.

### 2.3.6 Remarques finales

1. Le schéma de démonstration du théorème 2.3.4 est général, et fonctionne si l'on remplace l'algèbre  $C_Q$  par celle des fonctions des  $(Q_1, \ldots, Q_n)$ , à partir du moment où les théorèmes classiques le permettent. Ceci est légitime si la sousalgèbre de Cartan ne contient pas d'élément hyperbolique – on l'a d'ailleurs déjà remarqué; ça l'est aussi en dimension 1, en vertu du lemme de Morse isochore ([30]), et du lemme de Poincaré hyperbolique 2.2.12. Cette remarque permet de retrouver le théorème 12 de l'article [27].

2. On peut aussi utiliser ce schéma de démonstration pour avoir la forme normale des  $(P_1, \ldots, P_n)$  dans un voisinage invariant d'une feuille *régulière* du feuilletage lagrangien déterminé par l'application moment  $(p_1, \ldots, p_n)$ . En effet le théorème d'Arnold-Liouville fournit un tel voisinage invariant  $\Omega$  dans lequel on dispose de coordonnées actions-angles, c'est-à-dire que  $\Omega$  est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle de  $T^*\mathbb{T}^n$  de la forme  $\mathbb{T}^n \times \mathcal{D} \ni (x,\xi)$ . Utilisant un opérateur intégral de Fourier associé à ce symplectomorphisme, on est ramené au cas où les  $P_j$  agissent sur  $\mathbb{T}^n$  et ont des symboles principaux qui ne dépendent que de  $\xi$ .

Examinons maintenant les équations de transport : elles vont consister à résoudre des systèmes du type

$$\{\xi_j, a\} = r_j$$
, c'est-à-dire  $\frac{\partial a}{\partial x_j} = r_j$ .

Or les  $r_j = r_j(x,\xi)$  vérifient la bonne condition de fermeture :

$$\{\xi_j, r_k\} = \{\xi_k, r_j\},\$$

qui n'est autre que  $d_x r = 0$ , ou r est vue comme la 1-forme  $r_1 dx_1 + \cdots + r_n dx_n$ . Cette condition assure qu'on peut toujours intégrer ces équations localement. Par contre, pour un résultat global sur les tores horizontaux, il faut [r] = 0 dans  $H^1(\mathbb{T}^n \times \{\xi\})$ . Autrement dit, on sait résoudre  $d_x a = r - [r]$ , ou encore :

$$\{\xi_j, a\} = r_j - [r]_j,$$

où  $[r_i]$  est la moyenne de  $r_i$  par rapport à  $x_i$ , et ne dépend que de  $\xi$ .

On retrouve ainsi le résultat mentionné en introduction sur les coordonnées actions-angles semi-classiques régulières :

**Théorème 2.3.5** ([23], [17]) Soit  $(P_1, \ldots, P_n)$  un système complètement intégrable semi-classique, et  $\Omega$  un ouvert invariant de coordonnées actions-angles régulières. Alors il existe un opérateur intégral de Fourier U(h) (unitaire si les  $P_i$  sont formellement auto-adjoints) et des symboles

$$f_j(h) = f_j^{(0)} + h f_j^{(1)} + h^2 f_j^{(2)} + \cdots$$

tels que, sur  $\Omega$ ,

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad U^{-1}P_jU = f_j(h)(D_1, \dots, D_n) + O(h^{\infty}).$$

Les  $D_j$  sont les opérateurs  $\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$  sur le tore  $\mathbb{T}^n$ .

3. Dans l'énoncé du théorème 2.3.4, la constante  $\alpha^{(1)}$  est définie de façon intrinsèque par les opérateurs  $P_j$ , c'est-à-dire indépendemment de l'OIF U choisi. Il semblerait raisonnable de penser qu'il en est de même de tous les termes de la série. Un argument en faveur de cette affirmation est que  $\alpha(h)$  peut être vue comme la monodromie des solutions du système pseudo-différentiel  $P_j u = 0$  (cf. [73], [83]). Dans le cas d'une singularité *focus-focus*, ce résultat est prouvé au chapitre 4 (voir la remarque 4.6.3).

## Chapitre 3

# Monodromie quantique

Ce chapitre expose en détail le lien entre la monodromie classique d'un système complètement intégrable et la forme du spectre conjoint de tout système semi-classique associé. La monodromie quantique est définie comme un invariant spectral purement quantique, avant d'être identifiée à la monodromie classique. On montre ensuite comment cet invariant se détecte « à la main » sur un dessin du spectre conjoint.

Le texte de ce chapitre est basé sur la prépublication [82].

## 3.1 Introduction

Obstructions to the existence of global action-angle coordinates for completely integrable systems are well known since Duistermaat's article [37]. It was then natural to raise the question about the impact of these obstructions on *quantum* integrable systems, at least for the (semi)-classical pseudo-differential quantisation on cotangent bundles. The first attempts in this direction were [32] and [49], both of them concerning the monodromy invariant for the example of the spherical pendulum. This system is indeed one of the simplest (along with the Champagne bottle [4]) that exhibit a non-trivial monodromy. The first of these articles [32] proposed a particularly interesting way of detecting the monodromy by observing a shift in the lattice structure of the joint spectrum. It is the purpose of this chapter to state, prove and explain this idea.

Surprisingly enough, this idea of quantum monodromy has been sleeping for ten years, before new interest resulted in its experimental discovery in the spectrum of excited water molecules [19], [20].

Back to mathematics, it turns out that, in the framework of semi-classical microlocal analysis (developed for integrable systems in [17]), there is a natural way of defining an invariant of the joint spectrum away from singularities of the principal symbols, that precisely describes the obstruction to the existence of a *global* lattice structure for the spectrum. The organisation of the chapter is as follows : we first extract the relevant properties of joint spectra, and define the *quantum monodromy* invariant for any set that shares these properties (section 3.2). Then we prove in section 3.3 that, for spectra, the quantum monodromy is precisely given by the classical monodromy of the underlying classical hamiltonian system. The result is applied in section 3.4 to the particularly interesting case of systems admitting a *focus-focus* singularity. The last section 3.5 finally shows how to read off the monodromy from a picture of the spectrum. As an example, we use the spectrum of the Champagne bottle computed by Child [19].

## **3.2** Construction of the quantum monodromy

Let  $\mathcal{U}$  be an open subset of  $\mathbb{R}^n$ , let H be a set of positive real numbers accumulating at 0, and for any h in H let  $\Sigma(h)$  be a discrete subset of  $\mathcal{U}$ .

If B is an open subset of  $\mathcal{U}$ , a family  $(f(h))_{h\in H}$  of smooth functions on B with values in  $\mathbb{R}^n$  is called a *symbol* (of order zero) if it admits an asymptotic expansion of the form

$$f(h) = f_0 + hf_1 + h^2f_2 + \cdots$$

for smooth functions  $f_i: B \to \mathbb{R}^n$ . More precisely we require that for any  $\ell \ge 0$ , for any  $N \ge 0$ , and for any compact  $K \subset B$ , there is a constant  $C_{\ell,N,K}$  such that for all  $h \in H$ ,

$$\left\| f(h) - \sum_{k=0}^{N} h^{k} f_{k} \right\|_{\ell} \leq C_{\ell,N,K} h^{N+1}.$$

where  $\|.\|_{\ell}$  denotes the  $C^{\ell}$  norm in K. The symbol f(h) is *elliptic* if its principal part  $f_0$  is a local diffeomorphism of B into  $\mathbb{R}^n$ . The value of f(h) at a point  $c \in B$  will be denoted by f(h; c).

We will say that  $\Sigma(h)$  has the structure of an "asymptotic affine lattice" whenever it can be described with a locally finite set of "asymptotic affine integral charts", in the following sense :

**Definition 3.2.1**  $(\Sigma(h), \mathcal{U})$  is an "asymptotic affine lattice" if for any  $c \in \mathcal{U}$ , there exists a small open ball  $B \subset \mathcal{U}$  around c, and an elliptic symbol f(h) :  $B \to \mathbb{R}^n$  of order zero such that, for any family  $\lambda(h) \in B$ :

- $\lambda(h) \in \Sigma(h) \cap B + O(h^{\infty}) \iff f(h;\lambda(h)) \in h\mathbb{Z}^n + O(h^{\infty})$
- if λ(h) and λ'(h) are in Σ(h) ∩ B, then λ'(h) − λ(h) = O(h<sup>∞</sup>) if and only if for small h, λ'(h) = λ(h).



FIG. 3.1 – An asymptotic affine lattice

Intuitively this means that zooming by a factor of  $\frac{1}{h}$  inside B makes  $\Sigma(h) \cap B$  converge to the standard lattice as h tends to zero. The issue here is to see what prevents  $\Sigma(h)$  from globally converging to a lattice. Of course, the reason for this definition is that, under suitable hypothesis, the joint spectrum of a set of n commuting h-pseudodifferential operators on an n-dimensional manifold is indeed an "affine asymptotic lattice" (see the next section).

For short, a symbol f(h) satisfying definition 3.2.1 will be referred to as an "affine chart" of  $\Sigma(h)$ .

The main point is that the transition functions associated to these charts are elements of the affine group  $GA(n, \mathbb{Z})$ .

**Proposition 3.2.1** Let f(h) and g(h) be two affine charts of  $\Sigma(h)$ , both defined on a ball B. Then there is a unique  $A \in GA(n, \mathbb{Z}) \subset GA(n, \mathbb{R})$  such that

$$\left(\frac{g(h)}{h}\right) \circ \left(\frac{f(h)}{h}\right)^{-1} = A_{\restriction f(h)(B)/h} + O(h^{\infty}).$$

Suppose now that  $\mathcal{U}$  is covered by a locally finite union of balls  $B_{\alpha}$  on each of which is defined an affine chart  $f_{\alpha}(h)$  of  $\Sigma(h)$ . Proposition 3.2.1 yields a family of affine linear maps  $A_{\alpha\beta}$  such that on non-empty intersections  $B_{\alpha} \cap B_{\beta}$ 

$$\frac{1}{h}f_{\alpha}(h) = A_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{h}f_{\beta}(h)\right).$$

This in turn defines a 1-cocycle  $\mathcal{M}$  in the Čech cohomology of  $\mathcal{U}$  with values in the non-Abelian group  $GA(n,\mathbb{Z})$ .

**Definition 3.2.2** The class  $[\mathcal{M}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, GA(n, \mathbb{Z}))$  of the cocycle defined by  $A_{\alpha\beta}$  is called the quantum monodromy of  $(\Sigma(h), \mathcal{U})$ .

Let L be the projection

$$L: GA(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R});$$

if we identify  $GL(n, \mathbb{R})$  with the group of affine automorphisms leaving the origin  $0 \in \mathbb{R}^n$  fixed, we get a natural splitting

$$A_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + \tau(k_{\alpha\beta}),$$

where  $M_{\alpha\beta} = L(A_{\alpha\beta}) \in GL(n,\mathbb{Z})$  and  $\tau(k_{\alpha\beta})$  is translation by the vector  $k_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}^n$ .

The exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\tau} GA(n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{L} GL(n, \mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

gives rise to the following sequence of maps (which are not homomorphisms !)

$$\check{H}^{1}(\mathcal{U},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau_{*}} \check{H}^{1}(\mathcal{U},GA(n,\mathbb{Z})) \xrightarrow{L_{*}} \check{H}^{1}(\mathcal{U},GL(n,\mathbb{Z})) \longrightarrow 1$$

which is "exact" in the sense that  $L_*$  is surjective, and if  $L_*([\mathcal{M}]) = 1$ , then there is an integer cocycle  $[\omega] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$  such that  $[\mathcal{M}] = \tau_*([\omega])$ .

**Remark 3.2.1.** The lack of injectivity for  $\tau_*$  is measured by  $H^0(\mathcal{U}, GL(n, \mathbb{Z}))$ : two cocycles [k] and [k'] in  $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$  yield the same element of  $\check{H}^1(\mathcal{U}, GA(n, \mathbb{Z}))$ if and only if there is an  $M \in H^0(\mathcal{U}, GL(n, \mathbb{Z}))$  such that  $[k'] = [M \cdot k]$ .

Let us now give various interpretations of the 1-cocycle  $\mathcal{M}$ .

The action of  $GA(n,\mathbb{Z})$  on  $\mathbb{Z}^n$  being effective, it is a standard fact that the cohomology set  $\check{H}^1(\mathcal{U}, GA(n,\mathbb{Z}))$  classifies the isomorphism classes of fibre bundles over  $\mathcal{U}$  with structure group  $GA(n,\mathbb{Z})$  and fibre  $\mathbb{Z}^n$  (see for instance [56, p.40–41]). Let  $\mathcal{L}$  be such a lattice bundle associated to  $\mathcal{M}$ . The elements  $A_{\alpha\beta}$  just define the transition functions between two adjacent trivialisations of  $\mathcal{L}$ .

Since these trivialisation functions are locally constant, there is a naturally defined parallel transport  $\gamma . p$  of a point  $p \in \mathcal{L}_c$  along a path  $\gamma$  in the base  $\mathcal{U}$ .

This defines the holonomy of  $\mathcal{L}$ , as a map from  $\pi_1(\mathcal{U}, c)$  into  $GA(\mathcal{L}_c)$ . We will always identify the latter with  $GA(n, \mathbb{Z})$  by choosing an affine basis of  $\mathcal{L}_c$ .

The choice of such a basis is equivalent to that of a trivialisation f of  $\mathcal{L}$  above c that sends this basis to the canonical basis of  $\mathbb{Z}^n$ ; the holonomy  $\mu_f$  is then defined by :

$$f(\gamma.p) = \boldsymbol{\mu}_f(\gamma)f(p). \tag{3.1}$$

Finally, this is also equivalent to the choice of an affine chart f(h) of  $\Sigma(h)$  around c. If  $\mathcal{M}$  is any cocycle associated to this trivialisation, then

$$\boldsymbol{\mu}_f(\gamma) = A_{1,\ell} \circ \dots \circ A_{3,2} \circ A_{2,1}, \tag{3.2}$$

where  $A_{i,j}$  denotes the transition element corresponding to a pair of intersecting open balls  $(B_i, B_j)$ , and  $B_1, \ldots, B_\ell$  enumerate elements of a cover of  $\mathcal{U}$  encountered by  $\gamma(t)$  when t runs from 0 to 1.

We shall always assume that  $\mathcal{U}$  is connected, so that  $\mu_f$  does not depend on the base point c. Note that since  $(\gamma'\gamma).p = \gamma.(\gamma'.p)$ , we have

$$\boldsymbol{\mu}_f(\gamma'\gamma) = \boldsymbol{\mu}_f(\gamma)\boldsymbol{\mu}_f(\gamma').$$

It should be noticed that the bundles considered here have discrete fibres, so that we could reduce the discussion to the theory of coverings. The fibre bundle formulation seems however to be more natural when it comes to comparing them with objects arising in hamiltonian systems. Nevertheless, the covering approach will be used in section 3.5.

Other geometric interpretations of  $\mathcal{M}$  will also be discussed in section 3.5. For the moment just notice that the non-triviality of  $[\mathcal{M}]$  is equivalent to the non-triviality of the lattice bundle  $\mathcal{L}$  and to the fact that there is no globally defined symbol f(h) on  $\mathcal{U}$  sending  $\Sigma(h)$  to the straight lattice  $h\mathbb{Z}^n$ .

**Proof** (of proposition 3.2.1). There are no surprises in this quite elementary proof. Let  $c \in \mathcal{U}$ , and f(h), g(h) be two affine charts of  $\Sigma$  defined on a ball B around c. Because of definition 3.2.1, any open ball around c contains, for h small enough, at least one element of  $\Sigma(h)$ . Therefore, there exists a family  $\lambda(h) \in \Sigma(h) \cap B$  such that

$$\lim_{h \to 0} \lambda(h) = c.$$

Let  $k \in \mathbb{Z}^n$  and let  $\lambda'(h)$  be a family of elements of  $\Sigma(h) \cap B$  such that

$$f(h;\lambda(h)) = f(h;\lambda'(h)) + hk + O(h^{\infty}).$$

Then, as h tends to zero,  $\frac{\lambda'(h)-\lambda(h)}{h}$  tends towards a limit  $v \in \mathbb{R}^n$  satisfying

$$k = df_0(c)\iota$$

(recall that  $f_0$  denotes the principal part of f(h)).

Since  $\lambda(h)$  and  $\lambda'(h)$  are in  $\Sigma(h)$ , there is a family  $k'(h) \in \mathbb{Z}^n$  such that

$$\left(\frac{g(h;\lambda'(h)) - g(h;\lambda(h))}{h}\right) = k'(h) + O(h^{\infty}).$$

The left-hand side of the above equation has limit  $dg_0(c)v$  as  $h \to 0$ . Therefore k'(h) is equal to a constant integer k' for small h, and we have

$$k' = dg_0(c)(df_0(c))^{-1}k,$$

which implies that  $dg_0(c)(df_0(c))^{-1} \in GL(n,\mathbb{Z})$ . Since  $GL(n,\mathbb{Z})$  is discrete, there is a constant matrix  $M \in GL(n,\mathbb{Z})$  such that for all  $c \in B$ ,  $dg_0(c) = M \cdot (df_0(c))$ ; this in turn implies the existence of a constant  $k \in \mathbb{Z}^n$  such that, on B,

$$g_0 = M \cdot f_0 + k.$$

But k is necessarily zero : indeed, applying the above equality to  $\lambda(h)$  gives a sequence  $k'(h) \in \mathbb{Z}^n$  such that

$$hk'(h) \stackrel{\text{def}}{=} g(h; \lambda(h)) - M \cdot f(h; \lambda(h)) = k + O(h).$$

Therefore k'(h) must tend to zero, and hence must equal zero for small h, implying that k = 0.

We have proved the existence of a smooth symbol F(h) such that

$$M \cdot f(h) - g(h) = hF(h).$$

Because  $F(h; \lambda(h)) \in \mathbb{Z}^n + O(h^\infty)$  and  $\lim_{h\to 0} F(h; \lambda(h)) = F_0(c)$ , we must have  $F_0(c) \in \mathbb{Z}^n$ . So

$$F_0 = const \in \mathbb{Z}^n$$
 in  $B$ .

This easily implies that all lower order terms in F(h) must vanish on B, so we are left with

$$F(h) = k + O(h^{\infty})$$
, for a  $k \in \mathbb{Z}^n$ .

This gives  $g(h) = M \cdot f(h) - hk + O(h^{\infty})$ , which reads

$$\frac{1}{h}g(h) = A(\frac{1}{h}f(h)) + O(h^{\infty}),$$

with  $A \in GA(n, \mathbb{Z})$  defined by  $A(p) = M \cdot p - k, p \in \mathbb{Z}^n$ .

**Remark 3.2.2.** Because of the discreteness of  $GA(n,\mathbb{Z})$ , proposition 3.2.1 implies that there is an  $h_0 > 0$  such that the transition element A is uniquely defined by  $(g(h_0)/h_0)(f(h_0)/h_0)^{-1}$  acting on a finite subset of  $\mathbb{Z}^n$ . Therefore, when restricted to any open subset of  $\mathcal{U}$  with compact closure in  $\mathcal{U}$ , the cocycle  $[\mathcal{M}]$  is really a *quantum* object, in the sense that "you don't need to let h tend to zero" to define it.

## 3.3 Quantum = classical

Let  $P_1(h), \ldots, P_n(h)$  be a set of commuting self-adjoint *h*-pseudodifferential operators on an *n*-dimensional manifold X. They will be assumed to be classical

and of order zero, in the sense that in any coordinate chart their Weyl symbols  $p_i(h)$  have an asymptotic expansion of the form

$$p_j(h; x, \xi) = p_0^j(x, \xi) + h p_1^j(x, \xi) + h^2 p_2^j(x, \xi) + \cdots$$

Because the principal symbols  $p_0^1, \ldots, p_0^n$  commute with respect to the symplectic Poisson bracket on  $T^*X$ , the map

$$T^*X \ni (x,\xi) \xrightarrow{p} (p_0^1(x,\xi),\ldots,p_0^n(x,\xi)) \in \mathbb{R}^n$$

is a momentum map for the local hamiltonian action of  $\mathbb{R}^n$  on  $T^*X$  defined by the hamiltonian flows of the  $p_0^j$ . We will always assume that p is *proper*, so that the level sets

$$\Lambda_c = p^{-1}(c)$$

are compact. Moreover, we ask that these level sets be *connected*. Conclusions for non-connected  $\Lambda_c$  can be obtained by separately studying the different connected components.

Let  $U_r$  be the open subset of regular values of the momentum map p, and let  $\mathcal{U}$  be an open subset of  $U_r$  with compact closure.

It follows from the Arnold-Liouville theorem that  $p_{|\mathcal{U}|}$  is a smooth fibration whose fibres are lagrangian tori. The structure of this fibration is semi-globally (*i.e.* in a neighbourhood of a fibre) described with the help of action-angle coordinates. However, the flat fibre bundle  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \to c \in \mathcal{U}$  (with fibre  $\mathbb{Z}^n$ ) may have non-trivial monodromy, preventing the construction of global action variables on  $p^{-1}(\mathcal{U})$  (see Duistermaat [37]). We will denote by  $[\mathcal{M}_{cl}]$  (classical monodromy) the cocycle in  $\check{H}^1(\mathcal{U}, GL(n, \mathbb{Z}))$  associated to this lattice bundle.

On the other hand, let  $\Sigma(h)$  be the intersection with  $\mathcal{U}$  of the joint spectrum of the operators  $P_1(h), \ldots, P_n(h)$ . It is known from [17] that this spectrum is discrete and for small h is composed of simple eigenvalues. Moreover, the following result holds :

### **Proposition 3.3.1 ([17])** $\Sigma(h)$ is an asymptotic affine lattice on $\mathcal{U}$ .

We denote by  $[\mathcal{M}_{qu}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, GA(n, \mathbb{Z}))$  the quantum monodromy of the spectrum on  $\mathcal{U}$ , given by definition 3.2.2.

Let  $\iota$  be the inclusion of  $GL(n, \mathbb{R})$  into  $GA(n, \mathbb{R})$  such that for any  $M \in GL(n, \mathbb{R})$ ,  $\iota(M)$  leaves the origin  $0 \in \mathbb{R}^n$  invariant. This induces a map of the sets

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, GL(n,\mathbb{Z})) \xrightarrow{\iota_*} \check{H}^1(\mathcal{U}, GA(n,\mathbb{Z}))$$

such that  $L_*\iota_* = Id$ .

The title of this section is motivated by the following result :

**Theorem 3.3.2** The quantum monodromy is "dual" to the classical monodromy in the following sense :

$$[\mathcal{M}_{qu}] = \iota_*({}^t[\mathcal{M}_{cl}]^{-1}).$$

In other words, for any  $c \in \mathcal{U}$  there exists a choice of basis of  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$  and of an affine chart of  $\Sigma(h)$  such that the monodromy representations

$$\boldsymbol{\mu}^{cl}: \pi_1(\mathcal{U}, c) \to GL(n, \mathbb{Z})$$

and

$$\boldsymbol{\mu}^{qu}: \pi_1(\mathcal{U}, c) \to GA(n, \mathbb{Z})$$

defined by  $[\mathcal{M}_{cl}]$  and  $[\mathcal{M}_{qu}]$  satisfy :

$$\boldsymbol{\mu}^{qu} = \iota \circ ({}^{t}\boldsymbol{\mu}^{cl})^{-1}.$$

**Proof**. Let  $\alpha$  be the Liouville 1-form on  $T^*X$ . Let  $c_0 \in \mathcal{U}$  and for c near  $c_0$  let  $(\gamma_1(c), \ldots, \gamma_n(c))$  be a smooth family of loops on  $\Lambda_c$  whose homology classes form a basis of  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$ . It is known from [17], [23] (see also [83] for a viewpoint closer to this text) that one can find an affine chart f(h) for  $\Sigma(h)$  around c such that the principal part  $f_0$  is equal to the action integral associated to  $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ :

$$f_0(c) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1(c)} \alpha, \dots, \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n(c)} \alpha\right).$$

Because of proposition 3.2.1, any other affine chart around c having the same principal part must equal f(h) (modulo  $O(h^{\infty})$ ). In this way, the choice of a local smooth basis of  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$  determines an affine chart of  $\Sigma(h)$ . If  $(\gamma'_1(c), \ldots, \gamma'_n(c))$  is another basis of  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$  such that

$$(\gamma'(c)) = M(c) \cdot (\gamma(c)), \tag{3.3}$$

for a matrix  $M(c) \in GL(n, \mathbb{Z})$  depending smoothly on c, then the corresponding affine charts f(h) and f'(h) of  $\Sigma(h)$  satisfy :

$$f'(h;c) = M(c) \cdot f(h;c) + O(h^{\infty}).$$

Recall that the notation "M." here means matrix multiplication by M, which is of course the same as affine composition by  $\iota(M)$ .

But formula (3.3) says that if k and k' are trivialisation functions of the bundle  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \to c$  associated to the basis  $\gamma$  and  $\gamma'$ , then  $k' = {}^tM^{-1}k$ . Therefore, if  ${}^tM_{\alpha\beta}^{-1}$  are transition elements for the lattice bundle  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \to c$ , then  $\iota(M_{\alpha\beta})$  define a monodromy cocycle for  $\Sigma(h)$ .  $\Box$ 

**Remark 3.3.1.** The fact that the *affine* nature of quantum monodromy is here naturally reduced to an action of the *linear* group  $GL(n,\mathbb{Z})$  is due the the global existence of a primitive of the symplectic form on  $T^*X$ , namely the Liouville 1-form  $\alpha$ .

## 3.4 Monodromy of a *focus-focus* singularity

It is probably not worth discussing monodromy in arbitrary degrees of freedom, for it is a typical phenomenon of 4-dimensional symplectic manifolds (see [71]).

More precisely, let X be a 2-dimensional manifold, and let  $P_1(h)$ ,  $P_2(h)$  be two commuting self-adjoint *h*-pseudodifferential operators on X. As before, suppose that the momentum map  $p = (p_0^1, p_0^2)$  defined by the principal symbols is proper with connected level sets.

We suppose that p admit a critical point m of simple *focus-focus* type, which, we recall from chapter 2, means the following.  $m \in T^*X$  is a critical point of p of maximal corank (*i.e.* both  $p_0^1$  and  $p_0^2$  are critical at m) such that, in some local symplectic coordinates  $(x, y, \xi, \eta)$ , the Hessians  $(p_0^1)''(m)$  and  $(p_0^2)''(m)$ (thereafter denoted by  $\mathcal{H}(p_0^1)$  and  $\mathcal{H}(p_0^2)$ ) generate a 2-dimensional subalgebra of the algebra  $\mathcal{Q}(4)$  of quadratic forms in  $(x, y, \xi, \eta)$  under Poisson bracket that admits the following basis  $(q_1, q_2)$ :

$$q_1 = x\xi + y\eta,$$
$$q_2 = x\eta - y\xi.$$

Such a singularity m is called a *focus-focus* singularity. The point m is then isolated amongst critical points of p. Therefore, we can choose  $\mathcal{U} \subset U_r$  to be a small punctured disc around o = p(m). Finally, we shall always assume that mis the only critical point of the critical level set  $\Lambda_0 = p^{-1}(o)$ .

It is known (probably since [92]; see for instance [83] or [33] for discussions and more references on this topic) that the fibration  $p_{|\mathcal{U}|}$  has non-trivial monodromy, and can be described in the following way :

Near m, we know from [42] that the integrable hamiltonian system  $(p_0^1, p_0^2)$  can be brought into a normal form given by  $(q_1, q_2)$ . In other words there exists a local diffeomorphism  $F : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, o)$  such that

$$(p_0^1, p_0^2) = F(q_1, q_2).$$

This allows one to define transversal vector fields  $\mathcal{X}_1$  and  $\mathcal{X}_2$  tangent to the fibres  $\Lambda_c$  that are equal to the hamiltonian vector fields  $\mathcal{X}_{q_1}$  and  $\mathcal{X}_{q_2}$  near m. Note that  $\mathcal{X}_2$  is periodic of period  $2\pi$ .

Around each  $c \in \mathcal{U}$ , we can now define the following smooth basis  $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$  of  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\Lambda_c)$ :

- $\gamma_2(c)$  is a simple integral loop of  $\mathcal{X}_2$ .
- Take a point on  $\gamma_2(c)$ ; let it evolve under the flow of  $\mathcal{X}_1$ . After a finite time, it goes back on  $\gamma_2(c)$ . Close it up on  $\gamma_2(c)$ . This defines  $\gamma_1(c)$ .

**Proposition 3.4.1 ([92])** Let  $c \in U$ . With respect to the basis  $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$ , the action of the classical monodromy map  $\mu^{cl}$  on a simple loop  $\delta \in \pi_1(U, c)$ 



FIG. 3.2 – the basis  $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$ 

enclosing o is given by the matrix

$$\boldsymbol{\mu}^{cl}(\delta) = \left( egin{array}{cc} 1 & 0 \ \epsilon & 1 \end{array} 
ight).$$

Here  $\epsilon$  is the sign of det M, where  $M \in GL(2, \mathbb{R})$  is the unique matrix such that :

$$(\mathcal{H}(p_0^1), \mathcal{H}(p_0^2)) = M \cdot (\mathcal{H}(q_1), \mathcal{H}(q_2)).$$

Note also that M = dF(0).

This, together with theorem 3.3.2, proves the following result :

**Theorem 3.4.2** Let  $P_1(h)$ ,  $P_2(h)$  be a quantum integrable system with a focusfocus singularity. Then there exists a small punctured neighbourhood  $\mathcal{U}$  of the critical value o such that for any  $c \in \mathcal{U}$ , if f(h) is an affine chart of the joint spectrum  $\Sigma(h)$  around c having principal part

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1(c)}\alpha,\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2(c)}\alpha\right),$$

then the value of the quantum monodromy map  $\mu_f^{qu} \in GA(2,\mathbb{Z})$  at a simple loop  $\delta \in \pi_1(\mathcal{U}, c)$  enclosing o is given by the matrix

$$\boldsymbol{\mu}_{f}^{qu}(\delta) = \iota \left( \begin{array}{cc} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

Here  $\epsilon$  is the sign of det M, where  $M \in GL(2, \mathbb{R})$  is the unique matrix such that :

$$(\mathcal{H}(p_0^1), \mathcal{H}(p_0^2)) = M \cdot (\mathcal{H}(q_1), \mathcal{H}(q_2)).$$

## 3.5 How to detect quantum monodromy

### 3.5.1 Introduction

Theorem 3.3.2 wouldn't be of much interest if one could not "read off" the quantum monodromy from a picture of the joint spectrum.

This is actually easy to do, at least in a heuristic way. The rigorous mathematical formulation may however look slightly awkward.

The first idea is the following. Given a straight lattice  $\mathbb{Z}^n$ , and any two points A and B in  $\mathbb{Z}^n$ , there is a natural parallel translation from A to B acting on  $\mathbb{Z}^n$ , namely the translation by the integral vector  $\overrightarrow{AB}$ .

Now, the joint spectrum  $\Sigma(h)$  locally around any point  $c \in \mathcal{U}$  looks like a lattice. If the points A and B in  $\Sigma(h)$  are close enough to c and h is small enough, one can still define a parallel translation from A to B, taking points of  $\Sigma(h)$  near A to points in  $\Sigma(h)$  near B. This allows us to pass from one chart to another, and hence to define the notion of parallel transport along any loop through c. This yields a map from  $\pi_1(\mathcal{U}, c)$  to  $GL(n, \mathbb{Z})$  which is precisely the linear part of the quantum monodromy  $\mu^{qu}$ . This idea is made precise in section



FIG. 3.3 – parallel transport on  $\Sigma(h)$ 

3.5.2.

The problem can also be viewed the other way round. Roughly speaking,  $(\Sigma(h), \mathcal{U})$  is an affine manifold, and hence can be defined by the data of a local diffeomorphism f(h) from the universal cover  $\tilde{\mathcal{U}}$  of  $\mathcal{U}$  to  $h\mathbb{R}^n$  sending  $\Sigma(h)$  to  $h\mathbb{Z}^n$ , and of the holonomy  $\nu$  associated to it :

$$f(h; \gamma. \tilde{c}) = \nu_{\tilde{c}}(\gamma) f(h; \tilde{c}), \quad \forall \gamma \in \pi_1(\mathcal{U}), \forall \tilde{c} \in \tilde{U}.$$

Of course,  $\nu$  should be related to the quantum monodromy  $\mu_f$ . The diffeomorphism f(h) can be seen as an "unwinding" of  $\Sigma(h)$  onto  $\mathbb{R}^n$ . This viewpoint is developed in section 3.5.3.

### **3.5.2** Parallel transport on $\Sigma(h)$

Let  $(\Sigma(h), \mathcal{U})$  be an asymptotic affine lattice.

1. First suppose that there exists an affine chart f(h) of  $\Sigma(h)$  defined globally on  $\mathcal{U}$ . Since f(h) is elliptic and sends elements of  $\Sigma(h)$  into  $h\mathbb{Z}^n + O(h^\infty)$ , there is an  $h_0 > 0$  such that for any  $h < h_0$ , there is an injective map  $\tilde{f}(h)$  sending elements of  $\Sigma(h)$  exactly into  $h\mathbb{Z}^n$  and such that  $\tilde{f}(h) - f(h) = O(h^\infty)$ .

Because f(h) is of order zero, there is a fixed open ball  $\tilde{B}' \subset f(h; \mathcal{U})$  such that  $\tilde{B}' \cap (h\mathbb{Z}^n)$  is contained in  $\tilde{f}(h; \Sigma(h))$ .

Then, one can find a smaller ball  $\tilde{B} \subset \tilde{B}'$  such that for any two points  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  in  $\tilde{B} \cap (h\mathbb{Z}^n)$ , the translation by the vector  $\overline{\tilde{P}\tilde{Q}}$  takes any point of  $\tilde{B} \cap (h\mathbb{Z}^n)$ into  $\tilde{B}' \cap (h\mathbb{Z}^n)$  (figure 3.4). Let us denote by B an open ball in  $\mathbb{R}^n$  such that



FIG. 3.4 – parallel translation

 $f(h; B) \subset \tilde{B}$ . Pulling back by  $\tilde{f}(h)$ , one thus defines the "parallel transport"  $\tau_{\overrightarrow{PQ}}(A)$  of a point  $A \in \Sigma(h) \cap B$  along the direction given by two points P and Q in  $\Sigma(h) \cap B$ . When the composition is defined, we have

$$\tau_{\overrightarrow{QR}} \circ \tau_{\overrightarrow{PQ}} = \tau_{\overrightarrow{PR}}.$$
(3.4)

Moreover, because translation in  $\mathbb{Z}^n$  is an isometry, there exists a constant C > 0, independent of h, such that for any  $A \in \Sigma(h) \cap B$ 

$$||\overline{Q\tau_{\overrightarrow{PQ}}(A)}|| < C||\overrightarrow{PA}||. \tag{3.5}$$

Because of proposition 3.2.1, any other choice of affine chart f(h) gives the same parallel transport.

2. Now, let  $(\Sigma(h), \mathcal{U})$  be a general asymptotic affine lattice. If  $\gamma$  is any path in  $\mathcal{U}$ , one can cover its image by open balls  $B_i$  on which parallel transport is well defined for h less than some  $h_i > 0$ . If  $\overline{\mathcal{U}}$  is compact, as we shall always assume, this can be done with a finite number of such balls  $B_1, \ldots, B_\ell$ , ordered in a way that for each  $1 \leq i < \ell, B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ . In the following, take h to be less than  $\min_i h_i$ . Let  $P \in \Sigma(h) \cap B_0$  and  $Q \in \Sigma(h) \cap B_\ell$ . For each  $i = 1, \ldots, \ell - 1$ , pick up a point  $P_i \in \Sigma(h) \cap (B_i \cap B_{i+1})$ . For h small enough, this set is not empty. Because of the estimate (3.5), the mapping

$$\tau_{\gamma,P,Q} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{\overrightarrow{P_{\ell-1}Q}} \circ \cdots \circ \tau_{\overrightarrow{P_1P_2}} \circ \tau_{\overrightarrow{PP_1}}$$

is well-defined when restricted to a sufficiently small ball  $B_0$  around P (here again,  $\Sigma(h) \cap B_0$  won't be empty if h is small enough). Equation (3.4) shows that this map does not depend on the choice of the intermediate points  $P_i$ . Therefore it depends only on P, Q, and on the homotopy class of  $\gamma$  (as a path from a point in  $B_1$  to a point in  $B_\ell$ ).

If Q = P, and  $\gamma$  is a loop  $(B_{\ell} \cap B_1 \neq \emptyset$  and  $B_0 \subset B_1)$  then  $\tau_{\gamma,P,P}$  is a map from  $\Sigma(h) \cap B_0$  to  $\Sigma(h) \cap B_1$  leaving P invariant. If f(h) is an affine chart for  $\Sigma(h)$  on  $B_1$ , then  $\tilde{f}(h) \circ \tau_{\gamma,P,P} \circ \tilde{f}(h)^{-1}$  is a locally defined map  $\tilde{\tau}_{\gamma,f(h),P}$  from  $h\mathbb{Z}^n$  to itself leaving  $\tilde{f}(h; P)$  invariant.

We know from section 3.2 (formula (3.1)) that the choice of such an affine chart allows the quantum monodromy map  $\mu_f$  to take its values in  $GA(n,\mathbb{Z})$ . Remember that L denotes the natural homomorphism from  $GA(n,\mathbb{R})$  to  $GL(n,\mathbb{R})$ .

**Proposition 3.5.1** The map  $\tilde{\tau}_{\gamma,f(h),P}$  is equal to the linearisation at  $\tilde{P} = \tilde{f}(h;P)$  of the quantum monodromy along  $\gamma$ :

$$\forall \tilde{R} \in h\mathbb{Z}^n, \quad \overrightarrow{\tilde{P}\tilde{\tau}_{\gamma,f(h),P}(\tilde{R})} = L(\boldsymbol{\mu}_f(\gamma))\overrightarrow{\tilde{P}\tilde{R}},$$

whenever the left-hand side of the above is defined.

**Proof.** If we choose affine charts  $f_i(h)$  for  $\Sigma(h)$  on each of the  $B_i$ 's with  $f_1 = f$ , and let  $A_{i,i+1}$  be the transition elements of the monodromy cocycle

$$f_i(h)/h = A_{i,i+1}(f_{i+1}(h)/h) + O(h^{\infty})$$
 (convention  $\ell + 1 \equiv 1$ ),

then it is easy to check that

$$\overrightarrow{\tilde{P}\tilde{\tau}_{\gamma,f(h),P}(\tilde{R})} = L(A_{1,\ell})\cdots L(A_{3,2})L(A_{2,1})\cdot \overrightarrow{\tilde{P}\tilde{R}},$$

whenever the composition is defined. Using (3.2) finishes the proof.

As an application, one can easily "read off" from the spectrum of the quantum Champagne bottle (figure 3.5) that the linear part of the quantum monodromy is conjugate to the matrix  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### 3.5.3 Unwinding the spectrum

We keep here the notation of the previous paragraph. In particular,  $\Sigma(h)$  is any asymptotic affine lattice on  $\mathcal{U}$ ,  $\gamma$  is a path in  $\mathcal{U}$  whose image is covered



FIG. 3.5 – Spectrum of the Champagne bottle. The gray disc encloses the focusfocus critical value.  $R' = \tau_{\gamma,P,P}(R)$ .

by balls  $B_i$  on which local parallel translation is defined. We choose points  $P \in B_1 \cap \Sigma(h), Q \in B_\ell \cap \Sigma(h)$  and  $P_1, P_2, \ldots, P_{\ell-1}, P_\ell = Q$  such that for  $i = 1, \ldots, \ell - 1, P_i \in B_i \cap B_{i+1} \cap \Sigma(h)$ .

Given an affine chart f(h) on  $B_1$ , for h small there is a unique  $k_1 \in \mathbb{Z}^n$  such that the map  $\tilde{f}(h) \circ \tau_{\overrightarrow{PP_1}} \circ \tilde{f}(h)^{-1}$  is just translation by  $hk_1$ . If  $B_1, \ldots, B_\ell$  are endowed with affine charts  $f_1(h) = f(h), f_2(h), \ldots, f_\ell(h)$ , in the same way we define  $k_i \in \mathbb{Z}^n$  such that

$$\tilde{f}_i(h) \circ \tau_{\overrightarrow{P_{i-1}P_i}} \circ \tilde{f}_i(h)^{-1}$$

is translation by the vector  $hk_i$ . We unwind the points  $P, P_1, \ldots, P_\ell$  onto  $h\mathbb{Z}^n$  using the following procedure (see figure 3.6):

- $\tilde{P} = \tilde{f}(h; P);$
- $\tilde{P}_1 = \tilde{P} + hk_1 = \tilde{f}(h, P_1);$
- $\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 + hL(A_{2,1}) \cdot k_2;$
- . . .
- $\tilde{Q} = \tilde{P}_{\ell} = \tilde{P}_{\ell-1} + hL(A_{\ell,\ell-1}) \cdots L(A_{2,1}) \cdot k_{\ell}.$

Then one easily checks that

$$\tilde{P}_i = hA_{1,2} \circ A_{2,3} \circ \cdots \circ A_{i-1,i}(\tilde{f}_i(h; P_i)/h).$$

In particular, applying this procedure to a loop  $\gamma$  (P = Q) proves the following :



FIG. 3.6 – Unwinding of the points  $P_i$ . We deduce that  $y_{\tilde{P}} = 4$ , which allows us to locate the horizontal line through the origin  $0 \in h\mathbb{Z}^2$  (the dotted one).

**Proposition 3.5.2** For h small enough, the quantum monodromy  $\mu_f$  gives the end point  $\tilde{Q}$  of the unwinding of any loop  $\gamma$  on  $\mathcal{U}$  through a point  $P \in \Sigma(h)$  around which we are given an affine chart f(h) by the following formula :

$$\tilde{Q} = h(\boldsymbol{\mu}_f(\gamma))^{-1}(\tilde{f}(h; P)/h).$$

**Remark 3.5.1.** There is a unique symbol g(h) defined on the universal cover  $\tilde{\mathcal{U}}$  of  $\mathcal{U}$  that is an affine chart for  $\Sigma(h)$  and that coincides with f(h) above  $B_0$ . Then Q can be seen as the lift  $\gamma \cdot P \in \tilde{\mathcal{U}}$ . The point is now that

$$g(h;Q) = \tilde{Q} + O(h^{\infty}).$$

For any  $P \in \tilde{\mathcal{U}}$ , and for any  $\gamma \in \pi_1(\mathcal{U})$ , there is a unique  $\nu_P(\gamma) \in GA(n, \mathbb{Z})$  such that

$$g(h;\gamma.P)/h = \nu_P(\gamma)(g(h;P)/h) + O(h^{\infty}).$$

By definition, we have  $\nu_P(\gamma\gamma') = \nu_{\gamma,P}(\gamma')\nu_P(\gamma)$ . But one can show that for any loop  $\gamma$  such that  $\gamma P = Q$ , then

$$\nu_Q(\gamma') = \nu_P(\gamma)\nu_P(\gamma')\nu_P(\gamma)^{-1}.$$

Therefore,  $\nu_P$  is actually a homomorphism. Proposition 3.5.2 just says that

$$\nu_P = \boldsymbol{\mu}_f^{-1}.$$

/	/
_	_

Applying this proposition together with theorem 3.4.2 to a *focus-focus* singularity, we see that if the principal part of f(h) is given by the action integrals  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \alpha$  and  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \alpha$  then, for a small loop  $\delta$  enclosing the critical value o,

$$\nu(\delta) = \iota \left( \begin{array}{cc} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

In particular, the whole horizontal line through the origin consists of fixed points. Of course, locating the origin on a diagram like figure 3.6 may require the computation of the action at one point. However, given  $\tilde{P}$  and its image  $\tilde{Q}$ , it is easy to find the horizontal line through the origin, for

$$\epsilon y_{\tilde{P}} = x_{\tilde{Q}} - x_{\tilde{P}}.$$
# Chapitre 4

# Conditions de Bohr-Sommerfeld et singularités *focus-focus*

Ce chapitre constitue le cœur de ce travail. Les conditions de Bohr-Sommerfeld pour les systèmes complètement intégrables semi-classiques sont tout d'abord écrites en dehors des points critiques, en mettant en valeur l'aspect géométrique des symboles principaux et sous-principaux. Ces conditions sont ensuite généralisées aux singularités de type focus-focus; elles font intervenir des invariants géométriques du feuilletage lagrangien singulier associé, qui est décrit en détail. Enfin, les conséquences de ces conditions sur le spectre conjoint sont examinées sous divers angles et illustrées par un exemple numérique.

Le texte de ce chapitre est basé sur la prépublication [83]. L'article [84] présente un résumé des principaux résultats.

# 4.1 Introduction

In the long history of completely integrable systems, an important object was discovered quite recently (Duistermaat [37]) : the monodromy of the system, whose non-triviality prevents the construction of global action variables. The question about the impact of this invariant on the spectrum of quantum integrable system was raised by Cushman and Duistermaat in [32]; an answer is proposed in chapter 3 of this thesis. The issue is to describe the joint spectrum of two commuting *h*-pseudodifferential operators  $P_1$ ,  $P_2$  in a region close to a critical point of the  $C^{\infty}$  joint principal symbol

$$p \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2).$$

when the underlying Liouville integrable system  $p_1, p_2$  has non trivial monodromy.

However, because of a well-known drawback of both the usual WKB construction and the standard Bohr-Sommerfeld quantization conditions, the descriptions had to keep a reasonable distance away from the singular value of p. Here reasonable may be small but means fixed, as h tends to zero. In this way, an increasing number of eigenvalues (as  $h \to 0$ ) remained out of control.

On the other hand, recent achievements in semi-classical analysis of Schrödinger operators near a critical point of the potential, often via the use of microlocal normal forms, suggested that this problem should be solvable. I am referring here for instance to the work of Helffer-Robert [51], Helffer-Sjöstrand [52], Sjöstrand [79], März [67], Brummelhuis-Paul-Uribe [14], ... and in particular to the articles by Colin de Verdière and Parisse [27], [28], [29], in which the case of a local maximum of a smooth ( $C^{\infty}$ ) potential for a 1-dimensional Schrödinger operator is treated. Their method rested upon a smooth normal form theorem and on the study of the hyperbolicity of the classical hamiltonian flow.

It turns out that any two degree of freedom quantum integrable system with a *focus-focus* singularity exhibits at the same time a non-trivial monodromy and a hyperbolic behavior of the hamiltonian flow. Moreover, such a singularity admits a smooth normal form, due to Eliasson [42], that has a semi-classical analogue [81]. This allows us to settle an analysis combining a geometrical description of the underlying classical completely integrable system with a microlocal analysis near the singularity.

The main result of this chapter is the statement of the *singular* Bohr-Sommerfeld quantization conditions (theorem 4.6.9), which are uniform in a neighborhood of the critical value. In other words, these conditions are able to uniformly describe an increasing number of joint eigenvalues, and as such they contain the description of the quantum monodromy far from the singularity as well as the asymptotic distribution of the joint eigenvalues near the singularity.

The organization of the chapter is as follows. In the first parts, the aim is to settle the ingredients needed to have a global picture of the problem. The necessary background concerning Liouville integrable systems is recalled (section 4.2), and the general notion of *semi-classical* integrable systems is explained in section 4.3, where we point out the role of both the principal and sub-principal symbols. The version of the microlocal tools that we will be using is given in section 4.4; its application to completely integrable systems is developed in the next section (4.5). Besides known results concerning the WKB construction, the most fundamental results explaining our methods are probably propositions 4.5.1 and 4.5.5.

The rest of the chapter is devoted to the case of a *focus-focus* singularity in a 4-dimensional cotangent bundle. Section 4.6 contains the microlocal analysis and the geometrical description of the monodromy that lead to our main result (theorem 4.6.9). Finally, we derive in section 4.7 the structure of the joint spectrum. Theorem 4.7.3 shows that one can count the number of joint eigenvalues without knowing their precise distribution near the critical value, and theorem 4.7.6, on the contrary, studies this distribution, by estimating the spacings between the joint eigenvalues. These statements are illustrated by the example of the Champagne bottle.

# 4.2 Classical completely integrable systems

## 4.2.1 Definition

Let  $(M, \omega)$  be a symplectic manifold of dimension 2n. A completely (or "Liouville") integrable system on M is the data of n functions  $f_1, \ldots, f_n$  in involution with respect to the symplectic Poisson bracket, with the requirement that their differentials  $df_i$  are almost everywhere independent. The function

$$F : M \ni m \mapsto (f_1(m), \dots, f_n(m)) \in \mathbb{R}^n$$

is called the momentum map. It is indeed a momentum map for the Abelian infinitesimal action of  $\mathbb{R}^n$  into the Lie algebra  $\mathcal{X}(M)$  of hamiltonian vector fields on M, given by the generators  $(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)$ . Here we have denoted by  $\mathcal{X}_i$  the hamiltonian vector field  $\mathcal{X}_{f_i}$  associated to  $f_i$ . The flows of these vector fields yield a local Abelian action of  $\mathbb{R}^n$  on M, simply referred to in the sequel by "the action" or "the flow" of the system.

Note that each  $f_i$ , and hence every function of the form  $g(f_1, \ldots, f_n)$  is locally constant under this action. The momentum map F thus defines a singular fibration by invariant leaves. These leaves  $\Lambda_c \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^n$ , are generically lagrangean submanifolds of M. We shall always assume that F is *proper*, so that each  $\Lambda_c$  is compact.

# 4.2.2 Known results

Local and semi-global descriptions of completely integrable systems are provided by the following facts :

- when the vector fields  $(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)$  are independent at a point m, the Darboux-Carathéodory theorem states that the functions  $f_i$  can be taken as "momentum" coordinates of a symplectic chart  $\{(x, \xi)\}$  on a neighborhood U of m. In these coordinates, the foliation  $\Lambda_c \cap U$  for c close to F(m) is given by  $\xi = c$ . The  $x_i$  variables are therefore local coordinates for  $\Lambda_c$ .
- when c is a regular value of F this includes the previous case, of course the Arnold-Liouville theorem endows an invariant neighborhood  $\Omega$  of  $\Lambda_c$ with action-angle coordinates :  $\Omega$  is symplectomorphic to a neighborhood of the zero section of the cotangent bundle  $T^*(\mathbb{T}^n)$  of the *n*-torus  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , and the fibration F gets transformed into a smooth function of the momentum variables  $\xi_i$  only. As a consequence,  $\Lambda_c$ , as well as the neighboring fibers, are lagrangean tori equipped with an affine structure : the one given by the  $\mathbb{R}^n$  action which, in these coordinates, is linear.

In the first case, the  $\mathbb{R}^n$  action is locally free at m, and gives rise to a local diffeomorphism between  $(\mathbb{R}^n, 0)$  and  $(\Lambda_c, m)$ . By transporting the standard Lebesgue measure via this diffeomorphism we obtain an invariant measure on a neighborhood of m in  $\Lambda_c$  which in Darboux-Carathéodory coordinates  $(x, \xi)$  is nothing else than |dx|.

In the second case, this can be done globally to give a natural invariant measure  $\rho_c$  on the whole torus  $\Lambda_c$ . Letting  $m_c$  be the total mass of  $\Lambda_c$ , we can identify  $m_c^{-1}\rho_c$  with the Lebesgue (or Haar) measure on the torus  $\mathbb{T}^n$  via action-angle coordinates.  $\rho_c$  smoothly depends on c and is called the *Liouville* measure.

**Remark 4.2.1.** This terminology sometimes also applies to the symplectic measure  $\omega^{\wedge n}/n!$ . Note that the push-forward of this measure by F gives a measure  $\mu_c$  on  $\mathbb{R}^n$  that satisfies

$$\frac{\omega^{\wedge n}}{n!} = \rho_c \otimes \mu_c,$$

and that is long known to be of particular importance when it comes to counting eigenvalues (see section 4.7). Because of the article [39]  $\mu_c$  is sometimes called Duistermaat-Heckman's measure.

Since we will be dealing only with pseudo-differential quantization, we will always assume that M is an open subset of a cotangent bundle  $T^*X$ , which implies that the symplectic form is exact :  $\omega = d\alpha_0$ , where  $\alpha_0$  is the standard Liouville 1-form. If we let  $i_c : \Lambda_c \hookrightarrow M$  be the inclusion, the fact that  $\Lambda_c$ is lagrangean implies that the 1-form  $i_c^*\alpha_0$  is closed and thus gives rise to an element of the cohomology  $H^1(\Lambda_c, \mathbb{R})$ . With slight abuse of notation, we will still call it  $[\alpha_0]$ .

# 4.3 Semi-classical integrable systems

The aim of this section is to define what we consider to be the proper semiclassical quantization of completely integrable systems (in accordance with [23], [17]), and to present a geometric interpretation of their sub-principal terms.

# 4.3.1 Definition

Let X be a differentiable manifold of dimension n, equipped with a half-density  $|dx|^{1/2}$ , and let  $\Omega$  be an open subset of  $T^*X$ . The spaces of pseudodifferential operator that are used here are defined in section 4.4; however, we shall here only use the fact that they are defined up to the order  $O(h^2)$  by two functions of  $\Omega$ : their principal and sub-principal symbols.

Throughout this work, pseudodifferential operators are always *classical* and formally self-adjoint, so that their principal and sub-principal symbols are *real*-valued.

A set  $\{P_1(h), \ldots, P_n(h)\}$  of *n* pseudodifferential operators in  $\Psi^0(\Omega)$  of order zero is called a *semi-classical integrable system* if :

- the principal symbols  $p_1, \ldots, p_n$  form a completely integrable system.
- $\forall i, j \quad [P_i(h), P_j(h)] = 0.$

Note that the second condition already implies that the principal symbols are in involutions.

Because of this definition any semi-classical integrable system has an underlying classical completely integrable system, which means that the main geometric ingredient of such a system is the lagrangean fibration  $\Lambda_c$  given by the principal symbols. Of particular importance for us will be the *principal lagrangean*  $\Lambda_0$ .

**Remark 4.3.1.** All the results of sections 2-6 would still hold if the commutation property is weakened to  $[P_i(h), P_j(h)] = O(h^{\infty})$ . Section 7 however requires the exact commutation of the operators, in order to define their joint spectrum. Similarly, a number of results before that section would still be valid if the self-adjointness requirement is dropped and replaced by the assumption that both the principal and sub-principal symbols are real-valued.  $\triangle$ 

# 4.3.2 The sub-principal form

#### 4.3.2.1 Definition

Apart from the principal symbols, the data of a semi-classical integrable system defines another set of functions, namely the sub-principal symbols  $r_1, \ldots, r_n$ . We assume here that these functions are real-valued. While the principal symbols

gave rise to the momentum map and its lagrangean fibration, the sub-principal symbols will be viewed as characteristic of an infinitesimal deformation of the lagrangean leaves.

**Definition 4.3.1** The sub-principal form  $\kappa_c$  of a semi-classical integrable system is the differentiable 1-form on  $\Lambda_c$  defined at non-singular points of F by :

$$\kappa_c(\mathcal{X}_i) = -r_i.$$

Recall that  $\mathcal{X}_i$  denote the hamiltonian vector field of  $p_i$ . At such a non-singular point,  $(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)$  is a basis of the tangent space of  $\Lambda_c$ .

This form also appears in [18].

The first property of  $\kappa_c$  is the fact that it is *closed*. Indeed, the  $r_i$ 's are not just any functions. The Weyl rule (section 4.4, formula (4.4)) applied to the commutation property of the pseudodifferential operators  $P_i$  is, at the order  $h^2$ , equivalent to :

$$\{r_i, p_j\} = \{r_j, p_i\}.$$

In a symplectic chart given by the Darboux-Carathéodory theorem, this reads :

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} = \frac{\partial r_j}{\partial x_i}$$

and  $\kappa_c$  is the closed 1-form  $\kappa_c = -\sum r_i dx_i$ .

#### 4.3.2.2 Deformation of lagrangean submanifolds

Let  $\mathcal{L}(M)$  be the set of all lagrangean submanifolds of a 2n dimensional symplectic manifold M. By the Darboux-Weinstein theorem, we can identify a tubular neighborhood of a lagrangean submanifold  $\Lambda_0$  with a neighborhood of the zero section of  $T^*\Lambda_0$ . Any other lagrangean submanifold within that neighborhood can then be identified with a closed 1-form on  $\Lambda_0$  (see [86]). This gives a "chart" for  $\mathcal{L}(M)$ , making it formally a differentiable infinite dimensional manifold, whose tangent space at  $\Lambda_0$  is naturally identified with the space of closed 1-forms on  $\Lambda_0$ .

One can be more specific. The exponential map for vector fields gives a diffeomorphism between a tubular neighborhood of  $\Lambda_0$  and the normal bundle  $\frac{T_{\Lambda_0}M}{T\Lambda_0}$ . The latter is identified with  $T^*\Lambda_0$  by means of the symplectic form : let  $x \in \Lambda_0$ ; to any  $X \in T_x M$  is associated the cotangent vector

$$\tilde{\omega}(X) = i_X \omega_{\upharpoonright T_x \Lambda_0}.$$

Since  $\Lambda_0$  is lagrangean, the kernel of  $\tilde{\omega}$  is exactly  $T_x \Lambda_0$ .

In this way, we can easily describe the tangent space of  $\mathcal{L}(M)$ : an infinitesimal variation of  $\Lambda_0$  is by definition a vector field transversal to  $\Lambda_0$ , that is, a section of  $\frac{T_{\Lambda_0}M}{T\Lambda_0}$ . By the above isomorphism, it can be identified with a 1-form

on  $\Lambda_0$ . That infinitesimal variation is performed within the space of lagrangean submanifolds if and only if this 1-form is closed, that is, the deformation vector field is locally hamiltonian (see also [88]).

Let us apply this description to the case where a path in  $\mathcal{L}(M)$  is given as a 1-parameter family of level sets of n independent functions  $p_i^t$  in involution :

$$\Lambda^t = \{p_i^t = 0.\}$$

**Lemma 4.3.1** The infinitesimal variation 1-form  $\kappa = \frac{d}{dt} \Lambda^t_{|t=0}$  is given by

$$\kappa(\mathcal{X}_{p_i^0}) = -\frac{\partial p_i^t}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

**Proof.** Let  $x \in \Lambda^0$ . Complete  $(p_1^0, \ldots, p_n^0)$  into a Darboux-Carathéodory chart, so that the tangent vectors  $\frac{\partial}{\partial p_j^0}$  form a basis of the normal bundle. Taylor's formula  $p_i^t \sim p_i^0 + t \frac{\partial p_i^t}{\partial t}|_{t=0}$  shows that at t = 0, the deformation vector field for  $\Lambda^t$  is given by

$$X(x) = \sum_{i} -\frac{\partial p_{i}^{t}(x)}{\partial t} \frac{\partial}{|t=0} \frac{\partial}{\partial p_{j}^{0}}$$

To this transversal vector field corresponds the 1-form  $\kappa = i_X \omega$ . On the basis  $(\mathcal{X}_{p_1^0}, \ldots, \mathcal{X}_{p_n^0})$  of  $T\Lambda^0$ , it is given by  $\kappa(\mathcal{X}_{p_i^0}) = \omega(X, \mathcal{X}_{p_i^0}) = dp_i^0 \cdot X = -\frac{\partial p_i^t}{\partial t}|_{t=0}$ .  $\Box$ 

**Remark 4.3.2.** For each t, the functions  $p_1^t, \ldots, p_n^t$  define a completely integrable system in a neighborhood of  $\Lambda^t$ . The variation 1-form can be computed not only for  $\Lambda^t$ , but also for the neighboring leaves  $\Lambda_c^t \stackrel{\text{def}}{=} \cap_i (p_i^t)^{-1}(c)$ . Then  $\kappa_c = \frac{d}{dt} \Lambda_{c|t=0}^t$  is given on  $\Lambda_c$  as in lemma 4.3.1 :

$$\kappa_c(\mathcal{X}_{p_i^0}) = -\frac{\partial p_i^t}{\partial t}_{|t=0}$$

The fact that for all c,  $\kappa_c$  is closed can be checked by differentiating the equality  $\{p_i^t, p_i^t\} = 0$  at t = 0.

Remark 4.3.3. It is natural now to be willing to consider the level sets

$$p_i^0 + t \frac{\partial p_i^t}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

as a "linearization" of the family  $\Lambda_t$ . Unfortunately, these level sets are in general not lagrangean. More precisely, the symplectic form restricted to them is of order  $t^2$ . However, one can prove that there exists a set of functions  $\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n$  such that the functions

$$\tilde{p}_i^t \stackrel{\text{def}}{=} p_i^0 + t\tilde{r}_i$$

are indeed in involution, and such that the corresponding deformation 1-forms  $\tilde{\kappa}_c$  satisfies

$$[\tilde{\kappa}_c] = [\kappa_c] \in H^1(\Lambda_c^0).$$

The value of  $\tilde{r}_1$  on  $\Lambda_c$  is constant and obtained by *averaging* the sub-principal terms  $\frac{\partial p_i^t}{\partial t}|_{t=0}$  over  $\Lambda_c$ .

# 4.3.2.3 Deformation of the Action integral

Let  $\Lambda_t$  be a smooth family of lagrangean submanifolds of M, and let  $\gamma_t(\theta), \theta \in S^1$ be a smooth family of loops such that each  $\gamma_t$  is drawn on  $\Lambda_t$ . Suppose that on a neighborhood of the image of  $\gamma_0$ , the symplectic form  $\omega$  is exact :  $\omega = d\alpha$ . Then this holds for t small enough, and we can define the action integral :

$$A(\gamma_t) = \int_{\gamma_t} \alpha.$$

**Lemma 4.3.2** The variation 1-form  $\kappa = \frac{d}{dt} \Lambda_{t \mid t=0}$  on  $\Lambda_0$  is characteristic of the infinitesimal variation of the action, in the following sense :

$$\frac{d}{dt}A(\gamma_t)_{\mid t=0} = \int_{\gamma_0} \kappa.$$

**Proof.** We want to prove that the 1-forms  $\frac{d}{dt} (\gamma_t^*(\alpha))_{|t=0}$  and  $\gamma_0^*(\kappa)$  are cohomologous on  $S^1$ . We have

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma_t^*(\alpha) \right) = \gamma_t^* \left( \mathcal{L}_{\frac{\partial \gamma_t}{\partial t}} \alpha \right) =$$
$$= \gamma_t^* \left( i_{\frac{\partial \gamma_t}{\partial t}} d\alpha + d(i_{\frac{\partial \gamma_t}{\partial t}} \alpha) \right).$$

At t = 0, the vector field  $\frac{\partial \gamma_t}{\partial t}$  splits into two components  $X_{\tau}$  and  $X_{\nu}$ , the first one being tangent to  $\Lambda_0$ . The other one, in the normal bundle  $\frac{T_{\Lambda_0}M}{T\Lambda_0}$ , is by definition the deformation vector field of the family  $\Lambda_t$ . Therefore,

$$\gamma_0^*\left(i_{\frac{\partial\gamma_t}{\partial t}}d\alpha\right) = \gamma_0^*(i_{X_\tau}\omega) + \gamma_0^*(i_{X_\nu}\omega) = 0 + \gamma_0^*(\kappa),$$

which gives the result.

**Remark 4.3.4.** Of course, the value t = 0 plays a arbitrary role : if we define  $\kappa_t = \frac{d}{dt} \Lambda_t$ , then  $\frac{d}{dt} A(\gamma_t) = \int_{\gamma_t} \kappa_t$ .

#### 4.3.2.4 $\kappa$ as a semi-classical deformation

Returning to the hypothesis of paragraph (4.3.2.1), we are now able to give a geometrical interpretation of the sub-principal form.

The total symbol  $p_i(h)$  of  $P_i(h)$  is considered as a semi-classical deformation of the principal symbol  $p_i^0$ . Then around any regular point of the principal

 $\triangle$ 

symbol, the sub-principal form is equal to the deformation 1-form – as h tends to zero – of any family of lagrangean submanifolds defined as level sets of functions of the form  $p_i^0 + hr_i + O(h^2)$ .

Of course, the level sets of the total symbols themselves need no be lagrangean. Recall however that in the case where 0 is a regular value of the principal symbol we can average the sub-principal symbols without changing the cohomology class of  $\kappa_c$  in such a way that the level sets of  $p_i^0 + hr_i$  are indeed lagrangean.

As we shall see in section 4.5, the Bohr-Sommerfeld quantization conditions that apply to such a situation depend on the sub-principal symbols only through the cohomology class of  $\kappa_c$ . This shows that articles like [23], [17] that would rather assume that the sub-principal symbols are either equal to zero or at least constant on each  $\Lambda_c$  are not far from the general case.

Another nice property of the cohomology class of  $\kappa_c$  is its invariance under conjugation by unitary pseudodifferential operators.

**Proposition 4.3.3** Let  $P_i(h)$  be a semi-classical integrable system with a nonsingular principal lagrangean  $\Lambda_0$ . Let V(h) be a classical unitary pseudodifferential operator on a neighborhood of  $\Lambda_0$ . Let  $P'_i = V^{-1}P_iV$  be the transformed integrable system and  $\kappa'$  the new sub-principal form.

Then  $[\kappa'] = [\kappa]$ .

**Proof.** Since P and P' have same principal symbols, we can write P' = P + hQ, with  $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ . The intertwining property VP' = PV reads :

$$[P_j, V] = h V Q_j.$$

At the principal level, this gives  $\frac{1}{i}\{p_j, v\} = vq_j$ , which, writing  $v = e^{ic}$ , yields :

$$\{p_j, c\} = q_j.$$

The sub-principal symbols  $r_j^{(\prime)}$  of  $P^{(\prime)}$  satisfy  $r_j' = r_j + q_j$ , that is,

$$\kappa' = \kappa + dc,$$

where dc denotes the differential of c as a function on  $\Lambda_0$ .

Note that the unitarity of V is only used up to  $O(h^2)$  in order to ensure that the sub-principal symbols of the transformed system are real-valued.

# 4.4 Microlocal analysis

The aim of this section is to present a minimal version of the microlocal analysis needed in order to give a precise and usable definition of what we call "microlocal solutions" of pseudo-differential systems (section 4.4.5).

The results can be retrieved from [27], [24], [75], and [58]; however, note that we focus here a little bit more on the *microlocal* point of view, and assumptions about "behavior at infinity" are usually irrelevant in this theory.

# 4.4.1 Symbols

We recall here the basic definitions of symbols and classical symbols. One reason for including here this standard material, besides the sake of completeness, is that our work mainly deals with local properties, in a neighborhood of a point or at least in a neighborhood of a compact region of the phase space; and for this purpose, a very simple notion of 'symbols' can be introduced, which is the following :

**Definition 4.4.1** A family of complex-valued functions  $(p(h))_{h\in H}$  on a manifold Z, where H is a subset of  $\mathbb{R}$  having 0 as an accumulation point, is called a compactly supported symbol if there exists a compact set  $K \subset Z$  and an integer  $m \in \mathbb{Z}$  such that every p(h) is a  $C^{\infty}$  function with support in K such that :

$$\forall \alpha, \exists C_{\alpha}, \ s.t. \ \forall h \in H, \sup_{z \in Z} |\partial_{z}^{\alpha} p(z;h)| \leqslant C_{\alpha} h^{m}.$$

$$(4.1)$$

We denote by  $S_0^m(Z)$  the vector space of all such symbols. If we drop the condition on the support we obtain the space of all symbols of order m, denoted by  $S^m(Z)$ .

The notation  $S_{(0)}^m(Z)$  shall be used in any assertion that holds for  $S_0^m(Z)$  as well as for  $S^m(Z)$ .

**Remark 4.4.1.** In the notation  $S^m_{(0)}(Z)$ , we forgot the dependence in H. Somewhat later we will have to be more careful, but this omission is harmless at this point.

Note that  $S_{(0)}^m(Z) \subset S_{(0)}^{m'}(Z)$  for  $m \ge m'$  and, due to the Leibniz formula, the space  $S_{(0)}^*(Z) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} S_{(0)}^m(Z)$  of symbols of any order is a graded algebra for the usual multiplication. It is also clear that  $S_{(0)}^m(Z) = h^m S_{(0)}^0(Z)$ . If Z sits in a symplectic manifold, we can also endow  $S_{(0)}^*(Z)$  with the Poisson bracket  $\{p_1(h), p_2(h)\}$  turning it into a graded Poisson algebra.

**Definition 4.4.2** A symbol  $(p(h))_{h \in H} \in S^m_{(0)}(Z)$  is said to be classical if it admits an asymptotic expansion of the form :

$$p(z;h) \sim \sum_{k \ge m} p_k(z) h^k,$$

in the sense that  $\forall N \ge m$ ,  $p(h) - \sum_{k=m}^{N} p_k h^k \in S^{N+1}_{(0)}(Z)$ .

**Remark 4.4.2.** If we apply the above definitions to symbols independent of z, we get the notion of a "constant symbol". We will let  $\mathbb{C}_h \hookrightarrow S^*(Z)$  denote the algebra of such constants. With that respect, the spaces  $S^*(Z)$  and  $S_0^*(Z)$  can be considered as modules over  $\mathbb{C}_h$ .

A functional calculus can be performed on symbols of non-negative order; we will only need the following : if  $p(h) \in S^m_{(0)}(Z)$  with  $m \ge 0$ , then  $\exp p(h) \in$   $S^0(Z)$ . It is of course not compactly supported. One can easily check that for any cut-off function  $\chi$  supported in K we have  $\chi \exp p(h) \in S_0^0(Z)$ , and conversely, let q(h) be an element of  $S_{(0)}^0(Z)$ ; if  $\Omega$  is any simply-connected open subset of Z on which q(h) is *elliptic* (*i.e.* |q(h)| > c > 0 on  $\Omega$ , for all h), then one can define a symbol  $p(h) \in S^0(\Omega)$  such that  $q(h) = \exp p(h)$  on  $\Omega$ . Finally, if  $\Omega$  has compact closure in the interior of Z, one can inject any symbol  $q(h) \in S^m(\overline{\Omega})$  in  $S_0^m(Z)$  by smoothly extending it to zero outside a neighborhood of  $\overline{\Omega}$ . Everything can be restated in the "classical" category.

**Definition 4.4.3** We say that a symbol is  $O(h^{\infty})$  if it is in  $S^m(Z)$  for all m > 0. We denote by  $S^{\infty}(Z)$  the subspace of all such symbols. Similarly,  $S_0^{\infty}(Z)$  is the intersection of all  $S_0^m(Z)$ .

Now, the spaces that will be really of interest for us are the quotient spaces  $S_{(0)}^*(Z)/S_{(0)}^{\infty}(Z)$ . Elements in the same class will be called *microlocally equal* on Z. This word is easily justified when Z is a subset of a  $T^*X$ ; its extension to any Z should raise no problem. The space of classical symbols modulo microlocal equality can then be isomorphically identified with the space of formal expansions of the form  $\sum_{k>m} p_k(z)h^k$ .

**Remark 4.4.3.** The set of all classical constant symbols modulo microlocal equality is equal to the field of numerical formal series in h. In general however, the quotient of  $\mathbb{C}_h$  by microlocal equality is a ring that will be denoted by  $\overline{\mathbb{C}}_h$ . If  $\overline{c}(h)$  is a non zero element of  $\overline{\mathbb{C}}_h$ , then by definition there exists an  $N \in \mathbb{Z}$  and a proper subset  $H' = \{h_k, k \in \mathbb{N}\}$  of H accumulating at 0 such that

$$|c(h_k)| \ge h_k^N, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

This means that, replacing H by H',  $\bar{c}(h)$  becomes invertible in  $\bar{\mathbb{C}}_h$ . As a consequence, it will sometimes be harmless to think of  $\bar{\mathbb{C}}_h$  as a field.

The group of units of the ring  $\overline{\mathbb{C}}_h$  is denoted by  $\overline{\mathbb{C}}_h^*$ . A useful subgroup of  $\overline{\mathbb{C}}_h^*$  will be constructed in section 4.4.6.

In order to get meaningful information from the "quantization conditions" that we are going to derive later, we need to consider symbols depending uniformly on a parameter  $E \in \mathbb{R}^n$ . By uniformly, we mean that for every compact subset B of  $\mathbb{R}^n$ , the estimate (4.1) is valid uniformly for  $E \in B$ . In the classical case, this is true for instance if each  $p_k$  depends continuously on E.

## 4.4.2 Pseudo-differential operators

For the general theory, we refer to [75], [24]. Proofs can usually be derived from the homogeneous theory of Hörmander [59]. We wish here to present a microlocal version of the standard classes of pseudo-differential operators. Let X be a differentiable manifold of dimension n, and  $M = T^*X$ . In every local coordinates, a compactly supported pseudo-differential operator P(h) on an open subset U of X is an operator with smooth kernel of the form :

$$K_h(x,y) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}(x-y).\xi} a(x,y,\xi;h) d\xi, \qquad (4.2)$$

where a(h) is a symbol in  $S_0^*(U \times U \times \mathbb{R}^n)$ . Note that  $K_h$  has compact support in  $U \times U$ , hence these operators are continuous linear operators (for fixed h) from  $C^{\infty}(U)$  to  $C_0^{\infty}(U)$ , or even from distributions  $\mathcal{D}'(U)$  to  $C_0^{\infty}(U)$ . We shall assume that a  $C^{\infty}$  half density  $|dx|^{\frac{1}{2}}$  is given on X so that each function u on X is associated with the half density  $u|dx|^{\frac{1}{2}}$ .

Pseudo-differential operators have a Weyl symbol, which is a *h*-dependent function  $p(h) = \sigma_W(P(h))$  on *M*, such that P(h) can be retrieved from p(h) by the so-called "Weyl quantization" scheme :

$$(Op^{W}(p(h))u)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^{n}} \int e^{\frac{i}{h}(x-y).\xi} p(\frac{x+y}{2},\xi;h)u(y)dyd\xi.$$
(4.3)

Now let  $p(h) \in S_0^m(\Omega)$ , and  $\chi \in C_0^\infty$  equal to 1 in some neighborhood of  $0 \in \mathbb{R}^n$ . We have  $a(x, y, \xi; h) = p(\frac{x+y}{2}, \xi; h)\chi(x-y) \in S_0^m(U \times U \times \mathbb{R}^n)$ , which allows us to form a pseudodifferential operator  $Op_{\chi}^W(p(h))$  via (4.2). Then one can show that the Weyl symbol of the latter pseudodifferential operator, although perhaps not of compact support, is nevertheless microlocally equal to p(h) on  $\Omega$ . That motivates the following definitions :

**Definition 4.4.4** Let  $\Omega$  be an open subset of M, in which we have symplectic coordinates  $(x,\xi)$ . We suppose here that x varies in U, an open subset of Xcontaining  $\pi(\Omega)$  where  $\pi$  is the natural projection  $T^*X \to X$ . A compactly supported pseudodifferential operator P(h) on U will be called h-smoothing or " $O(h^{\infty})$ " on  $\Omega$  or element of  $\Psi_0^{\infty}(\Omega)$  if its Weyl symbol belongs to the space  $S^{\infty}(\Omega)$ .

The quantization procedure  $Op_{\chi}^{W}(p(h))$  is therefore independent of  $\chi$  modulo  $\Psi_{0}^{\infty}(\Omega)$ .

**Definition 4.4.5** We denote by  $\Psi_0^m(\Omega)$  the space of compactly supported pseudodifferential operators of the form  $Op_{\chi}^W(p(h)) + \Psi_0^{\infty}(\Omega)$ , for any p(h) and  $\chi$  defined as above.

**Remark 4.4.4.** Dealing with pseudodifferential operators, we shall always assume that the symbols involved are classical.  $\triangle$ 

This definition leads to an isomorphism between the spaces  $\Psi_0^m(\Omega)/\Psi_0^\infty(\Omega)$ and  $S_0^m(\Omega)/S_0^\infty(\Omega)$  (for the latter is isomorphic to  $\frac{S_0^m+S^\infty}{S^\infty}$ ). This isomorphism, still denoted by  $\sigma_W$ , depends on the local coordinates, but we recall that the first two terms in the asymptotic expansions of the Weyl symbols are intrinsically defined on  $T^*X$ , provided we let pseudodifferential operators act on half-densities (the proof of this was given in [40, prop 5.2.1] for homogeneous pseudodifferential operators, *i.e.* without a small parameter h, and applies to our situation with no essential change); these two terms are respectively called the *principal* and *sub-principal* symbols, and are compactly supported.

It also ensures that theses classes of pseudodifferential operators are stable with respect to the operations of composition and taking adjoints. We are now able to define the notion of the restriction of a pseudodifferential operator; namely, if N is any subset of  $\Omega$ , two elements P(h) and Q(h) of  $\Psi_0^m(\Omega)$  will be called microlocally equal on N, and written " $P \sim Q$  on N" if  $\sigma_W(P) = \sigma_W(Q)$  on N. Then we can perform inversion of elliptic operators in the following sense:  $P(h) \in \Psi_0^m(\Omega)$  is elliptic at a point m if its principal symbol does not vanish at m. Then there is a neighborhood N of m and a  $Q(h) \in \Psi_0^{-m}(\Omega)$  such that  $PQ \sim QP \sim I$  on N, where I is a pseudodifferential operator satisfying  $I \sim Op^W(1)$  on N.

**Remark 4.4.5.** The space of Weyl symbols is naturally equipped with the Lie algebra structure given by the symplectic Poisson bracket. On the other hand, the space of pseudodifferential operators has a natural Lie operator algebra structure. Though it is known that there is no hope for finding a "quantization" isomorphism that fully respects this Lie algebra structure, the Weyl quantization has the not-so-bad following behavior (see [44]) : Let  $p_1(h)$  and  $p_2(h)$  be symbols of order 0, and  $P_1(h)$  and  $P_2(h)$  their Weyl-quantization. Then  $[P_1, P_2]$  is a pseudodifferential operator of order 1 and of Weyl symbol

$$\frac{h}{i} \left( \{ p_1, p_2 \} + O(h^2) \right). \tag{4.4}$$

In particular the sub-principal symbol of  $[P_1, P_2]$  is easily computed in terms of those of  $P_1$  and  $P_2$ :

$$\sigma_{\rm sub}(\frac{i}{h}[P_1, P_2]) = \{p_{1,0}, \sigma_{\rm sub}(P_2)\} + \{\sigma_{\rm sub}(P_1), p_{2,0}\},\$$

where  $p_{j,0}$  is the principal symbol of  $P_j$ .

**Remark 4.4.6.** The above classes of operators would be purely abstract if we could not relate them to usual *h*-admissible pseudodifferential operators in the sense of [75] and others, for which additional assumptions concerning the behavior of the symbols at infinity are needed. Such a link is here easy: if  $P(h) \in \Psi_0^m(\Omega)$ , where  $\Omega$  is some open subset of  $\mathbb{R}^n$ , we can form a strongly admissible pseudodifferential operator on  $\mathbb{R}^n$  by extending the Weyl symbol to zero outside its support, and using a  $Op_{\chi}^W$  quantization. Conversely, if Q(h)is an admissible pseudodifferential operator in the sense of [75], it has a Weyl symbol, that we can cut to make it compactly supported in  $\Omega$ , and get a P(h)again. If Q(h) was already obtained by a  $P(\tilde{h})$  in  $\Psi_0^m(\Omega)$ , then by definition the new P(h) will microlocally coincide with  $P(\tilde{h})$  on the set where the cut-offs are both equal to 1. The interest of this microlocalization procedure will be made clear in the next section (prop 4.4.3).

Finally, compactly supported pseudodifferential operators on manifolds can then be defined to be locally finite sums of operators admitting the above description in a local coordinate chart. The principal and sub-principal symbols remain well-defined functions on  $T^*X$ .

 $\triangle$ 

#### 4.4.3 Fourier integral operators

Similarly to the space  $\Psi_0^*(\Omega)$ , microlocal classes of Fourier integral operators can be constructed. We will here skip most of the details. Let X, Y be differentiable manifolds, and  $\Omega_X$  and  $\Omega_Y$  open subsets of  $T^*X$  and  $T^*Y$  respectively. Suppose we have a symplectic diffeomorphism  $\chi$  from  $\Omega_Y$  to  $\Omega_X$ . Let  $\Lambda$  be the graph of  $\chi$  in  $\Omega_X \times \Omega_Y$ . It is an immersed lagrangean submanifold of  $T^*X \times \overline{T^*Y}$ , where  $\overline{T^*Y}$  denotes the cotangent  $T^*Y$  equipped with  $-\omega$ , the opposite of the standard symplectic form. Thus,  $\Lambda$  admit parameterization by non-degenerate phase functions  $\varphi : \Lambda = \bigcup \Lambda_{\varphi}$ . For details about this construction, refer to [36] or [5]. Following [24], we define  $\Psi_0^m(\Omega_X, \Omega_Y, \chi)$  to be the space of operators whose kernel is microlocally equal to a compactly supported classical *h*-oscillatory integral on  $\Lambda$  (see paragraph 4.4.6). On each  $\Lambda_{\varphi}$ , it has a principal symbol defined as a function on  $\Lambda_{\varphi}$ . A Fourier integral operator U(h) is said to be elliptic at a point  $(x,\xi)$  or, equivalently, at the point  $\chi^{-1}(x,\xi)$ , if its principal symbol does not vanish at  $(\chi^{-1}(x,\xi), (x,\xi)) \in \Lambda_{\varphi}$ .

These operators behave as expected with respect to composition and microlocal inversion of elliptic operators. Most important for us, they allow to find normal forms for pseudo-differential operators thanks to the celebrated theorem of Egorov : if P(h) is a pseudodifferential operator on  $\Omega_X$  of principal symbol p and U(h) an Fourier integral operator elliptic at a point  $(x, \xi)$ , then  $U^{-1}PU$ is, near  $\chi^{-1}(x, \xi)$ , a pseudodifferential operator of principal symbol  $p \circ \chi$ .

# 4.4.4 *h*-admissible functionals

In the above, we have let pseudodifferential operators act on h-independent distribution half-densities, which is of course not enough for our purposes. Let U be a regular domain in  $\mathbb{R}^n$ . If  $u \in \mathcal{D}'(U, \Omega_{\frac{1}{2}})$ , then for any pseudodifferential operator P(h), Pu is a compactly supported distribution, hence in the Sobolev space  $H^{-s}$  for some integer s; this holds for any fixed h. In order to get asymptotic information for all  $h \in H$ , we are lead to the following definition (see [75, prop IV-8]) :

**Definition 4.4.6** A family  $(u_h)_{h\in H}$  of distribution half densities is called admissible on  $\Omega$  if for any pseudodifferential operator  $P(h) \in \Psi_0^0(\Omega)$ , there is an  $N \in \mathbb{Z}$  and some  $s \in \mathbb{Z}$  such that  $h^N(Pu_h)$  is uniformly bounded in  $H^{-s}(U)$  for all  $h \in H$ . We denote by  $\mathcal{D}_h(\Omega)$  this space of admissible functionals.

 $\mathcal{D}_h(\Omega)$  is then a  $\mathbb{C}_h$ -module that is by definition stable under the action of  $\Psi_0^m(\Omega)$ .

**Proposition 4.4.1** If  $u_h$  is admissible on  $\Omega$  then for any  $P(h) \in \Psi_0^0(\Omega)$  there is an  $N' \in \mathbb{Z}$  such that  $h^{N'}Pu_h$  is bounded in  $L^2(U)$ .

**Proof** (see [75, p.195-196]). One can find an elliptic operator D(h), that is a zero-order usual pseudodifferential operator on U, that uniformly maps  $L^2(U)$ 

into some power of h times  $H^{-s}(U)$  (extend to  $\mathbb{R}^n$ , and take  $D = h^s(-\Delta + |x|^2 + 1)^{s/2}$ ). Let  $D^{-1}$  be a right inverse of D, and  $P(h) \in \Psi_0^0(\Omega)$  be as in definition 4.4.6. So there is a N' and a  $C < \infty$  such that  $\|D^{-1}(h)P(h)u_h\|_{L^2(U)} < Ch^{-N'}$ . Now let  $\Omega' \supset \overline{\Omega}$  and let  $I(h) \in \Psi_0^0(\Omega')$  have symbol equal to 1 on a neighborhood of  $\Omega$ . Then  $(I(h)-1)P(h) \in \Psi_0^\infty(\Omega)$ , and by the symbolic calculus,  $I(h)D(h) \in \Psi_0^0(\Omega')$ . Therefore, I(h)D(h) is uniformly  $L^2$ -continuous ([75, th.II-36]), and we can write  $\|P(h)u_h\|_{L^2} = \|I(h)D(h)D^{-1}(h)P(h)u_h\|_{L^2} + O(h^\infty) \leq C'h^{-N'}$ .  $\Box$ 

A natural notion of "microlocal equality" for admissible functionals can now be defined :

**Definition 4.4.7**  $\mathcal{D}_h^{\infty}(\Omega)$  denotes the space of  $u_h \in \mathcal{D}_h(\Omega)$  such that for any pseudodifferential operator  $P(h) \in \Psi_0^*(\Omega)$  we have :

$$||Pu_h||_{L^2(U)} = O(h^\infty).$$

Two admissible functionals  $u_h$  and  $v_h$  are called microlocally equal on  $\Omega$  if they belong to the same class modulo  $\mathcal{D}_h^{\infty}(\Omega)$ . Following [27], we will write " $u_h \sim v_h$ on  $\Omega$ " in that case. If  $m \in T^*X$ , we say that  $u_h \sim v_h$  at the point m if there exists an open neighborhood  $\Omega$  of m such that  $u_h \sim v_h$  on  $\Omega$ .

Note that, because the above definition only involves estimates on compact subsets of  $\Omega$ ,  $u_h \sim v_h$  on  $\Omega$  if and only if  $u_h \sim v_h$  at each point of  $\Omega$ . Moreover, to test microlocal equality at a point, it is sufficient to pick up an elliptic operator that satisfies the required estimate. There again we have obvious although useful properties :

**Proposition 4.4.2** • *if*  $P(h) \in \Psi_0^{\infty}(\Omega)$ , then for all  $u_h \in \mathcal{D}_h(\Omega)$ ,  $Pu_h \sim 0$  on  $\Omega$ ;

• if  $u_h \sim 0$  on  $\Omega$ , then for all  $P(h) \in \Psi_0^*(\Omega)$ ,  $Pu_h \sim 0$  on  $\Omega$ .

This is essentially due to the  $L^2$ -continuity of pseudodifferential operator of order 0. In other words, the quotient space  $\Psi_0^*(\Omega)/\Psi_0^\infty(\Omega)$  acts naturally on  $\mathcal{D}_h(\Omega)/\mathcal{D}_h^\infty(\Omega)$ . This says that the action of a pseudodifferential operator on an admissible functional is microlocally given by the (formal) Weyl symbol  $\sigma_W$ . Note also that the space  $\mathcal{D}_h(\Omega)/\mathcal{D}_h^\infty(\Omega)$  has the structure of a  $\overline{\mathbb{C}}_h$ -vector space.

In particular, if N is any subset of  $\Omega$ , the definition 4.4.7 gives a natural microlocal equality on N, which is compatible with the notion of restriction of a pseudodifferential operator previously introduced: two pseudodifferential operators microlocally equal on N have the same action on two admissible functionals microlocally equal on N.

The same remark applies for the following interesting result :

**Proposition 4.4.3** If Q(h) is a global admissible pseudodifferential operator in  $\mathbb{R}^n$  in the sense of [75],  $\Omega$  an open subset of  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $u_h$  an admissible functional in  $\Omega$ , and  $P(h) \in \Psi_0^*(\Omega)$  a microlocalization of Q in a compact K of  $\Omega$ , then  $Qu_h$  is admissible in  $\Omega$  and :

 $Qu_h \sim Pu_h \text{ on } K.$ 

Alternatively, one can relate this notion of microlocal equality for admissible functionals to the so-called *semi-classical wave front set*, as introduced in [75] or [24], and denoted by  $WF_h(u_h)$ . This notion is not stabilized yet, in the sense that, depending on authors, it includes or not uniform estimates at infinity (see remark in [27, p.1541]). Anyhow, the simpler part of  $WF_h$ , that is to say its intersection with  $T^*X$ , is defined as follows :

suppose  $u_h$  is admissible on  $T^*X$ . Then  $WF_h(u_h) \cap T^*X$  is the complement subset in  $T^*X$  of the biggest open subset  $\Omega$  such that  $u_h \sim 0$  on  $\Omega$ .

The definition is of course based upon the homogeneous wave front set introduced by Hörmander (see [58, sec.2.5]). It has a useful local characterization in terms of the semi-classical Fourier transform :

**Lemma 4.4.4 ([75, 24])** An admissible functional  $u_h$  microlocally vanishes at the point  $(x_o, \xi_o) \in T^*X$  (equivalently,  $(x_o, \xi_0) \notin WF_h(u_h)$ ) if and only if there exists a function  $\varphi \in C_0^{\infty}(X)$  with  $\varphi(x_o) \neq 0$  such that, in some local coordinates :

$$\mathcal{F}_h(\varphi u_h)(\xi) = O(h^\infty)$$

uniformly for  $\xi$  in a neighborhood of  $\xi_o$ .

Here  $\mathcal{F}_h$  denotes the "semi-classical Fourier transform" :

$$\mathcal{F}_h = \frac{1}{(2\pi h)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h}x.\xi} dx$$

(we will sometimes use the usual Fourier transform  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ ). Note that  $\mathcal{F}_h$  is a priori defined for tempered distributions, but the Fourier transform of a compactly supported distribution in  $\mathbb{R}^n$  can be thought as a continuous function (it is analytic). For the proof of this lemma, one constructs a compactly supported pseudodifferential operator with "rectangular support", that is with symbol of the form  $\chi(\xi)\varphi(x)$ .

Unfortunately, because of the lack of uniform estimates in the fibers one should not expect an analogue of theorem 2.5.3 of the previously cited article [58]. Indeed, if U is an open set of X, then  $WF_h(u_h) \cap T^*U = \emptyset$  does not imply that  $u_h$  is locally  $O(h^{\infty})$  on U. For instance, one easily sees from lemma 4.4.4 that  $u_h(x) = a(x)e^{ix/h^2}$  is microlocally zero on  $T^*\mathbb{R}^n$ , while obviously not locally  $O(h^{\infty})$ .

The solution found in [24] for functionals on  $\mathbb{R}^n$  is to extend the wave front set to a subset of the compactified cotangent bundle obtained by adding a point at infinity to each direction  $\xi$ . An admissible functional  $u_h$  is then said to be microlocally zero in the direction  $(x_0, \mathbb{R}^+\xi_0)$  if, for large  $\xi$  in a conic neighborhood of  $\xi_0$ , and for any cut-off function  $\varphi$ , the Fourier transform :

$$\mathcal{F}_h(\varphi u_h)(\xi)$$

is of order  $O(h^N/|\xi|^N)$  for all N > 0. Then the following statement is valid :

**Lemma 4.4.5** An admissible functional  $u_h$  is  $O(h^{\infty})$  uniformly for x near  $x_o$  if and only if there exists a function  $\varphi \in C_0^{\infty}(X)$  with  $\varphi(x_o) \neq 0$  such that :

$$\mathcal{F}_h(\varphi u_h)(\xi) = O(h^N / (1 + |\xi|)^N),$$

for all  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , for all  $N \in \mathbb{N}$ .

The condition expressed by this lemma is that there exists a neighborhood U of  $x_o$  such that  $u_h$  is microlocally zero in  $T^*U$  as well as in all directions of  $T^*U$ .

Similarly to lemma 4.4.4, we have for instance the following fact : let  $u_h$  be an admissible functional defined on  $\mathbb{R}^n$ , so that  $\mathcal{F}_h u_h$  makes sense. If  $\mathcal{F}_h u_h$  is a  $O(h^{\infty})$  function in a neighborhood of any  $\xi$  in an open set  $\Upsilon$ , then  $u_h$  is microlocally zero in the whole  $\mathbb{R}^n \times \Upsilon$ . This allows the following construction : let  $1 = \chi_1 + \cdots + \chi_k$  be a partition of unity subordinated to the open cover  $\bigcup_j \Upsilon_j$  in the  $\xi$ -space. Let U be an open subset of  $\mathbb{R}^n$  with compact closure. If  $v_{j,h}$ ,  $j = 1, \ldots, k$  are admissible functionals on  $U \times \Upsilon_j$  that microlocally coincide on non-empty intersections  $U \times \Upsilon_{j_1} \cap \cdots \cap \Upsilon_{j_l}$ , one can define an admissible functional  $u_h$  on  $U \times \bigcup_j \Upsilon_j$  by cutting off the  $v_{j,h}$ 's outside  $\overline{U}$  in  $\mathbb{R}^n$  and requiring :

$$\mathcal{F}_h u_h = \sum_{j=1}^k \chi_j \mathcal{F}_h v_j.$$

Then  $u_h$  microlocally coincides with each  $v_{j,h}$  on  $U \times \Upsilon_j$ . Indeed, from the microlocal equality of the  $v_{j,h}$ 's on non-empty intersections, and the compactness of their support, it follows from lemma 4.4.4 that the Fourier transforms  $\mathcal{F}_h v_{j,h}$  are  $C^{\infty}$  functions that coincide with each other up to  $O(h^{\infty})$  around each point of such non-empty intersections. Thus  $\mathcal{F}_h u_h$  also has that common value around these points, which yields the result.

Finally, if  $U(h) \in \Psi_0^m(\Omega_X, \Omega_Y, \chi)$ , then for any admissible  $u_h$  in  $\Omega_Y$ ,  $Uu_h$  is admissible in  $\Omega_X$ , and because of Egorov's theorem, U transports the wave front set by  $\chi$ .

# 4.4.5 Microlocal solutions

**Definition 4.4.8** Let  $\Omega$  be an open set in  $T^*X$ . An admissible functional  $u_h \in \mathcal{D}_h(\Omega)$  is called a microlocal solution on  $\Omega$  of a system  $(P_1(h), \ldots, P_k(h))$  of pseudo-differential operators if :

$$\forall j = 1, \dots, k, \qquad P_j u_h \sim 0 \ on \ \Omega_j$$

We allow here to choose a suitable set H where h is to vary. The set of all microlocal solutions of  $(P_1, \ldots, P_k)$  modulo microlocal equality will be viewed as a  $\overline{\mathbb{C}}_h$ -module. Because of microlocal inversion of elliptic operators, any such solution is "microlocalized" in  $\bigcap_j p_j^{-1}(0)$ , which means that  $WF_h(u_h)$  must lie in this set  $(p_j$  denotes the principal symbol of  $P_j$ ). If two solutions have different non-empty wave front sets, then they are independent. In case the  $p_j$ 's are

real-valued, the "propagation of singularities" theorem states that  $WF_h(u_h)$  is locally stable under the action of the hamiltonian flow of  $p_j$ .

As we will see later, global problems often have no solution in the previous sense. Suppose that the  $P_j$  depend continuously on an additional parameter Ein a *compact* topological space V (cf. end of section 4.4.1). Depending on the degeneracy of the  $p_j$ 's, it might be impossible to find a solution (in the previous sense) for some E, and depending on E, the appropriate sets  $H_E$  where h varies might be disjoint. Still, the whole theory being asymptotic, we need to control things when h tends to zero ! Therefore, we introduce the following :

**Definition 4.4.9** Let  $\Gamma$  be a subset of  $]0,1] \times V$ . Let H be the projection of  $\Gamma$  onto ]0,1]. We assume that 0 is an accumulation point of H. We say that a family  $(u_{(h,E)})_{(h,E)\in\Gamma}$  is admissible if definition 4.4.6 holds uniformly for  $(h, E) \in \Gamma$ .

Recall that E varies in a compact. Accordingly,  $u_{(h,E)}$  microlocally vanishes at point m if there is an elliptic pseudodifferential operator P(h) at m such that  $||Pu_{(h,E)}||_{L^2(U)} = O(h^{\infty})$  uniformly for  $(h, E) \in \Gamma$ . Thus we are still able to define a semi-classical wave-front set  $WF_h(u_{(h,E)})$ .

Now if  $u_{(h,E)}$  is admissible and  $P_j^E$  depend continuously on E, then  $P_j^E u_{(h,E)}$  is admissible, and we say that  $u_{(h,E)}$  is a microlocal solution of the system  $(P_1^E, \ldots, P_k^E)$  on  $\Omega$  if  $P_j^E u_{(h,E)} \sim 0$  on  $\Omega$  according to that definition. Then we have :

**Proposition 4.4.6** Let  $u_{(h,E)}$  be a microlocal solution on  $\Omega$  to the equation  $P^E u_{(h,E)} \sim 0$ . The following inclusion holds :

$$WF_h(u_{(h,E)}) \subset \{(x,\xi) \in T^*X, \exists E_o \in V_o, p_{E_o}(x,\xi) = 0\},\$$

where  $V_o$  is the set of  $E_o \in V$  such that  $(0, E_o)$  is an accumulation point of  $\Gamma$ .  $p_E$  is the principal symbol of  $P^E(h)$ .

**Proof.** Let  $(x,\xi) \in T^*X$  such that for any  $E_o \in V_o$ , the principal symbol  $p_{E_o}$  is non zero at  $(x,\xi)$ . Since  $V_o$  is compact and  $p_E$  is continuous in E, then there is an open neighborhood  $\mathcal{V}$  of  $V_o$  and a constant c > 0 such that for  $E \in \mathcal{V}$ ,  $|p_E| > c$ . Then there is an open neighborhood  $\Omega$  of  $(x,\xi)$  on which that remains valid. The complement  $\mathcal{V}^c$  being a compact set of non-accumulation points, we can pick up a  $h_o$  such that  $([0, h_o] \times \mathcal{V}^c) \cap \Gamma$  is empty. From now on, we will therefore restrict  $\Gamma$  to  $[0, h_o] \times \mathcal{V}$ . Because of the uniform ellipticity of  $P^E$  on  $\Omega$ , for (h, E) in that new  $\Gamma$ , we can construct a pseudodifferential operator  $Q^E(h)$  depending continuously on  $E \in \mathcal{V}$  such that  $Q^E P^E \sim I$  on  $\Omega$ . It is not difficult to see that if an admissible  $v_{(h,E)}$  is microlocally zero at a point m, then for any pseudodifferential operator  $Q^E(h)$  depending continuously on E in some compact, then  $Q^E v_{(h,E)}$  is still microlocally zero. Back in our problem, we see that :

$$u_{(h,E)} \sim 0$$
 at  $(x,\xi)$ ,

which is what we needed to prove.

# 4.4.6 Oscillatory integrals

The WKB ansatz for solving Schrödinger-type equations consists of restricting the scope of solutions to a subspace of admissible functionals : the space of oscillatory integrals, that we wish to describe now. These functions have a long history, particularly in Quantum mechanics, and it is well known since the treatise of Maslov [68], made more rigorous and expounded by Hörmander and Duistermaat (see in particular [36]), that they are particularly fit to locally solve generic microlocal pseudo-differential equations. In fact, as we shall see later, in some cases all solutions are microlocally equal to oscillatory integrals.

We recall here the definitions of [36], with some precisions.

We are given a compact immersed lagrangean manifold  $\Lambda \in T^*X$ , endowed with a smooth half-density  $\rho$ . Suppose that is fixed a covering of  $\Lambda$  with simply connected embedded open subsets  $\Lambda_{\varphi_k}$  described by reduced phase functions  $\varphi_k(x,\theta)$  ("reduced" means that the number of additional oscillatory variables  $\theta$ is exactly the maximum dimension of the kernel of  $d\pi$ , where  $\pi$  is the projection  $\Lambda_{\varphi} \to X$ . This dimension is known to be the minimum dimension of  $\theta$  variables needed for a phase function defining  $\Lambda - [58$ , theo 3.1.4] or [36, 1.3.6]).  $\varphi$  gives rise to a function on  $\Lambda_{\varphi}$  – that we still denote by  $\varphi$  – whose exterior differential is the Liouville 1-form  $\alpha_0$ .

An oscillatory symbol on  $\Lambda_{\varphi}$  is a half-density  $\sigma(h)$  on  $\Lambda_{\varphi}$  of the form :

$$\sigma(\lambda;h) = e^{ic(h) + \frac{i}{h}\varphi(\lambda)} a(\lambda;h)\rho(\lambda),$$

with a(h) a classical symbol in  $S^*(\Lambda_{\varphi})$ , and  $c(h) \in \mathbb{R}$ . We will say that  $\sigma$  is classical if c(h) is a classical symbol of order -1. Oscillatory symbols are preserved by multiplication by elements  $C(h) \in \mathbb{C}_h$ , such that :

$$C(h) \sim e^{ic'(h)} \sum_{k=m}^{\infty} C_k h^k, \qquad c'(h) \in \mathbb{R},$$
(4.5)

for some  $m \in \mathbb{Z}$ . Let  $\overline{C}(h)$  be the class of C(h) in  $\overline{\mathbb{C}}_h$ . The set of non zero  $\overline{C}(h)$ 's is a subgroup of  $\overline{\mathbb{C}}_h^*$  (the group of units of the ring  $\overline{\mathbb{C}}_h$ ), and will be denoted by  $\overline{\mathbb{C}}_h^{*\text{osc}}$ , or  $\overline{\mathbb{C}}_h^{*\text{osc,cl}}$  if c'(h) is assumed to be classical and of order -1.

If a(h) is of order 0 and elliptic on  $\Lambda_{\varphi}$  (as we will generally assume), we will prefer the notation :

$$\sigma(\lambda; h) = e^{ic(h) + i\Phi(\lambda; h)}\rho(\lambda), \tag{4.6}$$

where  $c(h) \in \mathbb{R}$ , and  $\Phi(h)$  is a classical symbol on  $\Lambda_{\varphi}$  of order -1, whose principal symbol  $\frac{\Phi_{-1}}{h}$  satisfies :

$$d\Phi_{-1} = \alpha_0.$$

As usual, we denote by  $j_{\varphi}$  the local diffeomorphism from  $C_{\varphi}$  to  $\Lambda_{\varphi}$  given by  $(x,\theta) \mapsto (x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\theta))$ , where  $C_{\varphi} = \{(x,\theta) \in X \times \mathbb{R}^N, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(x,\theta) = 0\}.$ 

An oscillatory integral on  $\Lambda_{\varphi}$  is a half-density on X of the form :

$$u_{h}(x) = \frac{e^{ic(h)}}{(2i\pi h)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{N}} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(x,\theta)} b(x,\theta;h) d\theta |dx|^{\frac{1}{2}},$$
(4.7)

where  $c(h) \in \mathbb{R}$ , and b(h) is a classical symbol in  $S_0^*(X \times \mathbb{R}^N)$ . Then

$$\sigma = (j_{\varphi})^{-1^*} (e^{ic + \frac{i}{h}\varphi} b_{\upharpoonright C_{\varphi}})$$

is an oscillating symbol.  $u_h$  is an admissible functional, and because of the stationary phase formula, is uniquely defined modulo microlocal equality by the asymptotic expansion of b(h) on any neighborhood of  $C_{\varphi}$ .  $\sigma$  is thus well defined by  $u_h$  modulo microlocal equality.

**Definition 4.4.10** An admissible functional  $u_h$  is a lagrangean distribution on  $\Lambda$  if there is a cover  $\Lambda = \bigcup \Lambda_{\varphi}$  such that  $u_h$  is microlocally equal to an oscillatory integral on each  $\Lambda_{\varphi}$ .

On each  $\Lambda_{\varphi}$ , such lagrangean distributions have a symbol  $\sigma(h)$  defined modulo  $O(h^{\infty})$ , but in general  $(N \neq 0)$  the morphism  $u_h \mapsto \sigma(h)$  is not injective; however, one can prove that it is an isomorphism at the *principal* level (if  $u_h$  can be written with b(h) of order m such that the  $h^m$  part of  $\sigma(h)$  vanishes on a neighborhood of  $(x_o, \xi_o) \in \Lambda_{\varphi}$ , then near  $j_{\varphi}^{-1}(x_o, \xi_o)$ ,  $u_h$  can be rewritten with a b(h)' of order m + 1).

On the other way round, the symbol map is surjective, and one can construct right inverses ("Maslov canonical operators") in the following way : let  $\sigma(h)$  be a oscillatory symbol near  $(x_o, \xi_o) \in \Lambda_{\varphi}$ . Then it defines the function b(h) on a neighborhood of  $b_o = j_{\varphi}^{-1}(x_o, \xi_o)$  in  $C_{\varphi}$ . If N > 0,  $C_{\varphi}$  is a proper submanifold of  $X \times \mathbb{R}^N$ . Let  $B_o$  be a sub-bundle of  $T(X \times \mathbb{R}^N)$  supplementary to  $TC_{\varphi}$  near  $b_o$ . One defines the germs of b on  $C_{\varphi}$  to be zero along  $B_o$ , and smoothly extends bto  $X \times \mathbb{R}^N$  accordingly. Then b has the same h-order as  $\sigma(h)$  and the oscillatory integral  $u_h = Op(\sigma)$  so constructed has symbol  $\sigma(h) \pmod{O(h^{\infty})}$ .

Of course, since we have not made any mention to the Keller-Maslov bundle yet, the symbol of a lagrangean distribution depends on the phase function  $\varphi$ considered. The result of Hörmander-Maslov is the following : if  $u_h$  and  $v_h$ are zeroth order oscillatory integrals on  $\Lambda_{\varphi}$  and  $\Lambda_{\psi}$  respectively that are equal modulo O(h) at a point  $(x,\xi) \in \Lambda_{\varphi} \cap \Lambda_{\psi}$ , then there is an integer  $\mu$  such that, at the principal level,  $\sigma_{u_h} \sim e^{i\mu\frac{\pi}{2}}\sigma_{v_h} + O(h)$  at  $(x,\xi)$ . Because of the normalization in (4.7),  $\mu = \mu_{\psi} - \mu_{\varphi}$ , where, for a phase function g,  $2\mu_g$  is the signature of the  $\theta$ -Hessian of g at  $(x,\xi)$  minus  $N_g$ .

With these transition functions, one can globally define the principal symbol of a lagrangean distribution as a section of the Keller-Maslov bundle. In the sequel, Maslov indices will always be prompted very clearly, so we don't insist any further on that point.

Note that if  $u_h$  serves to construct a Fourier integral operator U(h) as mentioned in section 4.4.3, then the principal symbol of  $u_h$  is invariantly defined by U. If the symbol is elliptic and we write it as (4.6), we will refer to  $c(h) + \Phi(\lambda; h)$ as the *total phase* of  $u_h$ , and the *principal phase* its class modulo O(h).

Finally, we admit the dependence of a lagrangean distribution on an additional parameter E, provided the involved estimates are uniform in the sense of definition 4.4.9. It is the case for instance if the symbol b depends continuously on E.

# 4.5 Non-singular quantization conditions

Let  $P_1(h), \ldots, P_n(h)$  be a semi-classical integrable system, and denote by  $\Lambda_0$ the principal lagrangean manifold associated to it.  $\Lambda_0$  may be critical, but in this section we shall work on a submanifold  $\Lambda \subset \Lambda_0$  consisting only of nonsingular points of the momentum mapping  $(p_1, \ldots, p_n)$ . Moreover, we shall always assume that  $\overline{\Lambda}$  is compact.

With these data, we express a necessary and sufficient condition for the existence of microlocal solutions of the system on  $\Lambda$  (proposition 4.5.6). Thanks to the WKB construction, we prove that this condition involves, at least at the principal level, geometrical characteristics of the system, namely the Liouville 1-form  $\alpha_0$  and the sub-principal form  $\kappa$  (theorem 4.5.8).

As an application, we recover the well-known Maslov-Bohr-Sommerfeld quantization conditions for  $O(h^2)$  solutions in the case where  $\Lambda = \Lambda_0$  is a whole non-singular Liouville torus.

When the system depends smoothly on an *n*-dimensional parameter E in a suitable sense, the above results are seen to be uniform on E, which will allow us to apply the quantization condition to the study of semi-classical spectra. In the case of a non-singular Liouville torus, the study of the spectrum was also completely carried out, with a different approach, in [17].

### 4.5.1 Dimension of the space of microlocal solutions

The following result is a generalization of lemma 18 of [27].

**Proposition 4.5.1** Let  $x \in \Lambda$  be a non-singular point of  $\Lambda_0$ . The set of microlocal solutions of the system  $P_i u \sim 0$  on a neighborhood of x, modulo microlocal equality, is a free  $\overline{\mathbb{C}}_h$ -module of rank 1, generated by a classical lagrangian distribution on  $\Lambda$ .

If  $x \notin \Lambda_0$ , the  $\overline{\mathbb{C}}_h$ -module of solutions of this system has rank 0.

**Remark 4.5.1.** Rigorously speaking, the title of this section is not appropriate, since the set of microlocal solutions is not a vector space. However, in view of remark 4.4.3, and of the fact – mentionned in paragraph 4.4.5 – that a microlocal solution should always come with the set H of admissible values of h, this formulation is not far from the truth : let  $u_h$  be a non-trivial microlocal solution on a neighborhood of  $x \in \Lambda$ , and let  $1_x$  denote a generator of the

module of solutions given by proposition 4.5.1. Then there is a  $C(h) \in \mathbb{C}_h$  such that  $u_h \sim C(h) \mathbb{1}_x$ , which implies that  $C(h) \neq O(h^{\infty})$ . Therefore, up to the replacement of the set H of admissible h's by a proper subset  $H', \bar{C}(h)$  becomes invertible in  $\bar{\mathbb{C}}_h$ , and  $u_h$  becomes a new generator of the  $\bar{\mathbb{C}}_h$ -module of solutions. Moreover, if in addition  $u_h$  satisfies the natural hypothesis

$$||P(h)u_h||_{L^2} > const.h^{-m}, \qquad m \in \mathbb{Z}, const > 0,$$

for a compactly supported  $P(h) \in \Psi_0^*$ , then the same result holds without changing the set H. Having this in mind, we believe that saying "the space of microlocal solutions is of dimension 1" gives a clear enough idea of the result.  $\triangle$ 

**Proof.** The second point comes from the fact that near x, the system is elliptic, hence microlocally invertible (see proposition 4.4.6).

The first one will be proved with the help of the following microlocal normal form, which is standard :

**Lemma 4.5.2** There exists a classical elliptic Fourier integral operator U(h) associated to a Darboux-Carathéodory coordinate chart  $(x, \xi)$  such that

$$U^{-1}P_jU \sim \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

on a neighborhood of x. If every  $P_j$  is formally self-adjoint, then U can be chosen to be unitary (mod  $O(h^{\infty})$ ).

Accordingly transformed, the system always admits the constant solutions. It remains now to prove that these are the only ones, that is, that any solution  $u_h$  of  $\frac{\partial}{\partial x_j}u \sim 0$  is microlocally constant. Let  $u_h$  be such a solution. We can always assume that it is compactly supported. We want now to "cut-off in the frequencies", which we do in the following way :

Let  $v_h$  an admissible functional defined by  $\mathcal{F}_h v_h = \chi \mathcal{F}_h u_h$ , where the cutoff function  $\chi$  is  $C_0^{\infty}$  and has value 1 on a neighborhood of 0. Then  $u_h$  and  $v_h$  are microlocally equal on a neighborhood of 0. Moreover,  $v_h$  is a *local* solution (modulo  $O(h^{\infty})$ ) of the system near 0. This comes from the fact that  $\mathcal{F}_h(\frac{h}{i}\frac{\partial v_h}{\partial x_i}) = \xi_j \mathcal{F}_h v_h$  satisfies the hypothesis of lemma 4.4.5.

We have thus reduced the problem to a system of the form :

$$d_h v_h = w_h = O(h^\infty)$$

on a neighborhood of 0 (here  $d_h$  denotes the exterior differential operator  $d_h = (\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_n})$ ). The solutions of this system are necessarily of the form

$$cste_h + \frac{i}{h} \int_0^1 w_h(tx).xdt.$$

The second term in the sum is  $O(h^{\infty})$ , as  $w_h$  was. Hence it is microlocally zero, which gives the result :  $cste_h \in \overline{\mathbb{C}}_h$  and is therefore a  $\overline{\mathbb{C}}_h$  multiple of the classical lagrangian distribution corresponding to the constant 1.

Let  $\varphi_t = \varphi_1(t_1) \circ \cdots \circ \varphi_n(t_n)$  be the classical flow associated to the momentum map of the system. By transport of singularities, we obtain the following corollary :

**Corollary 4.5.3** If the action of  $\varphi_t$  on  $\Lambda$  is transitive, then the module of microlocal solutions of the system  $P_i u \sim 0$  on  $\Lambda$  has rank at most 1.

If we restrict to a simply connected open subset  $\Omega$  of  $\Lambda_0$ , and if all trajectories of the flow remain open (which is automatic if  $\Omega$  contains no singular point), then local microlocal solutions can be glued together to obtain a non-trivial solution of the system on  $\Omega$ . This occurs for instance if  $\Omega$  is obtained by propagating a non-singular point of  $\Lambda_0$  by the flow during a short time (cf. theorem 1.4.1 of [36]).

As soon as we have closed trajectories, we get obstructions, which we describe in the following paragraph. Later on (paragraph (4.5.4)), we will show how to interpret these obstructions thanks to the WKB method, and get the so-called "Bohr-Sommerfeld quantization conditions".

#### 4.5.2 The sheaf of microlocal solutions

For any open subset  $\Omega \subset \Lambda$ , let  $\mathfrak{L}_h(\Omega)$  be the  $\mathbb{C}_h$ -module of microlocal solutions of the system on  $\Omega$ . The set of all these  $\mathfrak{L}_h(\Omega)$  for the various  $\Omega$ , together with the natural restriction mappings, defines a *presheaf* over  $\Lambda$ . Because of the existence of pseudo-differential partition of unity, microlocal solutions can be glued together, which implies that this presheaf is complete, and thus can be naturally identified with its associated sheaf  $(\mathfrak{L}, \Lambda)$  (see for instance the book [85, p.168]).

Let  $(\Omega_{\alpha})$  be an open cover of  $\Lambda$ , where every  $\Omega_{\alpha}$  is chosen small enough so that the system admits a non-trivial microlocal solution  $u_{h}^{\alpha}$  on it. The cochain  $(u_{h}^{\alpha})$  defines a global microlocal solution on  $\Lambda$  if and only if the restrictions  $(u_{h}^{\alpha})_{|\Omega_{\alpha}\cap\Omega_{\beta}|}$  and  $(u_{h}^{\beta})_{|\Omega_{\alpha}\cap\Omega_{\beta}|}$  agree, which means that  $(u_{h}^{\alpha})$  is a 0-cocycle. In other words, microlocal solutions on  $\Lambda$  are just global sections of the sheaf  $(\mathfrak{L}, \Lambda)$ .

In order to detect the existence of a non-trivial global section, let us make the following construction. Invoking proposition 4.5.1, we assume that for each  $\alpha$ ,  $u_h^{\alpha}$  is a basis of  $\mathfrak{L}_h(\Omega_{\alpha})$ . We have then the following local trivialization of  $(\mathfrak{L}, \Lambda)$ :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{C}}_h & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{L}_h(\Omega_\alpha) \\ c(h) & \mapsto & c(h)u_h^\alpha. \end{array}$$

We shall say that a microlocal solution on  $\Lambda$  is "basic" if, for each  $\alpha$ , its restriction to  $\Omega_{\alpha}$  is a basis of  $\mathfrak{L}_h(\Omega_{\alpha})$ . It is equivalent to requiring that this restriction is represented in the above trivialization by a  $c(h) \in \overline{\mathbb{C}}_h^*$ .

Suppose the sheaf  $(\mathfrak{L}, \Lambda)$  has a non-trivial global section  $u_h$ . Then for any  $\alpha$ , remark 4.5.1 implies that, up to the replacement of H by a proper subset H', there is an invertible  $\overline{C}(h) \in \overline{\mathbb{C}}_h$  such that  $C(h)u_h$  is a basic solution on  $\Omega_{\alpha}$ .

Since the transition elements between  $u_h^{\alpha}$  and  $u_h^{\beta}$  are in  $\overline{\mathbb{C}}_h^*$ , we see that  $C(h)u_h$  is globally a basic solution on  $\bigcup \Omega_{\alpha}$ . In this way, our problem is reduced to the existence of *basic* solutions.

The set of germs of basic solutions at a point  $x \in \Lambda$  is a group  $\hat{\mathcal{L}}(x)$  isomorphic to  $\overline{\mathbb{C}}_h^*$ . The disjoint union  $\dot{\mathcal{L}}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{x \in \Omega} \dot{\mathcal{L}}(x)$  is then a principal bundle that admits the following trivialization mappings :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\Omega_{\alpha}} : & \Omega_{\alpha} \times \bar{\mathbb{C}}_{h}^{*} \xrightarrow{\sim} \dot{\mathcal{L}}_{h}(\Omega_{\alpha}) \\
& (x, c(h)) & \mapsto & c(h)u_{h}^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

This bundle has a natural flat connection, whose parallel sections are those that are locally constant in the above charts (from the infinitesimal viewpoint, its horizontal distribution is defined to be the image of the standard horizontal spaces of  $\Omega_{\alpha} \times \bar{\mathbb{C}}_{h}^{*}$  by the trivialization maps  $\varphi_{\Omega_{\alpha}}$ ). It is well defined because on intersections  $\Omega_{\alpha} \cap \Omega_{\beta}$ , such trivializations differ by a constant, due to proposition 4.5.1. By the same argument, it is also independent of the set of microlocal solutions  $u_{h}^{\alpha}$  chosen to define the trivializations. The interest of this connection is stressed by the following lemma :

**Lemma 4.5.4** There is a natural identification of the space of basic microlocal solutions of the system on an open subset  $\Omega \subset \Lambda$  with parallel sections of  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Omega)$ .

**Proof.** Let us first consider the case  $\Omega = \Omega_{\alpha}$ . The general case will follow by a microlocal partition of unity. Now, using the trivialization  $\varphi_{\Omega_{\alpha}}$ , a section of  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Omega_{\alpha})$  takes the form :

$$\sigma_h(x) = c(x;h)u_h^\alpha.$$

This section is parallel if and only if c(x;h) = c(h) is a constant (modulo microlocal equality, of course), so, by proposition 4.5.1, if and only if  $\sigma_h(x) = \sigma_h$  is a microlocal solution on  $\Omega_{\alpha}$ . Since  $c(h) \in \overline{\mathbb{C}}_h^*$ , this solution is automatically a basic one.

Now assume  $\Omega$  is any open subset of  $\Lambda$ . One sense is obvious : if  $u_h$  is a basic solution on  $\Omega$ , then it can be used to trivialize the principal bundle  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Omega)$  as in (4.8). Now, since the definition of the connection is independent of the chosen solutions, the constant section  $\sigma_h(x) = u_h$  is a parallel section.

On the other way round, suppose  $\sigma_h(x)$  is a parallel section of  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Omega)$ . Then we proved that its restrictions to each  $\Omega_{\alpha}$  are basic microlocal solutions  $v_h^{\alpha}$  on  $\Omega_{\alpha}$ . Let  $P^{\alpha}(h)$  be a pseudo-differential partition of unity on  $\Omega$  subordinated to the cover  $\Omega_{\alpha}$  (it means that the Weyl symbols form a  $C_0^{\infty}$  partition of unity of  $\Omega$ ). Then each  $P^{\alpha}v_h^{\alpha}$  is an admissible functional on a neighborhood of  $\Omega$ , and the sum

$$v_h = \sum_{\alpha} P^{\alpha} v_h^{\alpha}$$

is microlocally equal to  $v_h^{\alpha}$  (and hence to  $\sigma_h$ ) on each  $\Omega_{\alpha}$ . Therefore,  $v_h$  is a microlocal solution on  $\Omega$ , whose associated parallel section is  $\sigma_h$ . This terminates the proof of the lemma.

Thus, the obstruction to the existence of a microlocal solution on  $\Lambda$  only lies in the *holonomy* of the connection, which, in this case, describes the monodromy of the solution. This holonomy can be represented by the cohomology class of a Čech 1-cocycle on  $\Lambda$  with values in  $\overline{\mathbb{C}}_{b}^{*}$ .

The next step is to see that the structure group of  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Lambda)$  can be reduced to the group  $\bar{\mathbb{C}}_h^{*\text{osc,cl}}$  (defined by equation (4.5)). Indeed, by proposition 4.5.1, the basic solutions  $u_h^{\alpha}$  of (4.8) can always be chosen to be classical lagrangean distributions, and the transition elements are then in  $\bar{\mathbb{C}}_h^{*\text{osc,cl}}$ . Let us call a microlocal solution a "classical" one if for each  $\alpha$ , its restriction on  $\Omega_{\alpha}$  is given via the trivialization (4.8) by a  $c(h) \in \bar{\mathbb{C}}_h^{*\text{osc,cl}}$ . Classical solutions are then identified with flat sections of  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Lambda)$  as a  $\bar{\mathbb{C}}_h^{*\text{osc,cl}}$ -bundle. Note that proposition 4.5.1 implies that the existence of a classical solution on  $\Lambda$  is equivalent to the existence of a basic one.

Summarizing this discussion, we obtain :

**Proposition 4.5.5** There exists a classical microlocal solution of the system on  $\Lambda$  if and only if the holonomy cocycle of the  $\overline{\mathbb{C}}_{h}^{\mathrm{*osc,cl}}$ -principal bundle  $\dot{\mathcal{L}}_{h}(\Lambda)$  with its natural flat connection has microlocally trivial cohomology.

From now on, our principal task will be to explicit that holonomy. Besides the above definition, we can give a direct and more concrete description of it in terms of Čech cohomology, that shall be more efficient for our further analysis.

We still let  $\Omega_{\alpha}$  be a (finite) cover of  $\Lambda$  by simply connected open subsets such that each  $\Omega_{\alpha}$  admits a neighborhood in M on which proposition 4.5.1 applies. We thus get a family  $u_h^{\alpha}$  of classical microlocal solutions of the system on  $\Omega_{\alpha}$ . Moreover, on non-empty intersections  $\Omega_{\alpha} \cap \Omega_{\beta}$ , the same proposition affirms the existence of unique constants  $c^{\beta\alpha}(h) \in \mathbb{C}_h^{*\text{osc,cl}}$  such that :

$$u_h^\beta \sim c^{\beta\alpha} u_h^\alpha \text{ on } \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta.$$

The  $c^{\beta\alpha}$ 's satisfy the cocycle condition :

$$c^{\beta\alpha} \sim c^{\beta\gamma} c^{\gamma\alpha}$$

on every non-empty intersection  $\Omega_{\alpha} \cap \Omega_{\beta} \cap \Omega_{\gamma}$ . Furthermore, another choice of solutions  $u'_{h}^{\alpha}$  would give rise to constants  $c'^{\beta\alpha}$  differing by a coboundary  $d^{\alpha}(h)$ :

$$c'^{\beta\alpha} \sim \frac{d^{\beta}}{d^{\alpha}} c^{\beta\alpha}.$$

This Čech cocycle  $c^{\beta\alpha}$  is exactly the holonomy form of the connection introduced above. The matching conditions are then the following :

"there exists a classical microlocal solution on  $\Lambda$  if and only if  $c^{\beta\alpha}(h)$  is a coboundary (modulo  $O(h^{\infty})$ )."

It is, of course, a simple re-formulation of proposition 4.5.5. In the sequel, instead of the complex-valued Čech cocycle [c(h)], we will rather deal with the two real-valued cocycles obtained via the exponential representation :

$$c^{\beta\alpha} = e^{\rho^{\beta\alpha}} e^{i\lambda^{\beta\alpha}},$$

in which  $\rho^{\beta\alpha}(h) \in \mathbb{R}$  and  $\lambda^{\beta\alpha}(h) \in \mathbb{T}$ . We denote by  $\rho(h)$  and  $\lambda(h)$  the corresponding Čech cocycles.

**Proposition 4.5.6** Suppose that every  $P_j$  is formally self-adjoint. Then  $[\rho(h)]$  is microlocally trivial, and  $[\lambda(h)]$  admits an asymptotic expansion of the form :

$$[\lambda(h)] \sim \sum_{k \ge -1} [\lambda_k] h^k.$$

**Proof.** We cover  $\Lambda$  by open subsets  $\Omega_{\alpha}$  on which the normal form of lemma 4.5.2 applies. This gives rise to a family of microlocally unitary Fourier integral operators  $U^{\alpha}(h)$  on  $\Omega_{\alpha}$ . An associated set of solutions is given by  $u_{h}^{\alpha} = U^{\alpha} \mathbf{1}_{\alpha}$ , where  $\mathbf{1}_{\alpha}$  denotes an admissible functional microlocally equal to the constant 1 on  $\Omega_{\alpha}$ . Suppose  $\Omega_{\alpha} \cap \Omega_{\beta}$  is a non-empty intersection and let x be an element of it. Finally, let  $\mathbf{1}_{x}$  denote an admissible functional microlocally equal to 1 on a neighborhood of x. On x, we have  $u_{h}^{\alpha} \sim U^{\alpha} \mathbf{1}_{x}$  and  $u_{h}^{\beta} \sim U^{\beta} \mathbf{1}_{x}$ . Therefore, the constant  $c^{\beta\alpha}(h)$  is given by :

$$c^{\beta\alpha} 1_x \sim (U^{\alpha})^{-1} U^{\beta} 1_x.$$

The unitarity of the Fourier integral operators implies that  $|c^{\beta\alpha}| \sim 1$ , which gives the first statement of the proposition.

Since  $c^{\beta\alpha} \in \overline{\mathbb{C}}_h^{*\mathrm{osc,cl}}$ , it can be written

$$c^{\beta\alpha} \sim e^{ic'(h)} \sum_{k=m}^{\infty} a_k h^k,$$

where c'(h) is classical of order -1. The unitarity of  $c^{\beta\alpha}$  implies that m = 0 and  $a_k = 0$  for k > 1. Therefore  $c^{\beta\alpha} \sim e^{ic'(h) + i \arg a_0}$ , which gives the last statement of the proposition.

**Remark 4.5.2.** The description of the cocycle  $c^{\beta\alpha}(h)$  involves no regularity on  $\Lambda$ . And indeed, the notion of a flat principal bundle with holonomy is welldefined on any topological manifold. This will enable us, in section 4.6.7, to apply that description on a singular lagrangean. For the moment however, the  $C^{\infty}$  structure of  $\Lambda$  makes it possible to apply the De Rham isomorphism and get a smooth connection 1-form  $\lambda(h)$  on  $\Lambda$ . In the next sections, precisely, we show how the 1-forms  $\alpha_0$  and  $\kappa$  enter the picture.  $\Delta$ 

# 4.5.3 WKB method

Although this might not seem obvious, propositions 4.5.5 and 4.5.6 are essentially related to the celebrated WKB construction.

The WKB method for solving pseudo-differential equations consists in looking for a special kind of approximate solutions, called oscillatory integrals (see section 4.4.6). The use of semi-classical oscillatory integral in mathematics was initiated by Maslov, and pursued by different authors including Arnold, Hörmander and Duistermaat. The result is that, provided we are given an invariant half-density on  $\Lambda$  (this will come from the Liouville measure), we can always construct such solutions in a neighborhood of a non-singular point of  $\Lambda_0$ . According to proposition 4.5.1, such a solution has to be the only one – up to multiplicative constant. This means that we can freely use the WKB construction to look for general properties of our microlocal integrable systems. This is the goal of the following paragraph.

Note that we previously constructed microlocal solutions via another method, namely the use of a normal form. The link with oscillatory integrals lies in the use of a Fourier integral operator; more precisely, with the notations of lemma 4.5.2, the admissible functional U1 is a lagrangean distribution that is a microlocal solution of the system on a neighborhood of x (1 denotes a functional microlocally equal to the constant 1 on a neighborhood of x).

The derivation of the transport equations in the WKB method for completely integrable systems is fairly standard now (see for instance [21]), and our aim here is only to briefly recall the idea. Of particular importance is the entrance of the sub-principal form  $\kappa$  into the picture.

Let  $u_h$  be a lagrangean distribution on  $\Lambda_0$  of order 0. To ensure that it is not trivial, we assume that it is elliptic at a point  $(x_0, \xi_0) \in \Lambda_0$ , so that we use the notation (4.6) for the symbol  $\sigma(h)$  (we assume that we work on a fixed  $\Lambda_{\varphi}$ ). The viewpoint here is to find conditions on  $\sigma$  in order that  $u_h$  be a microlocal solution of the completely integrable system at  $(x_0, \xi_0)$ .

First of all, if one looks for a solution up to O(h) terms, one finds the condition that  $\Phi_{-1}$  is indeed a phase function for  $\Lambda_{\varphi}$ , i.e. : on  $\Lambda_{\varphi}$ ,

$$\frac{d\Phi_{-1}}{h} = \frac{\alpha_0}{h}.$$

Note that this first condition only involves the principal symbols of the  $P_i$ 's.

Keeping  $\Phi_{-1}$  fixed, one can look now for a solution up to  $O(h^2)$ . Since we suppose that the sub-principal symbols are real (which occurs for instance if the  $P_j$ 's are formally self-adjoint), then this raises two necessary and sufficient conditions : a) the half-density  $\rho$  must be *invariant* with respect to the hamiltonian action of the system; b) on  $\Lambda_{\varphi}$ , one must have

$$d\Phi_0 = \kappa,$$

where  $\kappa$  is the sub-principal form of the system. Because of condition a), we can assume that  $\rho$  is the canonical Liouville half-density on  $\Lambda_0$ . Condition b) implies that  $\kappa$  must be closed, which is already given by the fact that the  $P_j$ 's commute with each other up to the order  $O(h^2)$ . Finally, note that if the sub-principal symbols are complex-valued, the conditions are still sufficient, but not necessary.

The previous step generalizes by induction to provide solutions up to any order. However, notice that the two conditions obtained above depend only on the principal symbol of  $u_h$  and on some closed 1-forms uniquely defined by the system. The next conditions involving higher order terms of the symbol won't of course be invariantly defined anymore. Still, there is a way to keep track of the total symbol of  $u_h$ , and this is to fix a "Canonical operator" (see section 4.4.6)  $u_h = Op(\sigma(h))$ , as stated in the following proposition :

**Proposition 4.5.7** Let  $\Lambda_{\varphi}$  be a neighborhood of  $(x_0, \xi_0)$  in  $\Lambda_0$  described by a phase function  $\varphi$ . Let Op be a Canonical operator on  $\Lambda_{\varphi}$ . There exists closed real-valued 1-forms  $\kappa_k$ ,  $k = -1, 0, 1, \ldots, \infty$  on  $\Lambda_0$  such that :

The oscillatory integral  $u_h = Op(e^{i\Phi(\lambda;h)}\rho(\lambda))$  is a microlocal solution of the system up to the order  $O(h^N)$  on  $\Lambda_{\varphi}$  if and only if the  $\Phi_k$ 's,  $k = -1, \ldots, N-2$  satisfy :

$$d\Phi_k = \kappa_k.$$

 $\kappa_{-1}$  is the Liouville form  $\alpha_0$  restricted to  $\Lambda_0$ , and  $\kappa_0$  is the sub-principal form  $\kappa$ . For k > 0,  $\kappa_k$  depends on the Op-quantization.

A similar result holds if the  $P_j$ 's depend continuously on a parameter E. Note that in [21, p.38] Y.Colin de Verdière included the dependence on a parameter directly in the definition of the oscillatory symbols.

# 4.5.4 The regular quantization conditions

**Theorem 4.5.8** We still assume that the  $P_j$ 's are formally self-adjoint, and that  $\Lambda$  is a regular open subset of  $\Lambda_0$ .

Let  $[\lambda(h)] \in H^1(\Lambda, \mathbb{T})$  be, as in proposition 4.5.6, the holonomy phase of the microlocal bundle  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Lambda)$ . There exists a non-trivial microlocal solution of the system on  $\Lambda$  if and only if

$$[\lambda(h)] \in H^1(\Lambda, 2\pi\mathbb{Z}) + O(h^{\infty}),$$

and any other solution is then a multiple of it. Moreover,  $[\lambda]$  admits the following expansion :

$$[\lambda(h)] \sim [\mu] \frac{\pi}{2} + \sum_{k=-1}^{\infty} [\lambda_k] h^k,$$

where  $\mu$  is the Maslov cocycle,  $\lambda_{-1}$  is the restriction of Liouville 1-form  $\alpha_0$  on  $\Lambda$ , and  $\lambda_0 = \kappa_{\uparrow\Lambda}$  is the sub-principal form of the system.

**Proof**. The first points are direct consequences of propositions 4.5.5, 4.5.6 and 4.5.1. It remains to prove the statement about the principal terms of the asymptotic expansion of  $[\lambda]$ . We cover  $\Lambda$  by simply connected open subsets  $\Omega_{\alpha}$ such that each  $\Omega_{\alpha}$  admits a representation by a non degenerate phase function  $\varphi_{\alpha}$ . The most immediate consequence of proposition 4.5.7 is that microlocal solutions as lagrangean distributions always exist on  $\Omega_{\alpha}$ ; Let us denote by  $u_{h}^{\alpha}$ such a set of solutions, and by  $\Phi^{\alpha}(h)$  their principal phases. Finally, we let  $\mu^{\alpha\beta}$ be the (integral) value of Maslov's cocycle associated with that cover. The equation

$$u_h^\beta \sim c^{\beta\alpha}(h) u_h^\alpha$$
 on  $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ 

implies that  $\arg c^{\beta\alpha}$  is, mod O(h), the difference of the principal phases of  $u_{\psi}$  and  $u_{\varphi}$ , plus the value of the corresponding Maslov cocycle. That is,

$$\arg c^{\beta\alpha}(h) = \Phi^{\alpha}(h) - \Phi^{\beta}(h) + \mu^{\alpha\beta}\frac{\pi}{2} + O(h).$$

Because of proposition 4.5.7,  $\Phi^{\alpha} - \Phi^{\beta}$  is the value of a Čech cocycle whose cohomology is represented, via the de Rham isomorphism, by the cohomology of the smooth 1-form  $\frac{\alpha_0}{h} + \kappa$  restricted to  $\Lambda$ . Therefore,  $\arg c^{\beta\alpha}$  is represented, modulo O(h), by  $\frac{[\alpha_0]}{h} + [\kappa] + [\mu] \frac{\pi}{2}$ . Since  $\arg c^{\beta\alpha}$  is itself a representative of  $[\lambda]$ , the theorem is proved.

If  $\Lambda = \Lambda_0$  is a whole Liouville torus, the principal terms in the quantization condition yield the well-known Maslov-Bohr-Sommerfeld quantization condition : "For all closed paths  $\gamma$  in  $\Lambda_0$  (or equivalently for the *n* standard generators of  $H_1(\Lambda_0)$  obtained through action-angle coordinates),

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma} \alpha_0 + \int_{\gamma} \kappa + \mu(\gamma) \frac{\pi}{2} \in 2\pi \mathbb{Z} + O(h)^{"}.$$
(4.9)

# 4.5.5 Spectral parameter dependence

The motivation of this paragraph is to make the above results suitable for studying spectral problems, namely for investigating the solutions of the microlocal system :

$$(P_1(h) - E_1)u_h \sim 0, \dots, (P_n(h) - E_n)u_h \sim 0,$$

according to the appropriate definition of microlocal equality (section 4.4.5).

In order to do this, the operators  $P_j$  in the quantization conditions have to be replaced by  $P_j - E_j$ . In the following analysis, we will need to state the problem in a slightly more general setting, where we replace  $P_j$  by an operator depending on E in essentially the same way as  $P_j - E_j$ :

**Definition 4.5.1** Let  $P_i(h)$  be a semi-classical integrable system on an ndimensional manifold X, with principal symbols  $p_i$ . A system  $P_i^E(h)$  depending smoothly on the parameter  $E \in \mathbb{R}^n$  will be called regular deformation of  $P_i(h)$  if for each E,  $(P_1^E(h), \ldots, P_j^E(h))$  is a semi-classical integrable system, with principal symbols  $p_i^E$ , and there exists a  $C^{\infty}$  function  $f^E(x) = f(E, x)$ ,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  such that  $f^0 = id$  and  $f(\cdot, 0)$  is a local diffeomorphism of  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , such that:

$$(p_1^E,\ldots,p_n^E)=f^E(p_1,\ldots,p_n).$$

For such a regular deformation, the new lagrangean foliation  $\Lambda_c^E$  is globally the same as the original one  $\Lambda_c$ , with different labels :  $\Lambda_c = \Lambda_{f^E(c)}^E$ .

Now we assume that there is a tubular neighborhood  $\Omega$  of  $\Lambda$  such that for E in a sufficiently small compact neighborhood of 0, the intersections  $\Lambda^E = \Lambda_0^E \cap \Omega$ 

are non-singular submanifolds of  $\Lambda_0^E$ . Then it is easy to verify that every result of this section extends to uniform solutions of the perturbed system  $P_i^E(h)$  on  $\Omega$ . In particular we obtain a perturbed cocycle  $[c^E(h)]$  that smoothly depends on E. It implies that the terms in the asymptotic expansion in powers of hof the cocycle  $[\lambda^E(h)]$ , equal to the argument of  $[c^E(h)]$ , are locally smooth but possibly multivalued functions of E. At the principal levels, this gives a parameter dependent version of the Bohr-Sommerfeld conditions (4.9) : "for any family of loops  $\gamma^E$  drawn on  $\Lambda_0^E$ ,

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma^E} \alpha_0 + \int_{\gamma^E} \kappa^E + \mu(\gamma^E) \frac{\pi}{2} \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h)^{"}.$$
(4.10)

**Remark 4.5.3.** Let  $P_i^E(h)$  be such a smooth deformation. Then one can look at the family obtained by letting E = ht, where t is a bounded parameter (let's assume for clarity in this remark that n = 1; everything applies to the many-dimensional case as well). Using that in every local coordinates, the Weyl symbols of  $P_I^E$  is a smooth function of E, one can see that the operator

$$\tilde{P}^t(h) \stackrel{\text{def}}{=} P^{ht}(h)$$

is still a classical pseudodifferential operator, with uniform estimates for bounded t, but its principal and sub-principal symbols are of course not the same as those of  $P^E(h)$ . More precisely, if we denote by  $r^E$  the sub-principal symbol of  $P^E$ , then, because of Taylor's formula :

$$f(E,x) = f(0,x) + E\frac{\partial f}{\partial E}(0,x) + \dots + E^{N}\frac{\partial^{N} f}{\partial E^{N}}(0,x) + O(E^{N+1}), \quad (4.11)$$

which holds uniformly for bounded E, the principal and sub-principal symbols  $\tilde{p}^t$  and  $\tilde{r}^t$  of  $\tilde{P}^t(h)$  satisfy :

$$\tilde{p}^t = p^0 = f^0(p), \quad \text{and} \quad \tilde{r}^t = r^0 + t \frac{\partial f^E}{\partial E}_{\models E=0}(p).$$
(4.12)

Now, let us see what Bohr-Sommerfeld conditions (4.10) become. First of all, (4.12) shows that the principal lagrangean  $\tilde{\Lambda}_0$  of the new system is independent of t and equal to  $\Lambda_0^0$ . Let us call  $\tilde{\kappa}^t$  the sub-principal form on  $\Lambda_0^0$ . On the other hand, the family of lagrangean manifolds  $\Lambda_0^E = \{f^E(p) = 0\}$ , with E = ht, depends smoothly on h; let us call  $\delta \kappa^t$  its deformation 1-form at h = 0 (see 4.3.2.2), defined by :

$$\delta \kappa^t \mathcal{X}_{f^0(p)} = -t \frac{\partial f^E}{\partial E}_{|E=0}(p)$$

Then paragraph 4.3.2.4 together with (4.12) shows that, on  $\Lambda_0^0$ ,

$$\tilde{\kappa}^t = \kappa^0 + \delta \kappa^t$$

Now, if  $\gamma^E$  is a smooth family of loops drawn on  $\Lambda_0^E$ , lemma 4.3.2 implies that, when E = ht,

$$\int_{\gamma^E} \alpha_0 = \int_{\gamma^0} \alpha_0 + h \int_{\gamma^0} \delta \kappa^t + O(h^2).$$

Since it is clear that  $\int_{\gamma^E} \kappa^E = \int_{\gamma^0} \kappa^0 + O(h)$ , we get :

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma^E} \alpha_0 + \int_{\gamma^E} \kappa^E = \frac{1}{h} \int_{\gamma^0} \alpha_0 + \int_{\gamma^0} \tilde{\kappa}^t + O(h).$$

In other words, we exactly recover the Bohr-Sommerfeld quantization conditions we would have expected to find for the *t*-dependent system  $\tilde{P}^t(h)$ .

Note that this remark will mostly be used with f(E, x) = x - E, so that  $\tilde{r}^t = r^0 - t$ .

# 4.6 Bohr-Sommerfeld for a *focus-focus* singularity

#### 4.6.1 Integrable systems with a non-degenerate singularity

Let us recall some definitions from chapter 2.

Let M be any symplectic manifold of dimension 2n, and  $f_1, \ldots, f_n$  a completely integrable system on M. The system is said to be singular at a point  $m \in M$  if m is a critical point for the momentum map F. We shall always suppose in this work that m is of maximal corank as a critical point, which means that each function  $f_i$  is critical at m. Without loss of generality, we shall also assume that for all  $i = 1, \ldots, n, f_i(m) = 0$ .

The map  $\mathcal{H}$  that assigns to a smooth function its Hessian at m is a Lie algebra homomorphism with respect to the Poisson bracket from the Lie algebra of smooth functions that are critical at m to the Lie algebra of quadratic forms on the tangent space  $T_m \mathcal{M}$ . Fixing any local set of Darboux coordinates, the latter is identified with the space  $\mathcal{Q}(2n)$  of quadratic forms on  $\mathbb{R}^{2n} = \{(x,\xi)\}$ .

Every singular completely integrable system thus gives rise to a linear subalgebra  $C_F$  of  $\mathcal{Q}(2n)$ , namely the sub-algebra generated by  $\{\mathcal{H}(f_1), \ldots, \mathcal{H}(f_n)\}$ . Note that  $C_F$  is always Abelian.

**Definition 4.6.1 (Eliasson [43])** A singular completely integrable system with momentum map F admits m as a non-degenerate singularity if  $C_F$  is a Cartan sub-algebra of  $\mathcal{Q}(2n)$ .

Recall from chapter 2 that a Cartan subalgebra of a semi-simple Lie algebra  $\mathfrak{a}$  is a commutative subalgebra  $\mathfrak{c}$  that is equal to its commutant and such that, for any element  $H \in \mathfrak{c}$ ,  $ad_H$  is a semi-simple endomorphism of  $\mathfrak{a}$ .

From the work of Williamson [89], real Cartan sub-algebras of  $\mathcal{Q}(2n)$  are classified according to the following scheme :

**Theorem 4.6.1 (Williamson)** Let  $\mathfrak{c}$  be a real Cartan sub-algebra of  $\mathcal{Q}(2n)$ . Then there exists a symplectic linear change of coordinates in  $\mathbb{R}^{2n}$  and a basis  $q_1, \ldots, q_n$  of  $\mathfrak{c}$  such that each  $q_i$  is one of the following :

• 
$$q_i = x_i^2 + \xi_i^2$$
 (elliptic type)

- $q_i = x_i \xi_i$  (hyperbolic type)
- $q_i = x_i \xi_i + x_{i+1} \xi_{i+1}$  $q_{i+1} = x_i \xi_{i+1} - x_{i+1} \xi_i$  (focus-focus type)

If M has dimension 4, as we shall assume from now on, only four combinations are possible. We will restrict ourselves to the case of a *focus-focus* singularity. Note that this is the only case where m is *isolated* amongst the set of critical points of F. In particular, the singular foliation  $\Lambda_c = F^{-1}(c)$  has, for small c, only one singular leaf  $\Lambda_0$ , and if  $\Omega$  is a sufficiently small neighborhood of m in M, then  $\Omega \setminus \{m\}$  is foliated by smooth lagrangean submanifolds of M. If  $\Lambda_0$  is connected, this also implies that the critical value 0 lies in the interior of the image of the momentum map F. The aim of the following paragraphs is to give a precise description of the singular fibration on a full neighborhood of  $\Lambda_0$ , generalizing the usual Arnold-Liouville theory for regular fibers. The results are not new, since they are quoted in [72] and proposition 4.6.2 can in principle be recovered from [65], but I believe that the following presentation gives a clearer account of what is needed for our purposes.

# 4.6.2 Linear focus-focus

We fix here the notations used when referring to a linear focus-focus system on  $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, \xi, \eta)\}$ . We shall always use Williamson coordinates, in which the system is generated by the quadratic forms  $q_1 = x\xi + y\eta$  and  $q_2 = x\eta - y\xi$ . The hamiltonian flows are denoted by  $\mathcal{X}_1$  and  $\mathcal{X}_2$ . It will be convenient to use polar coordinates  $(r, \theta)$  for (x, y) and  $(\rho, \alpha)$  for  $(\xi, \eta)$ , in which  $\mathcal{X}_1$  and  $\mathcal{X}_2$  take a simpler form (see figure 4.1). Of interest are also the complex representations  $z_1 = x + iy$  and  $z_2 = \xi + i\eta$ . The flows of  $\mathcal{X}_1$  and  $\mathcal{X}_2$  are then respectively

$$(t, (z_1, z_2)) \mapsto (e^t z_1, e^{-t} z_2), \text{ and}$$
  
 $(s, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{is} z_1, e^{is} z_2).$  (4.13)

Similarly, we can identify the momentum map F with the complex-valued function  $F = q_1 + iq_2$ , which gives

$$F(z_1, z_2) = \bar{z_1} z_2.$$

The singular leaf  $\Lambda_0 = F^{-1}(0)$  is the union of the coordinate planes  $P_s = \{z_1 = 0\}$  and  $P_u = \{z_2 = 0\}$ , which are respectively the stable and unstable manifolds for the  $\mathcal{X}_1$ -flow.

# 4.6.3 Geometry of the singular lagrangean

Singular points of *focus-focus* type are isolated, but it may occur that the singular lagrangean  $\Lambda_0$  contains several of them. Since  $\Lambda_0$  is assumed to be compact, there will only be a finite number of them. However, we will always assume that  $\Lambda_0$  carries only *one* critical point, which is certainly a "generic" assumption (in



FIG. 4.1 – The linearized flow

[72], it is claimed that one can always reduce the number of *focus-focus* points by a small perturbation of the momentum map). This point will always be denoted by m.

Recall that the usual theory of Arnold-Liouville gives action-angle coordinates in a neighborhood of any connected compact regular leaf. Here, we have compactness, but without smoothness. Another viewpoint would be to consider the non-compact punctured leaf  $\Lambda_0 \setminus \{m\}$ ; it is smooth, and invariant under the action of the joint hamiltonian flow of the system (this holds because the critical point  $\{m\}$  is a fixed point). But there is no hope for the neighboring leaves to be diffeomorphic to  $\Lambda_0 \setminus \{m\}$ , since they are compact...

Nevertheless, the local structure of  $\Lambda_0$  near the singularity turns out to be sufficient data for its global description.

**Proposition 4.6.2** Let  $\Lambda_0$  be a singular leaf of the momentum map, carrying a unique critical point m of focus-focus type. Then the connected component of m in  $\Lambda_0$  is the image of a lagrangean immersion of a 2-sphere with a double point. Deprived of m, it is an orbit of the hamiltonian action of the system, with the structure of an affine infinite cylinder.

**Proof.** First of all, note that we can suppose that  $\Lambda_0$  is connected. Indeed, this won't lead to any loss of information, since any other connected components are necessarily regular tori, for which the usual theory applies.

On  $\Lambda_0 \setminus \{m\}$ , the action is locally free, hence by standard arguments each connected component of  $\Lambda_0 \setminus \{m\}$  (there are at most two of them) is an orbit, on which all isotropy subgroups I are conjugated. Therefore, this orbit is diffeo-

morphic to  $\mathbb{R}^2/I$ , which can be either  $\mathbb{R}^2$ , or the infinite cylinder  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$  (it cannot be a torus because it is not compact).

The local structure of the flow makes up for this ambiguity. Indeed, according to Eliasson's theorem [42], the action is symplectically linearizable near m: there exists a symplectic chart in which the hamiltonian vector fields of  $f_1$  and  $f_2$  are linear combinations of the standard focus-focus vector fields; moreover, the involved coefficients form an invertible  $2 \times 2$  matrix  $M_c$  which is locally constant along each fiber  $\Lambda_c$ . Now, the focus-focus vector fields are by assumption associated to the hamiltonians  $q_1$  and  $q_2$ . Since  $q_2$  has periodic orbits in any neighborhood of m, the isotropy subgroup I is necessarily isomorphic to  $\mathbb{Z}$ . The connected components of  $\Lambda_0 \setminus \{m\}$  are therefore infinite cylinders.

On such a cylinder are globally defined two infinitesimal generators of the action,  $\mathcal{X}_1$  and  $\mathcal{X}_2$ , by the requirement that they are obtained from the initial generators  $\mathcal{X}_{f_1}$  and  $\mathcal{X}_{f_2}$  by applying the matrix  $M_c^{-1}$ . In Eliasson's coordinates, these vector fields are of course the standard *focus-focus* generators. The first one  $\mathcal{X}_1$  is always transversal to  $\mathcal{X}_2$ , and hence describes an "axis" of the cylinder.  $\mathcal{X}_1$  and  $\mathcal{X}_2$  define the affine structure of the cylinder.

Let us show now that  $\Lambda_0 \setminus \{m\}$  is necessarily connected. From the connectedness of  $\Lambda_0$  and the local structure at the critical point m, we a priori know that  $\Lambda_0 \setminus \{m\}$  has at most two connected components, which correspond respectively to the stable and unstable manifolds of  $\mathcal{X}_1$ . Let x be a point on the unstable manifold, contained in a small  $S^1$ -invariant neighborhood U of m. We let the flow of  $\mathcal{X}_1$  act on x so that when time increases, the image x(t) of x goes out of U. Now, we know from the dynamic on the infinite cylinder that x(t) must go out of any compact subset in finite time. Since the manifold with boundary  $\Lambda_0 \setminus U$  is compact, the image of x must necessarily enter U again. But it is clear from the local structure of the flow that x(t) can approach monly via the *stable* manifold. Therefore, the stable and the unstable manifold are connected to each other, and hence they are equal.

Thus,  $\Lambda_0$  is homeomorphic to a cylinder whose extremities are compactified in a unique point *m*, or a "pinched torus", or a sphere with two points identified.



FIG. 4.2 – Topology of  $\Lambda_0$ 

**Remark 4.6.1.** We can readily deduce that  $\pi_1(\Lambda_0)$  is isomorphic to  $\mathbb{Z}$ , the integer coefficient counting the winding number along the "big axis of the pinched torus".

From the differentiable viewpoint, we see in the local form that  $\Lambda_0 \cap U$ is the union of two smooth submanifolds diffeomorphic to open discs  $D^2$  and transversally intersecting at m. Therefore  $\Lambda_0$  is the immersion of a smooth 2manifold with a unique double point. Since this manifold can be obtained by gluing a  $D^2$  at each extremity of the cylinder  $\Lambda_0 \setminus U$ , it is a sphere.  $\Box$ 

# 4.6.4 Monodromy of the lagrangean fibration around $\Lambda_0$

The first description of the monodromy invariant for singular fibrations was carried out in [37], where the example of the spherical pendulum was studied. Later, Maorong Zou in [92] and Nguyên Tiên Zung in [72] observed that the monodromy at stake was typical of a *focus-focus* singularity. In [72], the computation of the monodromy is based on a claimed normal form for the foliation. We present here another proof of the result, relying on the local but hamiltonian normal form of Eliasson. The constructions explained in the proof will be used for the quantization conditions (sections 4.6.6 and 4.6.7).

At the same time as I was writing this paper, Duistermaat and Cushman were able to generalize the monodromy for non-hamiltonian systems [33].

Let us first briefly recall the definition, from a topological viewpoint. For any completely integrable system in dimension 2n, a regular value c of the momentum map F gives rise to a Liouville torus  $\Lambda_c$ , and thus to a lattice  $L_c = H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$ . Because F is a smooth fibration near  $F^{-1}(c)$ , the union of all  $L_c$  is a locally trivial smooth bundle L over the open set  $D_r$  of regular values of F. Fixing a point  $c_0$  and a smooth basis of  $H_1(\Lambda_c) \simeq \mathbb{Z}^n$ , a local section of L near  $c_0$  takes values in  $\mathbb{Z}^n$ , and thus is locally constant. We therefore have the notion of parallel transport above a path in  $D_r$ . The holonomy associated with it is a homomorphism from  $\pi_1(D_r, c_0)$  to  $\operatorname{Aut}(L_{c_0}) \simeq \operatorname{GL}(n, \mathbb{Z})$ , called the monodromy of L.

Back to our focus-focus system, we take  $D_r$  to be a small ball around the origin in  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ , minus the origin. Because its  $\pi_1$  is  $\mathbb{Z}$ , the problem is reduced to determining the monodromy of a simple loop around 0.

Recall from last paragraph that for any focus-focus system  $(p_1, p_2)$ , there is a local normal form  $(q_1, q_2) = f(p_1, p_2)$  near m, where f is a local diffeomorphism of  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , and  $q_i$ 's are defined in symplectic coordinates around m by paragraph 4.6.2. This yields two particular vector fields  $\mathcal{X}_1$  and  $\mathcal{X}_2$  defined on a full neighborhood of  $\Lambda_0$  by :

$$(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = df.(\mathcal{X}_{p_1}, \mathcal{X}_{p_2}).$$

The flow of  $\mathcal{X}_2$  on  $\Lambda_c$  is, as we already saw, periodic of period  $2\pi$ , so the orbit of any point x is a simple loop  $\Gamma_x$  on  $\Lambda_c$  depending smoothly on x. Its homology class  $\gamma_2(c_0)$  is therefore an invariant of the monodromy operator. Let us denote

by  $\gamma_1(c_0)$  the homology class of a path starting on  $\Gamma_x$  in the direction of  $\mathcal{X}_1$ , going back to  $\Gamma_x$  and closing up on  $\Gamma_x$  in the direction of  $\mathcal{X}_2$ .

 $(\gamma_1(c_0), \gamma_2(c_0))$  is a basis of  $L_{c_0}$  depending locally smoothly on  $c_0$ ; the monodromy of the system is expressed on this basis by the following proposition :

**Proposition 4.6.3 ([72])** Let  $(p_1, p_2)$  be a completely integrable system with a singular leaf carrying a unique singular point of focus-focus type. Then for any  $c_0$  close enough the the critical value  $0 \in \mathbb{R}^2$ , the monodromy matrix, expressed in the basis  $(\gamma_1(c_0), \gamma_2(c_0))$  of  $L_{c_0}$ , is equal to

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ \epsilon & 1 \end{array}\right).$$

Here  $\epsilon$  is the sign of det M, where  $M \in GL(2, \mathbb{R})$  is the unique matrix such that :

$$(\mathcal{H}(q_1), \mathcal{H}(q_2)) = M.(\mathcal{H}(p_1), \mathcal{H}(p_2)).$$

**Proof**. The idea of the proof, already apparent in the construction of the basis  $(\gamma_1(c_0), \gamma_2(c_0))$ , is to show that all contributions to the monodromy can be concentrated in a small neighborhood of the critical point m.

Let U be such a small ball around m, taken to be  $S^1$ -invariant. The intersection of  $\partial U$  with  $\Lambda_0$  is composed of two circles  $\Gamma_u$  and  $\Gamma_s$  respectively drawn on the local unstable and stable manifolds at m. Let us take a point x on  $\Gamma_u$ , and let  $\Sigma$  be a small section transversal to  $\Lambda_0$  at x. The tangent space to  $\Lambda_0$ at x is exactly the kernel of dF. Thus, the momentum map F realizes a local diffeomorphism from  $(\Sigma, x)$  onto  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . We can then assume that  $\Sigma$  is a preimage of a small open disc  $D \subset D_r$  around 0.

Let  $\Omega$  be the invariant open subset of M obtained as the union of orbits of points in  $\Sigma$ . It is a neighborhood of  $\Lambda_0$ , composed of the union of  $\Lambda_0$  and invariant tori. Because of the compactness of  $\overline{\Omega \setminus U}$ , any orbit of some point  $y \in \Sigma$  close to x intersect  $\partial U$  in two circles close to  $\Gamma_u$  and  $\Gamma_s$ . The restriction of F to  $\Omega \setminus U$  is therefore a trivial fibration over D whose fibers are finite length  $S^1$ -invariant affine cylinders, where the affine structure that defines the "axis" of each cylinder is given by the vector field  $\mathcal{X}_1$ :

$$\Omega \setminus U \simeq D \times ([0,1] \times S^1)$$

$$F \downarrow \qquad (4.14)$$

$$D$$

For instance, the circles  $\Gamma_u$  and  $\Gamma_s$  are represented in this trivialization by  $(0, (0, S^1))$  and  $(0, (1, S^1))$  respectively (see figure 4.3). For any  $y \in \Omega \setminus U$  corresponding to the point  $(c, (t, \tau))$  in the above trivialization, we denote by  $[y_u, y_s]$  the  $\mathcal{X}_1$ -path corresponding to the axis  $(c, ([0, 1], \tau))$ . As we can assume that U lies inside an open neighborhood of m where Eliasson's normal form applies,  $y_u$  and  $y_s$  have complex coordinates  $(y_{u/s,1}, y_{u/s,2})$  satisfying

$$\overline{y_{u/s,1}}y_{u/s,2} = f(c)$$


FIG. 4.3 – The fibration F on  $\overline{\Omega \setminus U}$ 

Note that the matrix M in the statement of the proposition is equal to df(m).

**Remark 4.6.2.** We don't actually need the full statement of Eliasson's normal form, because higher order terms in the normal form wouldn't be of any trouble for the local computation of the monodromy (see [33]).  $\triangle$ 

If  $c \neq 0$ , using formula (4.13) for the flow,  $y_s$  can be joined to  $y_u$  by letting the flow of  $q_1$  act during a time  $t(y) = \ln(|y_{u,1}|/|y_{s,1}|)$  and that of  $q_2$  during a time

$$s(y) = \arg(y_{u,1}/y_{s,1}).$$

By this construction, we get a locally smooth family of loops on  $\Lambda_c$ , whose homology class at  $c_0$ ,  $\gamma_1(c_0)$ , together with  $\gamma_2(c_0)$ , form the basis referred to in the statement of the proposition.

Let  $[x_u, x_s]$  be the axis through x (by definition,  $x_u = x$  is on the local unstable manifold  $P_u$  and  $x_s$  on the local stable manifold  $P_s$ ). If y tends to x, then  $y_u$  and  $y_s$  tend to  $x_u$  and  $x_s$  respectively. Therefore, since  $x_{u,2} = x_{s,1} = 0$ ,  $s(y) \sim \arg(x_{u,1}\overline{x_{s,2}}) + \arg(f(c))$  as y tends towards x.

Now let  $\mathcal{C}$  be a small loop around x in  $\Sigma$  such that its image by F is a circle in D through  $c_0$ , oriented in the trigonometric sense : letting y run around  $\mathcal{C}$ , and with it, the loop  $\gamma_2(c)$ , amounts to increasing  $\arg(c)$ . Therefore, after such a revolution, s(y) get increased or decreased by  $2\pi$ , depending on the diffeomorphism f being respectively orientation preserving or reversing. This means that the loop obtained is equal to the initial one composed by respectively *plus* or *minus* an  $S^1$  orbit, which proves the proposition.

# 4.6.5 Microlocal focus-focus

We are now given a self-adjoint semi-classical completely integrable system  $P_1(h), P_2(h)$  whose associated classical system presents a focus-focus singularity at a point m, as defined in the preceding section.

The aim of this section is the complete analysis of microlocal solutions around the critical point m of the system :

$$\begin{cases} P_1^E(h)u_h^E \sim 0\\ P_2^E(h)u_h^E \sim 0 \end{cases}$$

$$\tag{4.15}$$

in which  $P_j^E$  is a regular deformation of  $P_j$  with a parameter E varying in a compact neighborhood of  $0 \in \mathbb{R}^2$  (see definition 4.5.1).

The problem of globalizing these solution to a neighborhood of the whole critical leaf  $\Lambda_0$  will be dealt with in the next section.

Recall from paragraph 4.4.5 that microlocal solutions of (4.15) should always be prompted with the appropriate set  $\Gamma$  of admissible values of (h, E). From now on, such a solution will be called non-trivial if for some – and then for any – elliptic pseudodifferential operator  $P(h)\Psi_0^*(\Omega)$  on a neighborhood  $\Omega$  of m, and for all  $(h, E) \in \Gamma$ ,

$$||P(h)u_h^E||_{L^2} > Ch^{-N}, \quad N \in \mathbb{Z}, C > 0.$$

The crucial point is then the following :

**Proposition 4.6.4** The set of microlocal solutions of (4.15) at m, modulo microlocal equality, is a free  $\overline{\mathbb{C}}_h$ -module of rank  $\leq 1$ . In other words, if  $u_h^E$ ,  $(h, E) \in \Gamma$  is a non-trivial solution of (4.15) at m, then for any other such solution  $v_h^E$ , there exists a constant  $C^E(h) \in \mathbb{C}_h$ , depending smoothly on E, such that :

$$v_h^E \sim C(h)^E u_h^E$$
 at  $m$ .

To prove this, we use a parameter dependent version of the normal form of [81] : let  $Q_j(h)$  be the standard *focus-focus* operators on  $\mathbb{R}^2$ , that is, written in polar coordinates  $(r, \theta)$  :

$$Q_1 = \frac{h}{i}(r\frac{\partial}{\partial r} + 1)$$
 and  $Q_2 = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial \theta}$ .

For notation convenience, we will write  $\mathbf{P}(h)$  for the vector  $(P_1(h), P_2(h))$ , and similarly for other quantities. Let  $\mathbf{p}$  be the momentum map for the system  $(p_1, p_2)$ . The target space  $\mathbb{R}^2$  of  $\mathbf{p}$  will be identified with  $\mathbb{C}$  by  $\mathbf{p} = p_1 + ip_2$ . As we already saw, in suitable symplectic coordinates near m, there is a local diffeomorphism F of  $\mathbb{R}^2$  such that  $\mathbf{p} = F(\mathbf{q})$ . Thus,

$$\boldsymbol{p}^E = f^E \circ F(\boldsymbol{q}).$$

The semi-classical normal form that we get is the following :

**Lemma 4.6.5 ([81])** There exists a unitary Fourier integral operator  $U^{E}(h)$ , a microlocally invertible  $2 \times 2$  matrix  $\mathcal{M}^{E}(h)$  of pseudodifferential operators, and  $\epsilon^{E}(h) \in \mathbb{C}_{h}$ , everything depending smoothly on E, such that, microlocally on a neighborhood of m:

$$(U^E)^{-1} \mathbf{P}^E U^E = \mathcal{M}^E \cdot (\mathbf{Q} - \boldsymbol{\epsilon}^E(h)) + O(h^\infty).$$

 $\epsilon^{E}$  admits a semi-classical développement asymptotique of the form :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h) \sim \sum_{k \geqslant 0} h^{k} \boldsymbol{\epsilon}^{E}_{k}.$$

The first two terms satisfy :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{0}^{E} &= F^{-1} \circ (f^{E})^{-1}(\vec{0}), \\ \boldsymbol{\epsilon}_{1}^{0} &= -M^{-1}.(\boldsymbol{r}(m)). \end{aligned}$$

• r(m) is the value at m of the sub-principal symbol of P.

• *M* is the value at 0 of principal symbol of  $\mathcal{M}^0$ . It is also defined by M = dF(0), or, equivalently :

$$d^2 p^0(m) = M.d^2 q(0).$$

**Remark 4.6.3.** We will show later (paragraph 4.6.7.4) that the expansion  $\epsilon_2^E(h) = \Im(\boldsymbol{\epsilon}^E(h))$  is, up to  $O(h^{\infty})$ , independent on the choice of a Fourier integral operator U(h). For the other "semi-classical invariant"  $\epsilon_1^E(h) = \Re(\boldsymbol{\epsilon}^E(h))$ , this might not hold; however, will will prove thanks to corollary 4.6.10 that its formal infinite germ at E = 0 is indeed invariant by a change of Fourier integral operator U(h).

**Remark 4.6.4.** If we apply this lemma to E = ht for a bounded *n*-dimensional parameter *t*, we can apply remark 4.5.3 and express everything in terms of *t*. We obtain an asymptotic expansion  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^t(h) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\epsilon}^{ht}(h)$  satisfying :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{0}^{t} = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{1}^{t} = -M^{-1}.\left(\boldsymbol{r}^{0}(m) + \frac{\partial f^{E}}{\partial E}_{\mid E=0}(0).t\right).$$

Thanks to this lemma, the solutions of (4.15) get transformed into those of simple differential operators on  $\mathbb{R}^2$  for which we have explicit solutions. We can now turn to the proof of proposition 4.6.4. Assume that we know an exact solution of the system  $u_{\text{exact}}^E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  (this will always occur as soon as the system admits a microlocal solution – see proposition 4.6.6). Let  $u_h^E$  be any other microlocal solution near 0.

Let  $\Upsilon_R$  be the "vertical strip"  $\{r < R\}$  in the cotangent bundle  $T^*\mathbb{R}^2 = ((r,\theta), (\rho, \alpha))$ . The lagrangean leaves of the system in  $\Upsilon_R$ , deprived of a small ball B around 0, are non-singular, hence from proposition 4.5.1 there exists a constant  $C^E(h)$  such that microlocally on  $\Upsilon_R \setminus B$ ,

$$u_h^E \sim C^E(h) u_{\text{exact}}^E$$

(remember that such a formula involves uniformity with respect to E).

As in [27], we shall use this exact solution to construct a local (mod  $O(h^{\infty})$ ) solution, microlocally equal to  $u_h^E$  near the origin. Let us define  $v_h^E$  by :

$$\mathcal{F}_h v_h^E = \chi \mathcal{F}_h u_h^E + (1 - \chi) \mathcal{F}_h C^E u_{\text{exact}}^E,$$

where  $\chi$  is a compactly supported  $C^{\infty}$  function with value 1 in a neighborhood of 0. Then  $v_h^E$  and  $u_h^E$  are microlocally equal near the origin. Furthermore,  $v_h^E$ is a microlocal solution of the system at each point of  $\Upsilon_R$ .

Now there exists differential operators  $\hat{P}_j^E(h)$  such that for any  $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{F}_h(P_j^E w) = \hat{P}_j^E \mathcal{F}_h w$ . Differential operators preserve the support of distributions; therefore, since  $\mathcal{F}_h v_h^E = \mathcal{F}_h u_{\text{exact}}^E$  far from the origin, we have there  $\hat{P}_j^E \mathcal{F}_h v_h^E = \mathcal{F}_h(P_j^E u_{\text{exact}}^E) = 0$ . So we have

$$P_i^E v_h^E \sim 0$$

near each point of  $\Upsilon_R$ , and

$$\mathcal{F}_h(P_j^E v_h^E) = 0$$

far from 0. We deduce from this that  $P_j^E v_h^E$  satisfies the hypothesis of lemma 4.4.5 on  $\Upsilon_R$ , that is,

$$P_j^E v_h^E = O(h^\infty)$$
 on  $\Upsilon_R \cap \{\rho = 0\}.$ 

We have thus at our disposal a solution  $v_h^E$  of the system  $P_j^E v_h^E = w_{jh}^E$  on  $\mathbb{R}^2$  with  $w_{jh}^E = O(h^\infty)$  for r < R. On  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  this is a regular linear differential system of the first order, whose solutions are of the form

$$v_h^E = Cste^E(h).u_{\text{exact}}^E + u_{\text{particular}}^E;$$
(4.16)

 $u_{\text{exact}}^E$  is a solution of the homogeneous system, and  $u_{\text{particular}}^E$  is a particular solution of the system that can be computed from  $u_{\text{exact}}^E$  by the method of "variation of the constant". Explicitly, if we write

$$v_h^E = g^E . u_{\text{exact}}^E$$

we find that the function  $g^E$  must satisfy the following system, expressed in polar coordinates :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g^E}{\partial r} = \frac{i}{h} \frac{w_{1h}^E}{r u_{\mathrm{exact}}^E} =: a_{1h}^E \\ \\ \frac{\partial g^E}{\partial \theta} = \frac{i}{h} \frac{w_{2h}^E}{u_{\mathrm{exact}}^E} =: a_{2h}^E. \end{array} \right.$$

If  $(r_0, \theta_0)$  is any point with  $0 < r_0 < R$ ,  $g^E$  is integrated by the formula :

$$g^{E}(r,\theta) = \int_{0}^{1} \boldsymbol{a}_{h}^{E}(r_{0} + t(r - r_{0}), \theta_{0} + t(\theta - \theta_{0})).(r,\theta)dt + g^{E}(r_{0},\theta_{0}).$$

It is easy to check from the explicit formula of  $u_{\text{exact}}^E$  (see proposition 4.6.6) that  $a_h^E$  is uniformly  $O(h^{\infty})$  in the disc r < R; so with  $Cste^E(h) = g^E(r_0, \theta_0)$  we get in (4.16) that  $u_{\text{particular}}^E$  is uniformly  $O(h^{\infty})$  near the origin.

The distribution  $z_h^E = v_h^E - Cste^E \cdot u_{\text{exact}}^E - u_{\text{particular}}^E$  is a solution of  $P_j^E z_h^E = w_{jh}^E$  with support concentrated at the origin. Therefore, it is a finite sum of derivatives of the Dirac distribution. Now, the identity  $P_2^E z_h^E = O(h^{\infty})$  readily

shows that the the coefficients involved in  $z_h^E$  are uniformly  $O(h^\infty),$  and so  $z_h^E$  is.

Finally we are left with  $v_h^E = Cste^E . u_{\text{exact}}^E + O(h^{\infty})$  near 0, which implies  $v_h^E \sim Cste^E . u_{\text{exact}}^E$  near 0. This, provided we prove proposition 4.6.6, achieves the proof of proposition 4.6.4.

**Remark 4.6.5.** The proof shows that the constants  $C^E(h)$  and  $Cste^E(h)$  are microlocally equal. Besides from the preceding arguments, this essentially comes from the local connectedness of the lagrangean leaves  $\Lambda_0^E$  for  $E \neq 0$ .  $\triangle$ 

It remains now to check :

**Proposition 4.6.6** We consider the system (4.15) on  $\mathbb{R}^2$  with  $\mathbf{P}^E(h) = \mathbf{Q}_j - \boldsymbol{\epsilon}^E(h)$ , as previously defined. The following conditions are equivalent :

- 1. there exists a non-trivial microlocal solution  $u_h^E$ ,  $(h, E) \in \Gamma$  of (4.15) on a neighborhood of the origin;
- up to O(h<sup>∞</sup>) modifications of P<sup>E</sup><sub>j</sub>, there exists an exact solution u<sup>E</sup><sub>exact</sub> of (4.15) in ℝ<sup>2</sup> \ {0} for (h, E) ∈ Γ;
- 3.  $\frac{\epsilon_2^E(h)}{h} \in \mathbb{Z} + O(h^{\infty})$  uniformly for  $(h, E) \in \Gamma$ .

**Proof.** Equivalence between 2. and 3. comes from the fact that at each point of  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  the solutions of the system are spanned by the function :

$$u_{\text{exact}}^{E} = \frac{1}{r} e^{i \frac{\epsilon_{1}^{E}(h)}{h} \ln r} e^{i \frac{\epsilon_{2}^{E}(h)}{h} \theta}.$$
(4.17)

Therefore, there exists a solution around the origin if and only if  $\frac{\epsilon_2^E}{h} \in \mathbb{Z}$ .

Since  $u_{\text{exact}}^{E}$  as defined above is an admissible functional in  $\mathbb{R}^{2}$  depending smoothly on E, and a solution of the system on  $\mathbb{R}^{2}$ , it is also a microlocal solution. This solution is moreover non-trivial. Hence 2. implies 1.

Now let  $u_h^E$  be a non-trivial microlocal solution on a neighborhood  $\Omega$  of 0. From the uniqueness of microlocal solutions at points different from the origin (proposition 4.5.1), we deduce that on every simply connected open subset  $\Omega_{\alpha}$  of  $\Omega \setminus \{0\}$ , there is a constant  $(C^E)^{\alpha}(h)$  such that

$$u_h^E \sim (C^E)^{\alpha} u_{\text{exact}}^E.$$

Then, going around 0, the  $(C^E)^{\alpha}$ 's must microlocally coincide. Hence the  $e^{i\frac{e_E^E}{\hbar}\theta}$  must all microlocally coincide, uniformly for  $(h, E) \in \Gamma$ , which implies 3.

Put together, the two propositions give the following result ("first quantization condition") :

**Theorem 4.6.7** The system (4.15) has a non-trivial microlocal solution  $u_h^E$  (with  $(h, E) \in \Gamma$ ) on a neighborhood of m if and only if

$$\frac{\epsilon_2^E(h)}{h} \in \mathbb{Z} + O(h^\infty), \quad (h, E) \in \Gamma.$$

Any other solution is a multiple of it.

**Remark 4.6.6.** As we already mentioned, microlocal solutions should be viewed as half-densities on the base space. Here, we can rewrite the half-density  $u_{\text{exact}}^E |dx \wedge dy|^{\frac{1}{2}}$  as

$$e^{i\frac{\epsilon_1^E}{h}\ln|r|}e^{i\frac{\epsilon_2^E}{h}\theta}\left|\frac{dx\wedge dy}{r^2}\right|^{\frac{1}{2}},$$

and for  $r \neq 0$ , its modulus  $\left|\frac{dx \wedge dy}{r^2}\right|^{\frac{1}{2}}$  is exactly the pull down of the canonical invariant Liouville half-density  $\rho(\lambda)$  on  $\Lambda_0^E$ . In this sense,  $u_{\text{exact}}^E$  is a normalized classical oscillatory half-density on every open subset  $\Lambda^E$  of  $\Lambda_0^E$  that projects diffeomorphically onto X (thus excluding, for E = 0, the vertical  $(\xi, \eta)$ -space in  $T^*X$ ). Concerning the phase function  $\varphi_E = \epsilon_{1,0}^E \ln |r| + \epsilon_{2,0}^E \theta$ , a handy tool for its expression is the use of complex coordinates  $z_1 = x + iy$  and  $z_2 = \xi + i\eta$ ; we also write  $\epsilon_0^E = \epsilon_{1,0}^E + i\epsilon_{2,0}^E$ , which leads to

$$\varphi^E = \Re(\boldsymbol{\epsilon}_0^E \ln \bar{z}_1).$$

(Note that  $\boldsymbol{\epsilon}_0^E \ln \bar{z}_1$  is not well-defined, but thanks to the assumption on  $\boldsymbol{\epsilon}_2^E(h)$ , its real part is indeed well-defined modulo  $2\pi h\mathbb{Z}$ .) We readily deduce that the graph of  $\varphi^E$  in  $T^*X$  is the set of  $(z_1, z_2)$  such that  $z_2 = 2\frac{\partial \varphi^E}{\partial \bar{z}_1} = \boldsymbol{\epsilon}_0^E/\bar{z}_1$ . Thus  $\Lambda_0^E = \{(z_1, z_2) \in T^*X, \quad \bar{z}_1 z_2 = \boldsymbol{\epsilon}_0^E\}$ . Note that this also holds if E = 0, for then  $\boldsymbol{\epsilon}_0^E = 0$  and  $\Lambda_0^0$  consists of the union of both coordinate planes  $z_1 = 0$  and  $z_2 = 0$ .

# 4.6.6 Regularization of $[\kappa]$

Before stating our principal result in the next section (theorem 4.6.9), we need to describe one more geometrical ingredient, related to the divergence of the integral of the sub-principal form  $\kappa$  along paths through m.

We still let  $(P_1(h), P_2(h))$  be a semi-classical completely integrable system with a singular principal lagrangean carrying a unique singular point m of focusfocus type. Here again, we identify the target space of the momentum map pwith the complex plane  $\mathbb{C}$ . Thus  $p = p_1 + ip_2$ . For small  $c \in \mathbb{C}$ , we denote by  $\Lambda_c$  the lagrangean leaf  $\Lambda_c = \{p^{-1}(c)\}$ , and  $\kappa_c$  is as usual the sub-principal form on  $\Lambda_c$ .

Let  $\gamma_c$  be a smooth family of loops on  $\Lambda_c$  such that  $\gamma_0$  is a simple loop through m starting on the local unstable manifold of  $(\Lambda_0, m)$ , and coming back to m via the local stable manifold. We know that the non-triviality of the monodromy

implies that the map  $c \to \gamma_c$  cannot be univalued, but proposition 4.6.3 gives a precise control over its multivaluedness. The purpose of this paragraph is to control the integral of the sub-principal form along such a family of paths, and in particular to determine its divergence principal part as  $c \to 0$ .

Let M be the  $2 \times 2$  real matrix such that  $\mathcal{H}(p) = M.\mathcal{H}(q)$ , where  $q = q_1 + iq_2$ (for the linearized flow, we always use the notations of 4.6.2). In accordance with lemma 4.6.5 we let

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = -M^{-1} \boldsymbol{.} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}),$$

where  $r = r_1 + ir_2$  is the joint sub-principal symbol of the system.

**Proposition 4.6.8** For any multivalued smooth family  $\gamma_c$  of loops on  $\Lambda_c$  such that  $\gamma_0$  is a simple loop through m starting on the local unstable manifold of  $(\Lambda_0, m)$ , and coming back to m via the local stable manifold, then

• the limit :

$$I_{\gamma_0}(\kappa) = \lim_{\substack{c \to 0 \\ along \ a \ ray}} \left( \int_{\gamma_c} \kappa_c + \Re(\epsilon_1 \ln(M^{-1}c)) \right)$$

exists,

- and its class modulo  $2\pi \mathfrak{I}(\boldsymbol{\epsilon}_1)\mathbb{Z}$  actually does not depend on  $\gamma_c$ , provided  $\gamma_0$  satisfies the hypothesis;
- finally, this class is also given by the formula :

$$I_{\gamma_0}(\kappa) = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \left( \int_{A_0=\gamma_0(s)}^{B_0=\gamma_0(1-t)} \kappa + \Re(\epsilon_1) ln(r_{A_0}\rho_{B_0}) + \Im(\epsilon_1)(\theta_{A_0} - \alpha_{B_0}) \right),$$
(4.18)

where  $(r, \theta, \rho, \alpha)$  are the polar symplectic coordinates near the origin defined in paragraph 4.6.2.

 $I_{\gamma_0}(\kappa)$  will be called the principal value of  $\int_{\gamma_0} \kappa$ .

**Proof.** Let  $([\gamma_1(c)], [\gamma_2(c)])$  be the smooth basis of  $\pi_1(\Lambda_c)$  defined in proposition 4.6.3. The homotopy class of  $\gamma_c$  decomposes into

$$[\gamma_c] = n_1(c)[\gamma_1(c)] + n_2(c)[\gamma_2(c)],$$

for integers  $n_1(c)$  and  $n_2(c)$ . On  $\Lambda_0$ ,  $\gamma_2(0)$  degenerates into a trivial loop, and by hypothesis we have

$$[\gamma_0] = [\gamma_1(0)].$$

But we know from proposition 4.6.3 that the group bundle  $\pi_1(\Lambda_c)/\langle \gamma_2(c) \rangle \to c$  is trivial near c = 0, with fibers isomorphic to  $\mathbb{Z}$ . Therefore,  $n_1(c)$  must be identically equal to 1 for small c.

If c is constrained into a sector  $\Delta$  of the plane, then the family  $\gamma_c$  must be continuous at zero, which implies that  $n_2(c)$  is constant for small c. Since the integral of  $\kappa_c$  along the  $\mathcal{X}_2$ -circle  $\gamma_2(c)$  is equal to  $-2\pi r_2(m) + O(c)$ , we have

$$\lim_{\substack{c \to 0 \\ c \in \Delta}} \int_{n_2(c)[\gamma_2(c)]} \kappa_c = 2\pi \, \mathfrak{I}(\boldsymbol{\epsilon}_1).$$

This, provided we prove the first point of the proposition, shows the second point. It remains to show the convergence of  $\int_{\gamma_1(c)} \kappa_c$ , and the formula 4.18. We shall still assume that c stays in a sector  $\Delta$  and by  $\gamma_c$  we denote a smooth representative of the first basis element  $[\gamma_1(c)]$ .

Let f be the function on  $(\mathbb{R}^2, 0)$  such that, in some neighborhood  $\Omega$  of m and some local symplectic coordinates around m, p = f(q), so that M = df(0). If we let  $\tilde{c} = f(c)$ , the problem amounts to investigating the limit of

$$\int_{\gamma_{\tilde{c}}} \kappa_{\tilde{c}} + \Re(\boldsymbol{\epsilon}_1 \ln(c)),$$

because  $\ln(M^{-1}f(c)) = \ln(c) + O(c)$ . Now,  $\kappa_{\tilde{c}}$  is defined by

$$\kappa_{\tilde{c}}.\mathcal{X}_{p_j} = -r_j,$$

which also reads, in  $\Omega$ :

$$(\kappa_{\tilde{c}}.\mathcal{X}_{q_1},\kappa_{\tilde{c}}.\mathcal{X}_{q_2}) = -(df(q))^{-1}.(r_1,r_2).$$

This means that  $\kappa_{\tilde{c}}$  is, in  $\Omega$ , the sub-principal form on the *c*-level set of a system with principal symbol q and sub-principal symbol  $(df(q))^{-1} r$  (which we call r again). So let us work with these data and forget the tilde.

As we shall see, we can even reduce the problem to a *constant* sub-principal symbol  $r(0)(=-\epsilon_1)$ . This is due to the following "critical Poincaré lemma"(see [81]) : there exists a function g on a neighborhood of  $0 \in T^*\mathbb{R}^2$  and smooth functions  $h_j$  on  $(\mathbb{R}^2, 0)$  such that

$$r_j = dg.\mathcal{X}_{q_j} + h_j(q).$$

This implies that on  $\Omega$ , for non-zero c, the function

$$K_c \equiv -g - h_1(c)\ln(r) - h_2(c)\theta \pmod{2\pi h_2(c)}$$

is a primitive of  $\kappa_c$  on  $\Lambda_c = \{r\rho e^{i(\alpha-\theta)} = c\}$ . Suppose now that  $A_0$  and  $B_0$  are points on  $\gamma_0$  lying respectively on the local unstable and stable manifolds of  $\Lambda_0$ . Then there exist smooth families of points  $A_c$  and  $B_c$  on  $\Omega \cap \gamma_c([0,1])$  such that  $\lim_{c\to 0} (A_c, B_c) = (A_0, B_0)$ . We can write :

$$\int_{\gamma_c} \kappa_c = \int_{A_c}^{B_c} \kappa_c + K_c(A_c) - K_c(B_c)$$
$$= \int_{A_c}^{B_c} \kappa_c + g(B_c) - g(A_c) - h_1(c) ln(r_{A_c}/r_{B_c}) - h_2(c)(\theta_{A_c} - \theta_{B_c})$$

which can also be written

$$\int_{A_c}^{B_c} \kappa_c + g(B_c) - g(A_c) - h_1(c) ln(r_{A_c} \rho_{B_c}) - h_2(c)(\theta_{A_c} - \alpha_{B_c}) + (h_1(c) ln(|c|) - h_2(c) \arg(c)).$$

Everything but the last parenthesis has a smooth behavior as  $c \to 0$  in  $\Delta$ , and that last parenthesis is nothing else than  $\Re((h_1(c) + ih_2(c)) \ln c))$ . So there is a smooth function  $I(A_c, B_c)$  such that :

$$I(A_c, B_c) = \int_{\gamma_c} \kappa_c - \Re((h_1(c) + ih_2(c)) \ln c).$$

**Remark 4.6.7.** Because of the monodromy matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (proposition 4.6.3), as *c* loops in the positive sense around the origin,  $\int_{\gamma_c} \kappa_c$  gets increased by

$$\int_{\gamma_2(c)} \kappa_c = -2\pi h_2(c)$$

whereas  $\Re((h_1(c) + ih_2(c)) \ln c) = h_1(c) ln(|c|) - h_2(c) \arg(c)$  gets increased by the same quantity. This shows that  $I(A_c, B_c)$  is actually a *univalued* smooth function around c = 0.



FIG. 4.4 – Regularization of  $\kappa$ 

Because  $(h_1(c) + ih_2(c)) = -\epsilon_1 + O(c)$ , we deduce that if we fix a determination of  $\ln c$  and make c tend to 0 in  $\Delta$ , then

$$\Re\left(\left(h_1(c)+ih_2(c)\right)\ln c+\epsilon_1\ln c\right)\to 0$$

Therefore,  $I_{\gamma_0}(\kappa)$  exists and is equal to  $I(A_0, B_0)$ . Note that it is independent of  $A_0$  and  $B_0$ , and hence equal to the limit of  $I(A_0, B_0)$  as  $A_0$  and  $B_0$  tend to the critical point m. That means that the function g, being smooth at m, plays no role, justifying our assertion that the sub-principal symbols can be taken to be constant near m. This remark also yields the useful expression of  $I_{\gamma_0}(\kappa)$ involving only objects living on  $\Lambda_0$  given by formula (4.18).

# 4.6.7 Global solutions

Here is finally the main result of the chapter, namely the condition under which there exists a microlocal solution of the system (4.15) on a neighborhood of the whole critical lagrangean  $\Lambda_0$ . The hypothesis are the same as in paragraph 4.6.5. From now on, *n* is a generic integer, and not the dimension of the ambient symplectic manifold, which is 4.

**Theorem 4.6.9** Let  $\epsilon_j^E = \epsilon_j^E(h)$  be the constants defined by lemma 4.6.5.

• There exists a  $\mathbb{T}$ -valued constant  $(\lambda^E)^{out} = (\lambda^E)^{out}(h)$  admitting an asymptotic expansion in  $\geq -1$  powers of h whose terms are smooth functions of E, such that the system (4.15) admits a non-trivial microlocal solution  $u_h^E$ ,  $(h, E) \in \Gamma$ , on a full neighborhood of  $\Lambda_0$  if and only if the following two conditions are satisfied :

1. "first quantization condition" :

$$\frac{\epsilon_2^E(h)}{h} \in \mathbb{Z} + O(h^\infty);$$

2. "second quantization condition" :

$$(\lambda^E)^{out} + n\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon_1^E}{h}\ln(2h) - 2\arg\Gamma\left(\frac{i\epsilon_1^E/h + 1 + n}{2}\right) \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h^\infty),$$
  
where  $\frac{\epsilon_2^E(h)}{h} \sim n \in \mathbb{Z}.$ 

• Moreover, the first two terms in the asymptotic expansion of  $(\lambda^E)^{out}(h)$  are the following :

• for non-zero E,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left( \int_{\gamma_1^E} \alpha_0^E - \epsilon_{1,0}^E + \epsilon_{1,0}^E ln |\mathbf{c}| - \epsilon_{2,0}^E \arg \mathbf{c} \right) + \\ + \left( \int_{\gamma_1^E} \kappa^E + \epsilon_{1,1}^E ln |\mathbf{c}| - \epsilon_{2,1}^E \arg \mathbf{c} + \mu(\gamma_1^E) \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

where  $\gamma_1^E$  is a smooth family of loops on  $\Lambda_0^E$  such that  $\gamma_1^0$  satisfies the hypothesis of proposition 4.6.8,  $\mathbf{c} = \epsilon_{1,0}^E + i\epsilon_{2,0}^E$ , and  $\mu$  is the Maslov cocycle on  $\Lambda_0^E$ . For small E,  $\mu(\gamma_1^E)$  is a constant integer.

• for E = 0,

$$\frac{1}{h}\int_{\gamma_1^0}\alpha_0+I_{\gamma_1^0}(\kappa)+\mu(\gamma_1^0)\frac{\pi}{2}$$

where  $\kappa = \kappa^0$  is the sub-principal form of the system  $(P_1^0, P_2^0)$ .

The last point of this theorem follows from the expression for non-zero E (recall that  $\Lambda^E$  is then smooth) via proposition 4.6.8 : indeed, if we let  $\tilde{\mathbf{c}} = (f^E)^{-1}(0)$ , we have  $\Lambda_{\tilde{\mathbf{c}}} = \Lambda_0^E$ , and the family of loops  $\gamma_{\tilde{\mathbf{c}}}$  satisfies the hypothesis of proposition 4.6.8. The 1-form  $\kappa^E$  is defined by :

$$(\kappa^E \cdot \mathcal{X}_{p_1^0}, \kappa^E \cdot \mathcal{X}_{p_2^0}) = (df^E)^{-1} \cdot (r_1^E, r_2^E)$$

Writing E as a function of  $\tilde{\mathbf{c}}$ , this shows that  $\kappa^E$  is the sub-principal form of a system with principal symbol  $(p_1^0, p_2^0)$  and sub-principal symbol  $(df^E)^{-1} \cdot (r_1^E, r_2^E)$ . The value at m of this sub-principal symbol is  $r^0(m)$ , hence proposition 4.6.8 implies that

$$\int_{\gamma_1^E} \kappa^E + \Re(\boldsymbol{\epsilon}_1^0 \ln M^{-1} \tilde{\mathbf{c}})$$

has a limit I as  $E \to 0$ . Because  $\epsilon_1^E$  tends to  $\epsilon_1^0$  and  $\mathbf{c} = \epsilon_0^E$  is tangent to  $M^{-1}\tilde{\mathbf{c}}$  at  $\tilde{\mathbf{c}} = 0$ , this limit is equal to that of

$$\int_{\gamma_1^E} \kappa^E + \Re(\boldsymbol{\epsilon}_1^E \ln \mathbf{c}).$$

Moreover, we saw in (4.18) that it only depends on the value of the sub-principal form on  $\Lambda_0$ . But, on  $\Lambda_0$ ,  $(df^0)^{-1} \cdot (r_1^0, r_2^0) = r^0$ . Therefore, I is equal to the principal value  $I_{\gamma_0}(\kappa)$  of a system with principal symbol  $p^0$  and sub-principal symbol  $r^0$ .

The rest of the proof of this theorem will be split into two propositions 4.6.11 and 4.6.14.

We know from the geometry of the lagrangean fibration (section 4.6.4) that a neighborhood of the principal lagrangean  $\Lambda_0$  also contains regular tori  $\Lambda_0^E$ ,  $E \neq 0$ (E small) for which we already derived the quantization conditions (theorem 4.5.8). Therefore, one of our further tasks will be to show how these regular quantization conditions are contained in the "singular" quantization conditions announced above. This link is provided in paragraph 4.6.7.4

Finally, this theorem can be applied to "zoom" to a O(h) scale : let, as in remark 4.5.3,  $(\tilde{P}_1^t(h), \tilde{P}_2^t(h))$  be the semi-classical completely integrable system defined by

$$\tilde{P}_{i}^{t}(h) \stackrel{\text{def}}{=} P_{i}^{ht}(h),$$

where t is a 2-dimensional bounded parameter. From the constant  $\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h) = (\epsilon_{1}^{E}(h), \epsilon_{2}^{E}(h))$  given by lemma 4.6.5 we define  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{t}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \boldsymbol{\epsilon}^{ht}(h)$ . This  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{t}$  admits an asymptotic expansion in positive powers of h whose coefficients are smooth functions of t. The principal term is given by :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{0}^{t} = \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{0}^{E}}{\partial E}_{|E=0} t + \boldsymbol{\epsilon}_{1}^{0}$$

$$= -M^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f^E}{\partial E}_{\restriction E=0}(0) \cdot t + r(m)\right),$$

that is to say, in view of (4.12),

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_0^t = -M^{-1}.\tilde{r}^t(m).$$

Here  $\tilde{r}^t$  denotes the joint sub-principal symbol of the system  $(\tilde{P}_1^t, \tilde{P}_2^t)$ . Recall that its principal symbol is  $\tilde{p} = p^0$  and does not depend on t.

Similarly, the holonomy coefficient  $(\lambda^E)^{\text{out}}(h) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} (\lambda^E)_k^{\text{out}}$  has a *t*-dependent version  $(\tilde{\lambda}^t)^{\text{out}}(h)$  whose first terms are :

$$\frac{1}{h}(\lambda^0)_{-1}^{\text{out}} + \left(\frac{\partial(\lambda^{ht})_{-1}^{\text{out}}}{\partial h} + (\lambda^0)_0^{\text{out}}\right) + O(h).$$

We know from the theorem that  $\frac{1}{h}(\lambda^0)_{-1}^{\text{out}} = \frac{1}{h}\int_{\gamma_1^0} \alpha_0$ . For the other term, using the identification  $\boldsymbol{\epsilon}^E = \boldsymbol{\epsilon}_1^E + i\boldsymbol{\epsilon}_2^E$ , we have, for non-zero E:

$$\frac{\partial (\lambda^E)_{-1}^{\text{out}}}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \int_{\gamma_1^E} \alpha_0^E - \frac{\partial}{\partial E} \Re(\boldsymbol{\epsilon}_0^E - \boldsymbol{\epsilon}_0^E \ln \boldsymbol{\epsilon}_0^E)$$
$$= \frac{\partial}{\partial E} \int_{\gamma_1^E} \alpha_0^E + \Re(\ln(\boldsymbol{\epsilon}_0^E) \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_0^E}{\partial E}).$$

Therefore,

$$\frac{\partial (\lambda^{ht})_{-1}^{\text{out}}}{\partial h}_{|h=0} + (\lambda^0)_0^{\text{out}} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left( \frac{\partial}{\partial h} \int_{\gamma_1^E} \alpha_0^E \right) + \int_{\gamma_1^E} \kappa^E + \Re \left( \left( \epsilon_1^E + \frac{\partial \epsilon_0^E}{\partial E} \cdot t \right) \ln \epsilon_0^E \right) + \mu(\gamma_1^E) \frac{\pi}{2},$$

with E = ht. Using lemma 4.3.2, one easily shows that, for fixed  $h = h_0 \neq 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial h}_{\restriction h = h_0} \int_{\gamma_1^E} \alpha_0^E$  is equal to  $\int_{\gamma_1^E} \delta \kappa^E$ , where the 1-form  $\delta \kappa^E$  is given by

$$\delta \kappa^E . \mathcal{X}_{p^E} = -\frac{\partial f^E}{\partial E} . t$$

Therefore, the sum  $\delta \kappa^E + \kappa^E$  is the sub-principal form of a system with principal symbol  $p^E$  and sub-principal symbol  $\frac{\partial f^E}{\partial E} \cdot t + r^E$ , whose value at m is equal to  $\tilde{r}^t(m)$ . It follows that

$$\lim_{h \to 0} \int_{\gamma_1^E} (\delta \kappa^E + \kappa^E) + \Re \left( (\epsilon_1^E + \frac{\partial \epsilon_0^E}{\partial E} t) \ln \epsilon_0^E \right) = I_{\gamma_1^0} (\delta \kappa^0 + \kappa).$$

But  $\delta \kappa^0 + \kappa$  is the 1-form on  $\Lambda_0^0$  that takes the value  $\frac{\partial f^E}{\partial E}|_{E=0} t + r^0$  on  $(\mathcal{X}_{p_1^0}, \mathcal{X}_{p_2^0})$ : it is exactly the sub-principal form of the system  $(\tilde{P}_1^t, \tilde{P}_2^t)$ . We have proved the following result : **Corollary 4.6.10** The system  $(\tilde{P}_1^t, \tilde{P}_2^t)$  defined above admits a microlocal solution  $u_h^t$  on a neighborhood of the critical lagrangean  $\Lambda_0$  if and only if the following two conditions are satisfied :

1. "first quantization condition" :

$$\tilde{\epsilon}_2^t(h) \in \mathbb{Z} + O(h^\infty);$$

2. "second quantization condition" :

$$(\tilde{\lambda}^t)^{out} + n\frac{\pi}{2} - \tilde{\epsilon}_1^t \ln(2h) - 2\arg\Gamma\left(\frac{i\tilde{\epsilon}_1^t + 1 + n}{2}\right) \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h^\infty),$$

where  $\tilde{\epsilon}_2^t(h) \sim n \in \mathbb{Z}$ .

• Moreover, the first two terms in the asymptotic expansion of  $(\tilde{\lambda}^t)^{out}(h)$  are the following :

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma_1^0} \alpha_0 + \ I_{\gamma_1^0}(\tilde{\kappa}^t) + \mu(\gamma_1^0) \frac{\pi}{2},$$

where  $\gamma_1^0$  is a loop on  $\Lambda_0$  that satisfies the hypothesis of proposition 4.6.8 and  $\tilde{\kappa}$  is the sub-principal form of the system.

**Remark 4.6.8.** This corollary makes it easy to show that, provided the first quantization condition is satisfied, then the "semi-classical invariant"  $\tilde{\epsilon}_1^t(h)$  is intrinsically defined by the microlocal behavior of the system around the critical point. This gives an *a posteriori* justification of the claim following lemma 4.6.5 (remark 4.6.3).

Indeed, let *n* be the integer such that  $\tilde{\epsilon}_2^t(h) \sim n$  (we shall prove in paragraph 4.6.7.4 that  $\tilde{\epsilon}_2^t(h)$  – and even  $\epsilon_2^E(h)$  – are intrinsically defined by the system around *m*, hence so is *n*).

For bounded t,  $\tilde{\epsilon}_1^t(h)$  is uniformly bounded as  $h \to 0$ . As will be shown in the proof of proposition 4.6.11, for any integer  $n \in \mathbb{Z}$ , the function  $\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(ix+1+n))}{\Gamma(\frac{1}{2}(-ix+1+n))}$  is analytic for  $x \in \mathbb{R}$ , which implies that the function  $2 \arg \Gamma(\frac{1}{2}(ix+1+n))$  is locally analytic. Therefore, plugging in  $x = \tilde{\epsilon}_1^t(h)$  we obtain a semi-classical expansion in non-negative powers of h, whose terms are smooth  $\mathbb{T}$ -valued functions of t.

This in turn implies that the value of the cocycle  $[\tilde{\lambda}^t(h)]$  on  $\gamma_1^0$ , which gives the "second quantization condition" of corollary 4.6.10, can be written under the following form :

$$[\tilde{\lambda}^t(h)](\gamma_1^0) \equiv C^t(h) - \tilde{\epsilon}_1^t(h) \ln h + O(h^\infty),$$

where  $C^t(h)$  is a semi-classical expansion in  $\geq -1$  powers of h whose terms are smooth functions of t. Therefore,  $-\tilde{\epsilon}_1^t(h)$  is uniquely defined as the coefficient of  $\ln h$  in the expansion of  $[\tilde{\lambda}^t(h)](\gamma_1^0)$ .

Now, if the system is changed outside a neighborhood of the critical point, then only  $(\tilde{\lambda}^t)^{\text{out}}$  is perturbed, which means only a semi-classical perturbation

that has an asymptotic expansion in powers of h, which does not affect the  $\ln h$  coefficient.

**Remark 4.6.9.** In dimension 1, the singular Bohr-Sommerfeld conditions of Colin de Verdière and Parisse has been recently extended [29] to handle the case of multiple critical points of saddle type on the critical lagrangean. In our case as well, if we restrict to *focus-focus* singularities, I believe that the results presented here can be extended to treat k > 1 *focus-focus* points on  $\Lambda_0$ . This basically holds because the topology of such a  $\Lambda_0$  is just a k-times pinched torus, and the monodromy if equal to the k-th power of the simple monodromy. However, including other kinds of singularities should require a more difficult analysis, starting from the topological description of  $\Lambda_0$ . Understanding the work of Fomenko (e.g. [45]), should probably help coping with this difficulty.  $\Delta$ 

## 4.6.7.1 The microlocal bundle

As a starting point, we shall assume that the system fulfills the first quantization condition (theorem 4.6.7). This is of course a necessary condition for the existence of a global solution.

From this assumption, there exists a basic microlocal solution  $(u_h^E)^0$  on a neighborhood of the critical point m. As in paragraph 4.5.2, one can thus form a flat  $\bar{\mathbb{C}}_h^*$ -principal bundle  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Lambda_0^E)$  over the topological manifold  $\Lambda_0^E$ , with welldefined holonomy, by means of the trivializations (4.8). Note that we cannot reduce the structure group to  $\bar{\mathbb{C}}_h^{\text{*osc,cl}}$ . Of course, this actually yields a *family* of line bundles depending on the 2-dimensional parameter E, but gathering the results of paragraph 4.5.5 and proposition 4.6.4 we see that the trivialization functions in (4.8) can be chosen to depend smoothly on E.

As a consequence, the holonomy of  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Lambda_0^E)$  depends smoothly on E, in the sense that the elements  $(c^E)^{\alpha\beta}$  of the Čech cocycle  $c^E(h)$  representing it are  $C^{\infty}$  functions of E with values in  $\overline{\mathbb{C}}_h^*$ .

From this picture, we already know the abstract form of the quantization condition we are looking for : it is exactly the parameter dependent version of proposition 4.5.5. In other words, there exists a non-trivial microlocal solution  $u_h^E$  on a neighborhood of  $\Lambda_0$  if and only if for any family  $\gamma^E$  of loops in  $\Lambda_0^E$ that lie in that neighborhood, the value of  $c^E(h)$  on  $\gamma^E$  is uniformly  $1 + O(h^{\infty})$ (here, we are viewing  $c^E$  as a homomorphism from  $\pi_1(\Lambda_0^E)$  to  $\overline{\mathbb{C}}_h^*$ ). Let us now explicit this condition.

Let  $\Omega$  be a neighborhood of m in  $T^*X$  in which the normal form of lemma 4.6.5 applies. Then, as the system admits a microlocal solution on  $\Omega$ , any loop contained in  $\Omega \cap \Lambda_0^E$  has microlocally trivial holonomy. But for every small  $E \neq 0$ ,  $\Omega$  contains a generator  $\gamma_2^E$  of  $\pi_1(\Lambda_0^E)$ , namely the one associated with the  $S^1$  rotational symmetry of the fibration (it is an integral curve of the vector field  $\mathcal{X}_2$  of paragraph 4.6.3). Such a  $\gamma_2^E$  also exists for E = 0 but it is then homotopic to  $\{m\}$ . Anyhow, this yields :

$$c^E(\gamma_2^E) = 1 + O(h^\infty),$$

uniformly for small E (this is of course due to the fulfillment of the first quantization condition).

Thus  $c^E$  restricts to the quotient group  $\pi_1(\Lambda_0^E)/(\gamma_2^E)$ . For fixed E, every  $\pi_1(\Lambda_0^E)/(\gamma_2^E)$  is isomorphic to  $\mathbb{Z}$ . What's more, proposition 4.6.3 implies that the group bundle  $\pi_1(\Lambda_0^E)/(\gamma_2^E) \to U \ni E$  over a neighborhood U of 0 in  $\mathbb{R}^2$  is trivial :

$$\pi_1(\Lambda_0^E)/(\gamma_2^E) \simeq U \times \mathbb{Z}.$$

Let  $\bar{\gamma}_1^E$  be the generator of  $\pi_1(\Lambda_0^E)/(\gamma_2^E)$  equal to (E,1) in the above trivialization. The "second quantization condition" is now the requirement that  $c^E(\bar{\gamma}_1^E) = 1 + O(h^{\infty})$ .

Let us now examine that statement more closely. Recall that the principal bundle  $\dot{\mathcal{L}}_h(\Lambda_0^E)$  was defined through a set of local trivializations subordinated to a cover  $\cup \Omega_\alpha$  of a neighborhood of  $\Lambda_0$  in  $T^*X$ , such that on every  $\Omega_\alpha$  existed a basic microlocal solution  $(u_h^E)^\alpha$  of the system. We can assume that the critical point m is contained in a unique element of that cover, which we will denote by  $\Omega_0$ . Let us pick up a simple loop  $\gamma_1^0(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , in  $\Lambda_0$  representing the quotient class  $\bar{\gamma}_1^0$ , and enumerate  $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_\ell, \Omega_0$  the  $\Omega_\alpha$ 's encountered by  $\gamma_1^0(t)$  on its way from m back to m again. We will here choose  $\gamma_1^0$  so that it goes away from m via the local stable manifold of  $\Lambda_0$  and returns back to m via the local unstable manifold. Also, we will suppose that  $\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_\ell \subset \Omega$ .

Now for every fixed E, we choose a representative  $\gamma_1^E$  of  $\bar{\gamma}_1^E$ . Because of the triviality of the fibration outside m (4.14), the paths  $\gamma_1^E$  can be homotopically deformed so as to be close to  $\gamma_1^0$ , in the sense that their images enter  $\bigcup_{i=0}^{\ell} \Omega_i$ .

Then by definition, the value of  $c^E$  on  $\gamma_1^E$  is the product :

$$c^{E}(\gamma_{1}^{E}) = (c^{E})^{0,1}(c^{E})^{1,2}\cdots(c^{E})^{\ell-1,\ell}(c^{E})^{\ell,0}.$$

We are going to calculate this expression by splitting it in two parts : a local one – the product  $(c^E)^{0,1}(c^E)^{\ell,0}$  – and an outer one – the rest. For this purpose, we are free to fix the solutions  $(u_h^E)^i$  on  $\Omega_i$  used for the local trivialization of  $\mathcal{L}_h(\Lambda_0^E)$ ; let us make the following choice :

• choice 1 : for  $i \neq 0, 1, \ell$ ,  $(u_h^E)^i$  is any classical lagrangian distribution constructed as in proposition 4.5.7, with invariant half density given by the canonical Liouville density on  $\Lambda_0^E$ .

For  $i = 0, 1, \ell$ , we make use of the local analysis of the preceding paragraph 4.6.5. To begin with, we transform the system on  $\Omega$  to the normal form of lemma 4.6.5 by a unitary Fourier integral operator U(h). The microlocal solutions of the transformed system on  $\Omega$  are spanned by :

$$u_{\text{exact}}^{E} = \frac{1}{r} e^{i\frac{\epsilon_{1}^{E}}{h} \ln r} e^{i\frac{\epsilon_{2}^{E}}{h}\theta}.$$

Because of the first quantization condition, we know  $\frac{\epsilon_2^E}{h}$  to be microlocally equal to an integer  $n \in \mathbb{Z}$ . For any real  $\varepsilon$ , let  $u_{\varepsilon,n}$  be the tempered distribution on  $\mathbb{R}^2$ :

$$u_{\varepsilon,n} = \frac{1}{r} e^{in\theta} e^{i\varepsilon \ln r},$$

so that  $u_{\text{exact}}^E = u_{\frac{\epsilon_1^E}{h}, \frac{\epsilon_2^E}{h}}$ . The distribution  $u_{\varepsilon,n}$  is a solution of the system

$$\begin{cases} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} u_{\varepsilon,n} = n u_{\varepsilon,n} \\ \frac{1}{i} (r \frac{\partial}{\partial r} + 1) u_{\varepsilon,n} = \varepsilon u_{\varepsilon,n} \end{cases}$$
(4.19)

on  $\mathbb{R}^2$ , and it is easy to see that its Fourier transform is a solution of the same system with  $\varepsilon$  changed to  $-\varepsilon$ . Therefore  $u_{\frac{\epsilon_1^E}{h}, \frac{\epsilon_2^E}{h}}$  and  $\mathcal{F}_h^{-1}(u_{-\frac{\epsilon_1^E}{h}, \frac{\epsilon_2^E}{h}})$  are two solutions of our transformed system on  $\Omega$ . This allows us to complete our choice of local solutions by the following :

• choice 2 : 
$$\begin{cases} (u_h^E)^0 \sim U(u_{\frac{\epsilon_1^E}{h}, \frac{\epsilon_2^E}{h}}) & \text{on } \Omega_0\\ (u_h^E)^1 \sim U(u_{\frac{\epsilon_1^E}{h}, \frac{\epsilon_2^E}{h}}) & \text{on } \Omega_1\\ (u_h^E)^\ell \sim U(\mathcal{F}_h^{-1}u_{\frac{-\epsilon_1^E}{h}, \frac{\epsilon_2^E}{h}}) & \text{on } \Omega_\ell \end{cases}$$

## 4.6.7.2 The local holonomy at m

We give here an explicit expression for the product  $(c^E)^{1,0}(c^E)^{0,\ell}$ , which is defined to be the constant  $C^E(h)$  such that, on  $\Omega_0 \cap \Omega_\ell$ ,  $(u_h^E)^0 \sim C^E(u_h^E)^\ell$ .

**Proposition 4.6.11** The unique microlocal constant  $C^E(h)$  such that  $(u_h^E)^0 \sim C^E(u_h^E)^\ell$  on  $\Omega_0 \cap \Omega_\ell$  is given by :

$$C^{E}(h) \sim i^{-n} (2h)^{i\epsilon_{1}^{E}/h} \frac{\Gamma\left(\frac{i\epsilon_{1}^{E}/h + 1 + n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-i\epsilon_{1}^{E}/h + 1 + n}{2}\right)}$$

with  $\frac{\epsilon_2^E}{h} \sim n \in \mathbb{Z}$ .

**Proof**. Applying the Fourier integral operator  $U_h$ , we see that  $C_h^E$  is also defined to be the constant such that, microlocally on  $\Omega_0 \cap \Omega_\ell$ ,

$$\mathcal{F}_h u_{\frac{\epsilon^E}{h},\frac{\epsilon^E}{h}} \sim C_h^E u_{\frac{-\epsilon^E}{h},\frac{\epsilon^E}{h}}.$$

It turns out that the constant  $C_h^E$  thus defined is a microlocal version of an exact problem concerning the homogeneous distributions  $u_{\varepsilon,n}$  on  $\mathbb{R}^2$ .

We know that the tempered distributions  $u_{\varepsilon,n}$  are solutions of the system (4.19) in  $\mathbb{R}^2$ . They are in fact the only ones – up to multiplicative constants, naturally. To see this, one first restricts to  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , where the result is standard,

and then prove that the system (4.19) cannot admit linear combinations of derivatives of the Dirac distribution as solutions. Now,  $\mathcal{F}^{-1}u_{-\varepsilon,n}$  is also a tempered distribution and a solution of the same system, which leads to the first point of the following proposition :

**Proposition 4.6.12 ([16], [46])** *1. For any*  $(\varepsilon, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ *, there exists a unique constant*  $C(\varepsilon, n)$  *such that :* 

$$\mathcal{F} u_{\varepsilon,n} = C(\varepsilon, n) u_{-\varepsilon,n}.$$

2.  $C(\varepsilon, n)$  has the following expression :

$$C(\varepsilon, n) = i^{-|n|} 2^{i\varepsilon} \frac{\Gamma(\frac{i\varepsilon+1+|n|}{2})}{\Gamma(\frac{-i\varepsilon+1+|n|}{2})}.$$
(4.20)

The computation of  $C(\varepsilon, n)$  is done by testing  $u_{\varepsilon,n}$  on derivatives of Gaussian functions  $(\frac{\partial}{\partial z})^n e^{-\frac{z\overline{z}}{2}}$  and  $(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})^n e^{-\frac{z\overline{z}}{2}}$   $(z = re^{i\theta})$ .

**Remark 4.6.10.** Apparently, this formula appeared for the first time in Tate's thesis, during the year 1950. However, it has not been published until 1967, when it appeared in the book [16, chapter XV]. But at the same time as Tate wrote his thesis, the idea was in the air. Gelfand was studying homogeneous distributions in the real and published a closely related formula in [47]. The complex version, that is, exactly the result mentioned in the above proposition, appeared in the *addendum* of the French edition of the book by Gelfand & al. on distributions [46], where it is claimed to be published for the first time; the author was certainly unaware of Tate's work. Also interestingly enough, few years before (1951), a slightly different version of the same formula can be found in Bochner's work [8]. It is actually a generalization to homogeneous distributions on  $\mathbb{R}^k$ .

Now, let us (momentarily) denote by  $D(\varepsilon, n)$  the quantity :

$$D(\varepsilon, n) = i^{-n} 2^{i\varepsilon} \frac{\Gamma(\frac{i\varepsilon+1+n}{2})}{\Gamma(\frac{-i\varepsilon+1+n}{2})}.$$

The Gamma functions involved are analytic functions of  $\varepsilon$  that, for negative odd n, have simple poles at  $\varepsilon = 0$ . The quotient  $D(\varepsilon, n)$  is therefore analytic – with no pole – on the real line (we won't consider here analytic continuation to complex  $\varepsilon$ ). More precisely, for n = -2m - 1,  $m \ge 0$ , as the residues of the numerator and the denominator are the same, we have :  $D(0, -2m-1) = -i^{-n}$ . For non-zero  $\varepsilon$ , we can use the complement relation to prove that  $D(\varepsilon, n) =$  $D(\varepsilon, -n)$ . Then of course this also holds for  $\varepsilon = 0$ . Since  $D(\varepsilon, n)$  and  $C(\varepsilon, n)$ coincide for  $n \ge 0$ , we deduce that they are equal for all  $n \in \mathbb{Z}$ .

Finally, using the relation  $\mathcal{F}_h u(\xi, \eta) = \frac{1}{h} \mathcal{F} u(\frac{\xi}{h}, \frac{\eta}{h})$ , we terminate the proof of proposition 4.6.11.

**Remark 4.6.11.** One of the important features of the constants  $C(\varepsilon, n)$  (and hence of  $C^E$ ) is that they have modulus one. It might be interesting to see that, without any explicit calculation, this comes as a consequence of the unitarity of the Fourier transform with respect to the  $L^2$  norm. As this does not appear – to my knowledge – in the literature, here is the argument :

Acting on functions of the Schwartz space  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{F}$  commutes with the operator  $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ , and hence leaves stable its eigenspaces  $\mathcal{E}_n$ , associated to the eigenvalues  $2\pi n$ . These are of course the subspaces of the Fourier series decomposition in  $\theta$ variable :  $\mathcal{E}_n = \{e^{in\theta}f(r)\}$ . Here, f is a rapidly decreasing function. Therefore, there exists a transformation  $\mathcal{F}^n$  on  $\mathcal{E}_n$  such that

$$\mathcal{F}(e^{-in\theta}f(r))(\rho,\alpha) = e^{-in\alpha}\mathcal{F}^n(f)(\rho).$$

 $\mathcal{F}$  being an isometry for the norms  $L^2(\mathbb{R}^2, rdrd\theta)$  and  $L^2(\mathbb{R}^2, \rho d\rho d\alpha)$ , we deduce that  $\mathcal{F}^n$  is an isometry from  $L^2([0, \infty[, rdr)$  into  $L^2([0, \infty[, \rho d\rho)$ .

On the other hand, let  $\mathcal{G}$  be the transformation assigning to a function  $f(r) \in L^2([0,\infty[,rdr)$  the function

$$\mathcal{G}(f)(\varepsilon) = \int_0^\infty r^{i\varepsilon-1} f(r) r dr$$

**Lemma 4.6.13**  $\mathcal{G}$  is an isometry from  $L^2([0,\infty[,rdr)$  into  $L^2(\mathbb{R},d\varepsilon)$ .

**Proof.** The change of variable  $x = \ln r$  allows us to reduce the problem to the unitarity of the Fourier transform : let  $g(\varepsilon) = \mathcal{G}(f)(\varepsilon)$ . We find  $g(\varepsilon) = \mathcal{F}(f(e^x)e^x)(-\varepsilon)$ , which gives  $||g||_2 = ||f(e^x)e^x||_2 = \int_0^\infty |f(r)|^2 r dr = ||f||_2$ .  $\Box$ 

We know from the definition of  $C(\varepsilon, k)$  that for any function of the form

$$\varphi = \mathcal{F}(e^{-in\theta}f(r)),$$

we have :  $\langle \mathcal{F}(u_{(\varepsilon,k)}), \varphi \rangle = C(\varepsilon,k) \langle u_{(-\varepsilon,k)}, \varphi \rangle$ , that is :

$$\langle e^{ik\theta}r^{i\varepsilon-1}, \mathcal{F}\varphi \rangle = C(\varepsilon, k) \langle e^{ik\alpha}\rho^{-i\varepsilon-1}, \varphi \rangle,$$

or :

$$\langle r^{i\varepsilon-1}, e^{i(k-n)(\theta+\pi)}f(r)\rangle = C(\varepsilon, k)\langle \rho^{-i\varepsilon-1}, e^{i(k-n)\alpha}(\mathcal{F}^n f)(\rho)\rangle$$

Both sides of the equality vanish if  $n - k \neq 0$ . So let us assume k = n. We obtain :

$$\mathcal{G}(f)(\varepsilon) = (-1)^n C(\varepsilon, n) \mathcal{GF}^n f(-\varepsilon)$$

which is best depicted by the following commutative diagram :

All transformation involved  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}^n \text{ and } \varepsilon \to -\varepsilon)$  being unitary ones, one can

indeed deduce that  $\varepsilon \mapsto C(\varepsilon, n)$  is a function whose modulus is 1. 

**Remark 4.6.12.** The above introduced transformations  $\mathcal{G}$  and  $\mathcal{F}^n$  are related to Mellin's and Hankel's transforms  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{H}_n$  respectively (see [31] for their definitions). More precisely, we have :

$$(\mathcal{G}f)(\varepsilon) = (\mathcal{M}f)(s = i\varepsilon + 1) \text{ and } \mathcal{F}^n = i^{-n}\mathcal{H}_n.$$

(see for instance [34]). The previous remark thus yields the following remarkable relation between these transformations :

$$\forall f, \qquad \mathcal{M}f(i\varepsilon+1) = i^n C(\varepsilon, n).(\mathcal{M}\mathcal{H}_n f)(-i\varepsilon+1). \tag{4.21}$$

Remark 4.6.13. Formula (4.21) allows us to give another proof of the expression of  $C(\varepsilon, n)$ . First of all, since  $\mathcal{H}_{-n} = (-1)^n \mathcal{H}_n$ , it readily gives  $C(\varepsilon,n) = C(\varepsilon,-n)$ . Now for  $n \ge 0$  choose  $f_n = r^n e^{-\frac{r^2}{2}}$ .  $f_n$  is fixed by Hankel's transform of order n. On the other hand, it is easy to see that  $\mathcal{M}f_n(s) = 2^{\frac{s+n}{2}-1}\Gamma(\frac{s+n}{2}).$  This yields :

$$C(\varepsilon, n) = i^{-n} \frac{2^{s/2} \Gamma((s+n)/2)}{2^{\overline{s}/2} \Gamma((\overline{s}+n)/2)}, \text{ with } s = i\varepsilon + 1, \overline{s} = -i\varepsilon + 1,$$
  
easily identified with formula (4.20).

which is easily identified with formula (4.20).

 $\triangle$ 

#### 4.6.7.3The outer holonomy

Let us turn now to the study of the "outer holonomy", that is, the product

$$(C^E)^{\text{out}} = (c^E)^{1,2} \cdots (c^E)^{\ell-1,\ell}.$$

Recall that its quotient by the local holonomy  $C^E$  defined in the previous paragraph gives the value of the Čech cocycle  $c^{E}$  on  $\gamma_{1}^{E}$ .

•  $|(C^E)^{out}| = 1 + O(h^\infty);$ Proposition 4.6.14

- $\arg((C^E)^{out}) \in \mathbb{T}$  admits an asymptotic expansion in  $\geq -1$  powers of h, whose terms are smooth functions of E;
- for non zero E, the first two terms in that expansion are the following :

$$\frac{1}{h} \left( \int_{\gamma_1^E} \alpha_0^E - \epsilon_{1,0}^E + \epsilon_{1,0}^E ln |\mathbf{c}| - \epsilon_{2,0}^E \arg \mathbf{c} \right) + \\ + \left( \int_{\gamma_1^E} \kappa^E + \epsilon_{1,1}^E ln |\mathbf{c}| - \epsilon_{2,1}^E \arg \mathbf{c} + \mu(\gamma_1^E) \frac{\pi}{2} \right)$$

 $\triangle$ 

where  $\mathbf{c} = \epsilon_{1,0}^E + i\epsilon_{2,0}^E$ .

**Proof.** For non zero E,  $\Lambda_0^E$  is a regular lagrangean torus, and we know from proposition 4.5.6 that  $|c^E(\gamma_1^E)| \sim 1$ . This, together with the fact that  $|C^E| \sim 1$  too, implies that  $|(C^E)^{\text{out}}| \sim 1$  as well. Then of course, since we already knew that  $(C^E)^{\text{out}}$  is a smooth function of E, the results also holds if E = 0.

The second point in the proposition is essentially due to our choice of the microlocal solution  $(u_h^E)^{\ell}$  on  $\Omega_{\ell}$ . The distribution

$$\frac{1}{2\pi i h} \int e^{\frac{i}{h} \left( \langle (x,y), (\xi,\eta) \rangle - \epsilon_1^E \ln \rho + \epsilon_2^E \alpha \right)} \frac{|d\xi \wedge d\eta|}{\rho}$$

(by  $(\rho, \alpha)$  we always denote polar coordinates for  $(\xi, \eta)$  in the fiber of  $T^*\mathbb{R}^2$ ) is microlocally on  $\Omega_\ell$  equal to a classical oscillatory integral on  $\Lambda_0^E \cap \Omega_\ell$ , associated with the canonical Liouville half density on  $\Lambda_0^E$ , and smoothly depending on E.

**Remark 4.6.14.** This is of course the pendant of remark 4.6.6. Here as well, the phase function  $\varphi^E = \langle (x, y), (\xi, \eta) \rangle - \epsilon^E_{1,0} \ln \rho + \epsilon^E_{2,0} \alpha$  is best expressed in terms of complex coordinates  $z_1$  and  $z_2$ : we have

$$\varphi^E(z_1, z_2) = \Re(\bar{z_1}z_2 - \epsilon_0^E \ln z_2).$$

Now, since  $(u_h^E)^\ell$  was defined to be the image of that distribution by an classical Fourier integral operator, it is also a classical lagrangean distribution, as are all the other solutions  $(u_h^E)^i$ ,  $i \neq 0$ . We deduce from proposition 4.5.6 and paragraph 4.5.5 that for each  $i = 1, \ldots, \ell - 1$ , the argument of  $(c^E)^{i,i+1}$  admits a semi-classical expansion in  $\geq -1$  powers of h whose terms smoothly depend on E, as functions with values in  $\mathbb{T}$ . Hence so does their product  $(C^E)^{\text{out}}$ .

We turn now to the last point of the proposition, which requires a closer look at the principal phases of the solutions near the critical point m. Indeed, we know from the non-singular analysis of section 4.5 that the principal phases together with a section of the Keller-Maslov line bundle form an invariantly defined object that gives the first two terms of the Čech cocycle  $\lambda^{E}(h)$ .

First, let us extend the open sets  $\Omega_1$  and  $\Omega_\ell$  to be both equal to  $\Omega \setminus \{m\}$ . This is possible as the microlocal solutions  $(u_h^E)^1$  and  $(u_h^E)^\ell$  are actually welldefined on all  $\Omega$ . This ensures that for every non zero E,  $\bigcup_{i=1}^{\ell} \Omega_i$  is a full cover of the image of  $\gamma_1^E$ . Still assuming that E is non zero, we get from theorem 4.5.8 that  $\arg(c^E(\gamma_1^E))$  is, up to O(h) (and modulo  $2\pi$ ), equal to

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma_1^E} \alpha_0^E + \int_{\gamma_1^E} \kappa^E + \mu(\gamma_1^E) \frac{\pi}{2}.$$
(4.22)

On the other hand,  $c^E(\gamma_1^E)$  is by definition the value of the product

$$(C^E)^{\mathrm{out}}(c^E)^{\ell,1}$$

The problem is thus reduced to the computation of  $\arg(c^E)^{\ell,1}$ . It is unchanged by conjugation by a Fourier integral operator on  $\Omega$ .

Let us denote by  $\varphi_1^E(z_1)$  and  $\varphi_\ell^E(z_1, z_2)$  the phase functions of the oscillatory functions  $u_{\frac{\epsilon_1^E}{h}, \frac{\epsilon_2^E}{h}}$  and  $\mathcal{F}_h^{-1}u_{\frac{-\epsilon_1^E}{h}, \frac{\epsilon_2^E}{h}}$ . They have the following expressions (modulo  $2\pi h\mathbb{Z}$ ):

$$\varphi_1^E(z_1) \equiv \Re(\boldsymbol{\epsilon}_0^E \ln \bar{z_1}) \text{ and } \varphi_\ell^E(z_1, z_2) \equiv \Re(\bar{z_1}z_2 - \boldsymbol{\epsilon}_0^E \ln z_2).$$

As we already saw, for non zero E, they represent – of course – the same lagrangean manifold  $\Lambda_0^E = \{\bar{z}_1 z_2 = \epsilon_0^E\}$  (the terms  $\Re(\epsilon_0^E \ln \bar{z}_1)$  and  $\Re(\epsilon_0^E \ln z_2)$ ) are actually Legendre transforms of each other). Because  $\varphi_\ell^E(z_1, z_2)$  is defined with the help of the auxilliary variable  $z_2$  (the  $\theta$ -variable of section 4.4.6), it can produce a Maslov shift due to the signature  $\sigma_\ell$  of the real  $z_2$ -Hessian of  $\varphi_\ell^E(z_1, z_2)$ . One can show that this Hessian is the  $2 \times 2$  matrix whose lines are respectively identified with  $\overline{\epsilon_0^E}/\overline{z_2}^2$  and  $-i\overline{\epsilon_0^E}/\overline{z_2}^2$ . Its determinant is  $-|\frac{\epsilon_0^E}{z_2^2}|^2$ . If  $E \neq 0$  then  $\epsilon_0^E \neq 0$  so  $\sigma_\ell = 0$ . In other words, the value of Maslov's cocycle between  $u_{\frac{\epsilon_1E}{h}, \frac{\epsilon_2E}{h}}$  and  $\mathcal{F}_h^{-1}u_{\frac{-\epsilon_1E}{h}, \frac{\epsilon_2E}{h}}$  is zero.

Therefore, the general theory (section 4.5.3) implies that  $\arg(c^E)^{\ell,1}$  is equal, modulo O(h), to the difference of the total phases of  $\mathcal{F}_h^{-1}u_{\frac{-\epsilon_1^E}{h},\frac{\epsilon_2^E}{h}}$  and  $u_{\frac{\epsilon_1^E}{h},\frac{\epsilon_2^E}{h}}$ on  $\Lambda_0^E$ , that is to say :

$$\arg(c^{E})^{\ell,1} = \frac{1}{h} \left( \Re(\bar{z}_{1}z_{2} - \boldsymbol{\epsilon}^{E}\ln z_{2}) - \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}\ln \bar{z}_{1}) \right) + O^{E}(h) =$$
$$= \frac{1}{h} \left( \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}) - \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}\ln \boldsymbol{\epsilon}^{E}) \right) + O^{E}(h) =$$
$$= \frac{1}{h} \left( \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}_{0}) \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}_{0}\ln \boldsymbol{\epsilon}^{E}_{0}) \right) - \Re(\boldsymbol{\epsilon}^{E}_{1}\ln \boldsymbol{\epsilon}^{E}_{0}) + O^{E}(h).$$

Finally, together with equation (4.22), we get that the first two terms in the expansion of  $(C^E)^{\text{out}}$  are, for non zero E:

$$\frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_1^E}\alpha_0^E - \Re(\boldsymbol{\epsilon}_0^E) + \Re(\boldsymbol{\epsilon}_0^E\ln\boldsymbol{\epsilon}_0^E)\right) + \left(\int_{\gamma_1^E}\kappa^E + \mu(\gamma_1^E)\frac{\pi}{2} + \Re(\boldsymbol{\epsilon}_1^E\ln\boldsymbol{\epsilon}_0^E)\right),$$

and the proof of proposition 4.6.14 is completed.

Of course, this also terminates the proof of theorem 4.6.9.

## 4.6.7.4 Recover the regular conditions

The aim of this paragraph is to show how the quantization conditions of theorem 4.6.9, when restricted to a non-singular lagrangean, are equivalent to the regular quantization conditions of theorem 4.5.8.

 $\square$ 

Let us fix  $E \neq 0$ . We get a smooth holonomy 1-form  $[\lambda_h^E]$  whose action on a basis of the  $H_1$  of the torus  $\Lambda_0^E$  gives the two quantization conditions. Let  $\gamma_1^E$ and  $\gamma_2^E$  be, as previously, loops on  $\Lambda_0^E$  representing such a basis.

The loop  $\gamma_2^E$  can be assumed to lie in the neighborhood  $\Omega$  where the normal form applies. In the linearized coordinates, one can choose  $\gamma_2^E$  to be a simple orbit of the  $\mathcal{X}_2$  vector field. On each point of that orbit we saw that the solutions were spanned by

$$\frac{1}{r}e^{i\frac{\epsilon_1^E}{h}\ln r}e^{i\frac{\epsilon_2^E}{h}\theta}.$$

Therefore, the value of  $[\lambda_h^E]$  on  $\gamma_2^E$  is exactly the monodromy coefficient  $\frac{2\pi\epsilon_2^E(h)}{h}$ . The quantization condition given by theorem 4.5.8 is thus

$$\frac{2\pi\epsilon_2^E}{h} \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h^\infty),$$

which is indeed the same as the first singular quantization condition of theorem 4.6.9.

**Remark 4.6.15.** This simple observation gives rise, for non zero E, to an intrinsic definition of the semi-classical expansion  $\epsilon_2^E(h)$  introduced in lemma 4.6.5, namely :

$$\epsilon_2^E(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2^E} \lambda^E(h)$$

Since  $\epsilon_2^E$  is smooth at E = 0, this implies that it is intrinsically defined by the microlocal system on a neighborhood of m, that is, independently of the Fourier integral operator U.

Let us turn now to the second quantization condition. We know that the action of  $[\lambda^E]$  on  $\gamma_1^E$  is given by the argument of the quotient  $(C^E)^{\text{out}}/C^E$ . Using Stirling's formula for  $\arg(\Gamma(z)) \equiv \Im(\ln \Gamma(z))$ , with  $z = \frac{i\bar{\epsilon}(h)}{2h} + \frac{1}{2}$  ( $\epsilon(h) = \epsilon_1^E(h) + i\epsilon_2^E(h)$ ; recall that if  $E \neq 0$ , the principal term  $\epsilon_0$  of  $\epsilon(h)$  is non-zero), one can perform a very nice cancellation of undesirable terms in the local holonomy  $C^E$ .

Indeed, one finds that

$$2\arg(\Gamma(z)) \equiv \frac{1}{h} \left( \Re(\epsilon \ln \epsilon) - \Re(\epsilon) + \Im(\epsilon) \frac{\pi}{2} - \Re(\epsilon \ln(2h)) \right) + O(h).$$

Here of course, O(h) depends on E. This gives

$$\arg(C^E) \equiv \frac{1}{h} \left( \Re(\boldsymbol{\epsilon} \ln \boldsymbol{\epsilon}) - \Re(\boldsymbol{\epsilon}) \right) + O(h),$$

that is,

$$\arg(C^E) \equiv \frac{1}{h} \Re(\boldsymbol{\epsilon}_0 \ln \boldsymbol{\epsilon}_0 - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \Re(\boldsymbol{\epsilon}_1 \ln \boldsymbol{\epsilon}_0) + O(h).$$

We thus find that, if  $E \neq 0$ ,

$$\int_{\gamma_1^E} \lambda^E(h) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_1^E} \alpha_0^E + \int_{\gamma_1^E} \kappa^E + \mu(\gamma_1^E) \frac{\pi}{2} + O(h),$$

which gives the regular quantization condition of theorem 4.5.8.

# 4.7 Structure of the joint spectrum

This section is devoted to the application of our microlocal study to the precise study of the joint spectrum of 2-degree of freedom quantum integrable systems around the critical value of a *focus-focus* singularity.

More precisely, we shall assume in all this section that we are given two commuting essentially self-adjoint *h*-pseudodifferential operators of order zero  $P_1(h), P_2(h)$  on a 2-dimensional manifold X, with the following properties :

- the joint principal symbol  $p = (p_1, p_2)$  is proper with connected leaves;
- p admits a critical point m of *focus-focus* type, with critical value  $0 \in \mathbb{R}^2$ , such that the critical set  $\Lambda_0 = p^{-1}(0)$  has m as its only critical point;
- at least one of the  $P_j(h)$ 's is a classical elliptic pseudodifferential operator in the sense of Hörmander (for instance,  $P_1(h)$  is a Schrödinger operator :

$$P_1(h) = \frac{h^2}{2}\Delta_g + V(x),$$

for some Riemannian metric g on X).

The last point implies that the solutions  $u_h$  of  $P_j(h)u_h = 0$  (j = 1, 2) cannot have a wave front set at infinity (see [24]), which allows us to microlocalize  $u_h$ on the lagrangean level set  $\Lambda_0 = p^{-1}(0)$ .

Note also that  $P_1(h)$  and  $P_2(h)$  really commute (and not only modulo  $O(h^{\infty})$ ). This assumption is perhaps unnecessary, but we take it in order to use the definition of the joint spectrum from [17].

A typical example of this situation would be a Schrödinger operator on a surface of revolution with a radial potential, like the quantum spherical pendulum [32] or the quantum Champagne bottle [19]. As a matter of fact, we will illustrate our results with the latter example, thanks to numerics kindly provided by M.Child.

#### 4.7.1 The joint spectrum

Let  $\Sigma(h)$  be the joint spectrum of the operators  $P_1(h)$  and  $P_2(h)$ . We know from [17] that the assumption of properness for the momentum map p implies that the intersection of  $\Sigma(h)$  with any compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  is a discrete spectrum : each  $E(h) = (E_1(h), E_2(h)) \in \Sigma(h) \cap K$  is isolated and the joint eigenspace

$$F_{E(h)} = \{\varphi(h) \in L^2(X), (P_1(h) - E_1(h))\varphi(h) = (P_2(h) - E_2(h))\varphi(h) = 0\}$$

has finite dimension.

**Theorem 4.7.1** There is a compact neighborhood K of  $0 \in \mathbb{R}^n$  and an  $h_0 > 0$ such that all the joint eigenvalues  $E(h) \in \Sigma(h) \cap K$  for  $h < h_0$  are simple. Furthermore, the distance between two distinct joint eigenvalues is bounded below by some finite power of h. **Proof**. This is a consequence of proposition 4.6.4, applied to the operators  $P_j^E(h) \stackrel{\text{def}}{=} P_j(h) - E_j$ . Indeed, let  $K \subset \mathbb{R}^n$  be a neighborhood of zero such that this proposition holds uniformly for  $E = (E_1, E_2) \in K$ . Let  $\psi_1(h)$  and  $\psi_2(h)$  be two normalized joint eigenfunctions for the joint eigenvalue E(h), such that  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0$ . If we can find such eigenfunctions for a set of values of h accumulating at zero, then  $\psi_1(h)$  and  $\psi_2(h)$  are both microlocal solutions (see section 4.4.5) to the equation

$$(P_j(h) - E_j(h))\psi_k(h) \sim 0, \qquad j = 1, 2 \quad k = 1, 2.$$

Therefore, their wave front sets are included in a compact  $W \subset T^*X$ . Let  $\pi : T^*X \to X$  be the standard projection and let U be an open neighborhood of  $\pi(W)$  such that  $\overline{U}$  is compact. Then,

$$WF_h(\psi_k) \cap (T^*(X \setminus U)) = \emptyset \qquad (k = 1, 2)$$

and because  $\psi_k$  cannot have any wave front set at infinity,  $\psi_k$  is actually  $O(h^{\infty})$ on  $X \setminus U$ . Consequently if we let  $\chi$  be a smooth function with support in U and equal to 1 on  $\pi(W)$  then

$$\|\chi\psi_k\|_{L^2(X)} = \|\psi_k\|_{L^2(X)} + O(h^{\infty}) = 1 + O(h^{\infty}),$$
  
and  $\langle\chi\psi_1, \chi\psi_2\rangle = O(h^{\infty}).$ 

That allows us to replace, in the following,  $\psi_k$  by  $\chi \psi_k$ .

Because of proposition 4.6.4, there exists a constant  $C(h) \in \mathbb{C}_h$  such that

$$\psi_1(h) \sim C(h)\psi_2(h) \text{ on } T^*U.$$
 (4.23)

Combined as before with the fact that nothing happens at infinity, equation (4.23) implies, by taking scalar products, that C(h) simultaneously satisfies  $|C(h)| = 1 + O(h^{\infty})$  and  $C(h) = 0 + O(h^{\infty})$ , which is impossible. This proves that for small h all joint eigenvalues E(h) must be simple.

Now, if E(h) and E'(h) are distinct joint eigenvalues but differing only by  $O(h^{\infty})$ , the same argument applies to the eigenfunctions  $\psi_1(h)$  and  $\psi_2(h)$  associated to E(h) and E'(h), and thus proves the last statement of the theorem.  $\Box$ 

This theorem extends the results of [17], where it is shown that the eigenvalues are simple as long as K does not meet any critical value of the momentum map p. Note that this latter statement comes as a consequence of our proposition 4.5.1 as well.

Finally, remark that the proof of theorem 4.7.1 actually shows that joint eigenfunctions  $\psi(h)$  corresponding to joint eigenvalues  $E(h) \in K$  are in one-to-one correspondence with microlocal solutions of the system

$$(P_j(h) - E_j(h))u_h \sim 0$$

in a neighborhood of  $\bigcup_{E \in K} \Lambda_E$ . In other words, these eigenfunctions are determined by the quantization conditions of theorem 4.6.9.

# 4.7.2 Quantum monodromy

Away from the critical value of the momentum map p, the joint spectrum locally looks like a lattice  $h\mathbb{Z}^2$ . However, simply patching these lattices together around 0 is not possible. This phenomenon is called *quantum monodromy* and is described in details in [82]. Let us take advantage of section 4.5 to give a short description of it.

If  $c_0$  is regular value of p, then on a neighborhood B of  $c_0$  there exists a map  $f(h): B \to \mathbb{R}^2$  that "asymptotically identifies  $\Sigma(h) \cap B$  with the straight lattice  $h\mathbb{Z}^{2^n}$ , in the following sense : f(h) is an elliptic semi-classical symbol of order zero such that for any family  $E(h) = (E_1(h), E_2(h)) \in B, h \in H$ ,

 $E(h) \in \Sigma(h) \cap B + O(h^{\infty})$  if and only if  $f(E(h); h) \in h\mathbb{Z}^2 + O(h^{\infty})$ . (4.24)

Indeed, for  $c \in B$  let  $\lambda_c(h)$  be the semi-classical holonomy 1-form on  $\Lambda_c$  defined in proposition 4.5.5; then because of theorem 4.5.8, one can choose

$$f(c;h) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1(c)} \lambda_c(h), \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2(c)} \lambda_c(h) \right), \tag{4.25}$$

where  $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$  is any smooth basis of  $H_1(\Lambda_c)$ .

It turns out that up to conjugation of f(h)/h by an element of the affine group with integer coefficients  $GA(2,\mathbb{Z})$  such a map f(h) is unique modulo  $O(h^{\infty})$ . If  $\delta$  is a simple loop through  $c_0$  enclosing the critical value 0 and small enough not to enclose any other critical value of the momentum map, we can cover its image by a finite number of open ball  $B_0, \ldots, B_{\ell}$ . Assuming that  $B_0 = B$ , we can construct a corresponding map  $f_1(h)$  on  $B_1$  that coincide with f(h) on  $B_0 \cap B_1$ . Continuing this way, we end up with a map  $f_{\ell}(h)$  on  $B_{\ell}$ , and an element  $\mu(\delta) \in GA(2,\mathbb{Z})$  such that

$$\frac{1}{h}f_{\ell}(h) = \mu(\delta) \circ (\frac{1}{h}f(h)) + O(h^{\infty}).$$

 $\mu(\delta)$  depends only on the homotopy class of  $\delta$  and is called the *quantum mon*odromy of the joint spectrum. Because the  $f_j(h)$ 's can be chosen as in equation (4.25), this  $\mu(\delta)$  is actually dual to the classical monodromy of the bundle  $\pi_1(\Lambda_c) \to c$ :

**Proposition 4.7.2 ([82])** If  $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$  and  $\epsilon$  are chosen as in proposition 4.6.3 then

$$\mu(\delta) = \iota \left( \begin{array}{cc} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{array} \right),$$

where  $\iota$  is the inclusion  $GL(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow GA(2,\mathbb{R})$  such that for any  $M \in GL(2,\mathbb{R})$ , the origin  $0 \in \mathbb{R}^2$  is fixed by  $\iota(M)$ .

Chapter 3 shows how this quantum monodromy can be told from a picture of the spectrum by detecting the change in the lattice structure of the joint spectrum around the critical value. One of the ways of doing this is to *unwind* the spectrum onto  $\mathbb{R}^2$ , in the following way. Suppose  $\delta$  is actually drawn on the universal cover of the punctured plane :  $\tilde{W} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  and let  $\tilde{B}_j$  be the open cover of its image such that  $\pi(\tilde{B}_j) = B_j$ . Then the maps  $f_j(h)$  on  $B_j$  define a global map  $\hat{f}(h)$  on  $\tilde{B}_0 \cup \tilde{B}_1 \cdots \cup \tilde{B}_\ell$ . By definition we have

$$\hat{f}(\delta(1);h)/h = \mu(\delta) \circ \hat{f}(\delta(0);h)/h.$$

Since the restriction of  $\hat{f}(h)$  to the points belonging to the spectrum  $\pi^{-1}(\Sigma(h))$  takes values in  $h\mathbb{Z}^2 + O(h^{\infty})$ , there is for small h a unique map

$$\tilde{f}(h): \pi^{-1}(\Sigma(h)) \cap \bigcup_{j} \tilde{B}_{j} \to h\mathbb{Z}^{2}$$

that coincides with  $\hat{f}(h)$  modulo  $O(h^{\infty})$ . This map is of course as well defined on the intersection with  $\pi^{-1}(\Sigma(h))$  of any domain  $\tilde{\mathcal{D}}$  of  $\tilde{W}$  that projects into a small (but fixed) annulus  $\mathcal{D}$  around the critical value 0, and is called the *unwinding* (or *developing*) map of the spectrum.

For instance, if one uses this map to unwind a sequence of points  $A_j(h) \in \pi^{-1}(\Sigma(h)) \cap \tilde{B}_j$  with  $\pi(\tilde{A}_\ell(h)) = \pi(\tilde{A}_0(h))$  (see figure 4.5), then one obtains an integral open polygonal line  $(A_0, \ldots, A_\ell)$  in  $h\mathbb{Z}^2$ , whose extremities satisfy

$$A_{\ell}/h = \mu(\delta)(A_0/h).$$

For short, we shall allow us to refer to such a sequence of points  $A_j$  as a *closed* polygonal line in  $\Sigma(h)$  whenever these points are close enough to each other so that the line segments  $[A_j, A_{j+1}]$  lie in  $\hat{f}(\tilde{\mathcal{D}}; h)$ . The "segment" between two consecutive points  $\tilde{A}_j(h)$  and  $\tilde{A}_{j+1}(h)$  is by definition the preimage in  $\tilde{\mathcal{D}}$  of  $[A_j, A_{j+1}]$ .

# 4.7.3 The exact counting function

The purpose of this paragraph is to count the number of joint eigenvalues inside a simple closed polygonal line around the critical value 0. Let  $L_0(h)$  be the subset of  $\Sigma(h) \cap \mathcal{D}$  of joint eigenvalues E(h) that are unwound on the horizontal line  $\{y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$  (in other words,  $\tilde{f}_2(\pi^{-1}(E(h)); h) = 0$ ). Because of proposition 4.7.2,  $L_0(h)$  is pointwise fixed by the quantum monodromy  $\mu(\delta)$ . That means that any closed polygonal line  $\tilde{\mathcal{A}}(h) = (\tilde{\mathcal{A}}_0(h), \ldots, \tilde{\mathcal{A}}_\ell(h))$  on  $\Sigma(h)$  starting on  $L_0(h)$  is unwound as a *closed* polygonal line  $\mathcal{A}(h) = (A_0(h), \ldots, A_\ell(h))$  in  $\mathbb{R}^2$ (see figure 4.5).

It is easy to see that if we have another such polygonal line on  $\Sigma(h) \cap \mathcal{D}$  that lies *inside* the previous one, then the number of joint eigenvalue *between* these two is exactly the number of *h*-integral lattice points between the two unwound polygons (see lemma 4.7.4). As a consequence, there should be a universal index  $\nu \in \mathbb{Z}$  such that the number  $N_h(\tilde{\mathcal{A}}(h))$  of joint eigenvalues inside  $\tilde{\mathcal{A}}(h)$  be

$$N_h(\mathcal{A}(h)) = N_h(\mathcal{A}(h)) + \nu,$$



FIG. 4.5 – Unwinding of a sequence of points in  $\Sigma(h) \cap D$ , in the case of the spectrum of the Champagne bottle (numerics by M.Child). In the case b), the starting point belongs to  $L_0(h)$ , which implies that the unwound line is closed.

where  $N_h(\mathcal{A}(h))$  denotes the number of *h*-integral points inside the polygon A(h). Note that the latter is given by Pick's formula [74]:

$$N_h(\mathcal{A}(h)) = \operatorname{Area}(\mathcal{A}(h)) + \frac{\mathbb{Z}\operatorname{Length}(\mathcal{A}(h))}{2} + 1, \qquad (4.26)$$

where  $\mathbb{Z}$ Length $(\mathcal{A}(h))$  is the number of *h*-integral points on the boundary.

The result is actually that  $\nu = 0$ :

**Theorem 4.7.3** Let  $\tilde{\mathcal{A}}(h) = (\tilde{\mathcal{A}}_0(h), \ldots, \tilde{\mathcal{A}}_\ell(h))$  be a simple closed polygonal line on  $\Sigma(h)$  starting on  $L_0(h)$  and enclosing one the origin, and let  $\mathcal{A}(h) = (\mathcal{A}_0(h), \ldots, \mathcal{A}_\ell(h) = \mathcal{A}_0(h))$  be the unwound polygonal line in  $\mathbb{R}^2$ . Denote by  $N_h(\tilde{\mathcal{A}}(h))$  the number of joint eigenvalues inside  $\tilde{\mathcal{A}}(h)$  (counting the points in the boundary), and similarly denote by  $N_h(\mathcal{A}(h))$  the number of h-integral points inside the polygon  $\mathcal{A}(h)$ , counting the boundary.

Then

 $N_h(\tilde{\mathcal{A}}(h)) = N_h(\mathcal{A}(h)).$ 

In other words, the recipe to calculate  $N_h(\tilde{\mathcal{A}}(h))$  is simply to unwind  $\tilde{\mathcal{A}}(h)$  and then apply Pick's formula (4.26).

**Proof.** The idea is to cut the "polytope" delimited by  $\hat{\mathcal{A}}(h)$  into two halves separated by  $L_0$ ; then on each part the control over the joint eigenvalues given by theorem 4.6.9 is used to shift the problem into a region where the result will be obvious, due to the following fact :

**Lemma 4.7.4** if B is a simply connected open subset of  $\mathcal{D}$ , then for any closed polygonal line  $\tilde{\mathcal{C}}(h)$  in  $\Sigma(h) \cap B$ , the unwound line  $\mathcal{C}(h)$  is also closed and we have

$$N_h(\mathcal{C}(h)) = N_h(\mathcal{C}(h)).$$

This lemma also proves the existence of the index  $\nu$  claimed before the statement of the theorem, and this implies that we can choose any particular  $\tilde{\mathcal{A}}(h)$  to prove the theorem. So let us assume that the intersection of the polytope delimited by  $\tilde{\mathcal{A}}(h)$  with the horizontal lines  $\epsilon_2 = hn$  are segments whose extremities are vertices of  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

Now, let us apply theorem 4.6.9 to the operators  $P_j^E(h) \stackrel{\text{def}}{=} P_j(h) - E_j$ , and keep the notations from the statement of this theorem. We know from lemma 4.6.5 that the map

$$E = (E_1, E_2) \to \boldsymbol{\epsilon}^E(h) = (\boldsymbol{\epsilon}_1^E(h), \boldsymbol{\epsilon}_2^E(h))$$

is an elliptic semi-classical symbol of order zero. It is therefore for small h a diffeomorphism of a compact neighborhood K of zero into its image; this implies that the determination of the joint spectrum in K amounts to that of the corresponding values of  $\boldsymbol{\epsilon}^{E}(h)$ , which we shall hence simply denote by  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ . From now on, we shall assume that the annulus  $\mathcal{D}$  defined in the previous paragraph is a subset of K.

Let us look for solutions satisfying  $\epsilon_2 \ge 0$ . Let  $g_1(h)$  and  $g_2(h)$  be the following functions :

$$\frac{2\pi}{h}g_1(\epsilon;h) = (\lambda^E)^{\text{out}} + \epsilon_2 \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon_1}{h}\ln(2h) - 2\arg\Gamma\left(\frac{i\epsilon_1/h + 1 + \epsilon_2}{2}\right),$$
  
and  $g_2(\epsilon;h) = \epsilon_2.$ 

Because of the analyticity properties of  $\Gamma$ , these functions are holomorphic in  $\epsilon_2 \ge 0$ . The map  $f(E;h) \stackrel{\text{def}}{=} g(\epsilon^E(h);h)$  satisfies equation (4.24) thanks to theorem 4.6.9. Because of the ln h term in it, it is *not* a standard semi-classical symbol globally; but we know from paragraph 4.6.7.4 that it is so for E in a small compact at finite distance from the origin. Moreover, because of remark 4.6.15, it must satisfy equation (4.25) as well, where  $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$  is the basis given in proposition 4.6.3.

Therefore, the joint spectrum is spread on the horizontal lines  $\epsilon_2 = hn$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , and the set  $L_0(h)$  lies in the line  $\epsilon_2 = 0$ . Our problem is now to count the number of joint eigenvalues inside the intersection  $\tilde{\mathcal{A}}^+(h)$  of the half plane  $\epsilon_2 \ge 0$  with the polytope delimited by  $\tilde{\mathcal{A}}(h)$  (figure 4.6). Let us denote by  $\tilde{I}_n(h)$  the set of joint eigenvalues contained in  $\tilde{\mathcal{A}}^+(h)$  and satisfying  $\epsilon_2 = hn$ .



FIG. 4.6 – The upper half of the polytope.

From now on, we forget the negative half of our polytope, and label

$$\tilde{A}_0, \ldots, \tilde{A}_\ell$$

the consecutive vertices of  $\tilde{\mathcal{A}}^+(h)$ , starting and ending on  $L_0(h)$ . We denote by  $N_h(\tilde{\mathcal{A}}(h))$  the number of joint eigenvalues inside  $\tilde{\mathcal{A}}^+(h)$ , and by  $N_h(\mathcal{A}(h))$  the number of *h*-integral points inside the polytope delimited by the unwound points  $A_0, \ldots, A_\ell, A_0$ . The theorem will be proved provided we show that  $N_h(\tilde{\mathcal{A}}(h)) = N_h(\mathcal{A}(h))$ .

The next step of the proof is now to translate  $\tilde{\mathcal{A}}^+(h)$  far from the origin, as follows (figure 4.7). The domain  $\mathcal{D}$  where the unwinding map is defined can always be chosen such that there exists an integer  $k(h) \in \mathbb{Z}$  such that the origin is outside of the polytope  $\tilde{\mathcal{C}}(h) = (\tilde{\mathcal{C}}_0(h), \dots, \tilde{\mathcal{C}}_{\ell}(h))$  defined by

$$\tilde{f}(\tilde{C}_{j}(h);h) = \tilde{f}(\tilde{A}_{j}(h);h) + h(k(h),0).$$



FIG. 4.7 – Translation of the polytope

Of course, the set of joint eigenvalues inside  $\tilde{\mathcal{C}}(h)$  satisfying  $\epsilon_2 = hn$  is in bijection with  $\tilde{I}_n(h)$ , which implies that

$$N_h(\tilde{\mathcal{C}}(h)) = N_h(\tilde{\mathcal{A}}(h))$$

On the other hand, because  $f(\cdot; h)$  is a valid unwinding function in a region containing both  $\tilde{\mathcal{A}}(h)$  and  $\tilde{\mathcal{C}}(h)$ , the unwinding  $\mathcal{C}(h)$  of  $\tilde{\mathcal{C}}(h)$  is by definition the translation of  $\mathcal{A}(h)$  by the horizontal vector h(k(h), 0). It has therefore the same number of interior points :

$$N_h(\mathcal{C}(h)) = N_h(\mathcal{A}(h)).$$

But lemma 4.7.4 yields

$$N_h(\mathcal{C}(h)) = N_h(\mathcal{C}(h)),$$

which finally proves the theorem.

## 4.7.4 Shape of the spectrum near the critical value

We investigate here the shape of the joint spectrum in a region of size O(h)near the origin, in terms of the  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  variables. We already know that the joint eigenvalues are distributed on the horizontal lines  $\epsilon_2 = hn$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . It remains to study their repartition on each of these lines. For this purpose, we fix  $n \in \mathbb{Z}$  and denote by  $x = \epsilon_1/h$  the generic variable on  $\{\epsilon_2 = hn\}$ . Of course, the results will be based upon corollary 4.6.10, whose notations we use here, and which we express in the following way :

**Proposition 4.7.5 (corollary 4.6.10)** Let K a compact neighborhood of the origin in  $\mathbb{R}^2$ . For any family  $E(h) = (E_1(h), E_2(h)) \in (hK)$  such that  $\epsilon_2^{E(h)}(h) = hn + O(h^{\infty})$   $(n \in \mathbb{Z})$ , the following characterization holds :

$$E(h) \in \Sigma(h) + O(h^{\infty})$$
 if and only if

$$|n|\frac{\pi}{2} - x(h)\ln(2h) - 2\arg\Gamma\left(\frac{ix(h) + 1 + |n|}{2}\right) + f_n(x(h);h) \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h^{\infty}),$$

with  $x(h) = \epsilon_1^{E(h)}(h)/h$ . Here  $f_n(h)$  is a symbol of the form :

$$f_n(x;h) = \frac{A}{h} + xB + nC + D + \mu \frac{\pi}{2} + hf_{n,1}(x) + h^2 f_{n,2}(x) + \cdots,$$

for some real constants A, B, C, D.

**Proof.** Of course, in view of corollary 4.6.10 – applied to the system  $\tilde{P}_j^t = P_j - ht_j$ , j = 1, 2 –, A is just the action integral on the critical lagrangean :  $A = \int_{\gamma_1^0} \alpha_0$ , and it only remains to prove that there exists constants B, C, D such that

$$I_{\gamma_1^0}(\tilde{\kappa}^t) = x(h)B + nC + D + O(h),$$

where t and x(h) are linked by

$$x(h) = \tilde{\epsilon_1}^t(h) = \frac{1}{h} \epsilon_1^{ht}(h).$$

Because the sub-principal symbols of  $\tilde{P}_j^t$  are affine functions of t:  $\tilde{r}^t = r - t$ , it is easy to deduce from formula (4.18) of proposition 4.6.8 that  $I_{\gamma_1^0}(\tilde{\kappa}^t)$  is affine in t. The result then follows from the fact that the principal part of  $\tilde{\epsilon}^t(h) = (x(h), n + O(h^\infty))$  is also an – invertible – affine function of t.

We study the distribution of joint eigenvalues on the line  $\epsilon_2 = hn$  by investigating the *spacings* between two consecutive eigenvalues.

**Theorem 4.7.6** For any  $n \in \mathbb{Z}$ , let  $E_k(h)$  be the sequence of joint eigenvalues in  $\{\epsilon_2 = hn\} \cap (hK)$ , such that the corresponding variables  $x_k(h)$  form (for each h) a strictly increasing finite sequence.

The spacing between  $E_k(h)$  and  $E_{k+1}(h)$  is given by :

$$\left\|\frac{E_{k+1}(h) - E_k(h)}{h}\right\| = \frac{2\pi a}{|\ln h| + B - \ln 2 - \Psi'_n(x)} (1 + O(h))$$
(4.27)
$$= a \left(\frac{2\pi}{|\ln h|} + \frac{2\pi}{(\ln h)^2} \left(\Psi'_n(x) - B + \ln 2\right)\right) + O\left(\frac{1}{(\ln h)^3}\right),$$

for an  $x \in ]x_k, x_{k+1}[$ , and  $a = ||M \cdot (1,0)||$ ; we have denoted

$$\Psi_n(x) = 2 \arg \Gamma\left(\frac{ix+1+|n|}{2}\right).$$

Note that  $\Psi'_n$  is related to the logarithmic derivative  $\psi$  of the Gamma-function :

$$\Psi'_n(x) = \Re\left(\psi\left(\frac{ix+1+n}{2}\right)\right).$$

A consequence of this theorem is that the number of  $E_k(h)$ 's inside hK increases as h tends to zero at a rate equivalent to const.  $|\ln h|$ , which easily yields a Weyl



FIG. 4.8 – Graph of the function  $\Psi'_0(x)$  (here  $\gamma$  denotes Euler's constant  $\gamma \simeq 0.5772156649...$ ).

type asymptotic formula for the counting function (see theorem 4.7.7 in next paragraph). A more precise result is that the function  $\Psi'_n$  controls the shape of the graph "spacing versus x". It turns out that  $\Psi'_n$  has a non-degenerate minimum at x = 0, which is particularly sharp for n = 0 (figure 4.8). This might have some interesting applications in numerical analysis. First, it should refrain people from thinking that the spacings curve has a cusp; secondly, however, this "near-cusp" might be useful to precisely locate the critical value x = 0. Numerics for the example of the Champagne bottle suggest that both remarks apply for reasonable value of the small constant h (figures 4.9 and 4.10). Finally,



FIG. 4.9 – Level spacings for the quantum Champagne bottle, n = 0,  $h = 10^{-4}$  (numerics).

of course, this theorem can be used to find a rigorous approximation for the level spacings. In the example of the Champagne bottle, formula (4.27) can be made completely explicit. The hamiltonian H is the following :

$$H(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - r^2 + r^4,$$



FIG. 4.10 – Level spacings for the quantum Champagne bottle, n = 0,  $h = 10^{-5}$  (numerics).

with  $r^2 = x^2 + y^2$ . It commutes with the angular momentum  $I = x\eta - y\xi$ , hence we can let  $p = (p_1, p_2) = (H, I)$ . The corresponding *h*-operators are

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta - r^2 + r^4, \quad \hat{I} = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

One can compute the quantities involved by formula (4.27), and one finds

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 so  $a = \sqrt{2}$ , and  $B = (5/2) \ln 2$ .

Thus, using formula (4.27) to approximate the *smallest* spacing (obtained at x = 0 for n = 0) we get :

$$\min_{k} \left( \frac{E_{k+1} - E_k}{h} \right) \sim \frac{2\pi\sqrt{2}}{|\ln h| + (9/2)\ln 2 + \gamma} + O(h).$$

The comparison between the principal part of this formula as a function of  $\ln h$  and the "experimental" result from the numerical computation of the spectrum is depicted in figure 4.11, and tends to show that the approximation is quite accurate.

**Proof** of theorem 4.7.6. Because  $(E_{k+1} - E_k)/h = (M + O(h)) \cdot (x_{k+1} - x_k, 0) + O(h^{\infty})$ , it suffices to estimate  $|x_{k+1} - x_k|$ .

For  $n \in \mathbb{Z}$ , let

$$g_n(x;h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \left( |n| \frac{\pi}{2} - x \ln(2h) - 2 \arg \Gamma \left( \frac{ix+1+|n|}{2} \right) + f_n(x;h) \right).$$

The function  $x \to g_n(x; h)$  is smooth and we have

$$g'_n(x;h) = B - \ln(2h) - \Psi'_n(x) + O(h).$$



FIG. 4.11 - The smallest spacing; comparison between numerics and the top order term in formula <math>(4.27).

For small h,  $g_n(h)$  is therefore strictly increasing, with slope of order  $|\ln h|$ . The solutions  $x_k(h)$  to  $g(x_k(h);h) = k \in \mathbb{Z} + O(h^{\infty})$  are therefore, for small h, in one-to-one correspondence with the exact solutions to  $g(x_k(h);h) = k$  (except maybe for the first and the last ones, sitting near the boundary of the compact interval in which we are looking for solutions). Moreover the differences between the exact and the  $O(h^{\infty})$  solutions are of order  $\frac{1}{|\ln h|}O(h^{\infty})$ , which is a fortiori  $O(h^{\infty})$ . In the following  $x_k$  denotes the exact solution.

By Rolle's theorem, there is an  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  such that

$$\frac{1}{|x_{k+1} - x_k|} = g'_n(x;h).$$

This means

$$|x_{k+1} - x_k| = \frac{2\pi}{|lnh| + B - \ln 2 - \Psi'_n(x) + O(h)},$$

which proves the theorem.

# 4.7.5 Weyl's formula

Let K be a compact convex subset of  $\mathbb{R}^2$ , and let  $\tilde{K}(h)$  be its image by the change of variables:

$$(t_1, t_2) \to (\tilde{\epsilon}_1^t(h), \tilde{\epsilon}_2^t(h)).$$

Recall that the principal part of this map is

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_0^t = M^{-1} \cdot (t - r(m)),$$

where  $r(m) = (r_1(m), r_2(m))$  is the value at *m* of the joint sub-principal symbol of the system  $P_1(h), P_2(h)$ , and M = dF(0), where  $(p_1, p_2) = F(q_1, q_2)$  for some symplectic coordinates near *m* (see section 4.6.5).

Denote by  $\tilde{K}_0$  the principal part of  $\tilde{K}(h)$ ; it is a convex compact of  $\mathbb{R}^2$ . Theorem 4.7.6 easily yields the following estimate for the counting function :

**Theorem 4.7.7** Denote by  $N_h(K)$  the number of eigenvalues belonging to hK:

 $N_h(K) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{(E_1, E_2) \in hK \cap \Sigma(h)\}.$ 

The following estimate holds, as h tends to zero :

$$N_h(K) = \frac{|\ln h|}{2\pi} \int_{\tilde{K}_0} |dx \wedge dn| + O(1).$$

The measure |dn| is the counting measure on  $\mathbb{Z}$ , and |dx| is the standard onedimensional Lebesgue measure.

We present in figure 4.12 a numerical illustration of this result.



FIG. 4.12 – The counting function  $N_h(K)$  for the Champagne bottle, where K is a compact selecting only joint eigenvalues on the line  $\epsilon_2 = 0$  (numerics).

The question that this theorem arouses is whether the formula for  $N_h$  can be related to a Weyl-type heuristic involving volume in phase space. The answer is positive (proposition 4.7.8), up to the difference between the measures of  $\tilde{K}_0$ with respect to  $|dx \wedge dn|$  and with respect to the standard Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^2$ , which of course strongly depends on the geometry of  $\tilde{K}_0$ .

Let  $\mu$  be the push-forward on  $\mathbb{R}^2$  of the symplectic (or Liouville) measure by the momentum map  $p = (p_1, p_2)$ : for any Borel  $\mathcal{B}$  of  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\mu(\mathcal{B}) = \int_{p^{-1}(\mathcal{B})} |\omega \wedge \omega|/2.$$

Let  $|dc| = |dc_1 \wedge dc_2|$  be the standard Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^2$ . The Lebesgue volume of  $\mathcal{B}$  will be denoted by  $|\mathcal{B}|$ .

Proposition 4.7.8 As h tends to zero,

$$\frac{\mu(hK)}{(2\pi h)^2} = \frac{|\ln h|}{2\pi} |\tilde{K}_0| + O(1).$$

**Proof.** Let  $\Omega$  be a neighborhood of the critical point m in which the system  $(P_1, P_2)$  can be brought to the normal form of lemma 4.6.5, so that there is a local diffeomorphism F defined on  $U = p(\Omega)$  such that, with the same notations as in section 4.6.2,  $(p_1, p_2) = F(q_1, q_2)$ .

Replacing K by  $h_0 K$  with  $h_0$  small enough, if necessary, we can always assume that  $K \subset U$ . Let  $\varepsilon > 0$  be such that the ball

$$B_{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{ (r, \theta, \rho, \alpha) \in M, \quad r < \varepsilon, \rho < \varepsilon \}$$

is included in  $\Omega$ . Then  $\mu(hK)$  can be split into two parts :

$$\mu(hK) = \int_{B_{\varepsilon} \cap \{(q_1, q_2) \in F^{-1}(hK)\}} |dxdyd\xi d\eta| + \int_{B_{\varepsilon}^{\mathsf{c}} \cap \{(p_1, p_2) \in hK\}} |\omega \wedge \omega|/2.$$
(4.28)

If h is small enough, each fiber  $p^{-1}(c)$ ,  $c \in hK$  intersects  $B_{\varepsilon}$ , and we know from section 4.6.4 that the fibration  $p_{\uparrow B_{\varepsilon}^{c}}$  over hK is trivial with fibers diffeomorphic to compact cylinders. Moreover, p naturally defines on each cylinder a locally invariant measure  $\rho$  such that the symplectic measure splits according to :

$$|\omega \wedge \omega|/2 = \boldsymbol{\rho} \otimes |dp_1 \wedge dp_2|.$$

Therefore, the second term of (4.28) can be written as :

$$\int_{B_{\varepsilon}^{\mathsf{c}} \cap \{(p_1, p_2) \in hK\}} |\omega \wedge \omega|/2 = \int_{(c_1, c_2) \in hK} \rho(B_{\varepsilon}^{\mathsf{c}} \cap p^{-1}(c)) |dc_1 \wedge dc_2|.$$

Because  $\rho(B_{\varepsilon}^{\mathsf{c}} \cap p^{-1}(c))$  is bounded for bounded  $(c_1, c_2)$ , the following estimate holds, for some C > 0:

$$\int_{B_{\varepsilon}^{c} \cap \{(p_{1}, p_{2}) \in hK\}} |\omega \wedge \omega|/2 < C. \int_{(c_{1}, c_{2}) \in hK} |dc_{1} \wedge dc_{2}| = C.h^{2}|K|.$$

Let us turn now to the first term in the sum (4.28):

$$I_{\varepsilon}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{B_{\varepsilon} \cap \{(q_1, q_2) \in F^{-1}(hK)\}} |dx dy d\xi d\eta|.$$

Using the new coordinates  $(r, \theta, \ell, \lambda)$  with  $\ell = r\rho$  and  $\lambda = \alpha - \theta$ , the symplectic measure is transformed into

$$rac{\ell}{r} |d\lambda \wedge d\ell \wedge d\theta \wedge dr| = rac{1}{r} |dq_1 \wedge dq_2| \otimes |d\theta \wedge dr|.$$
This gives :

$$I_{\varepsilon}(h) = 2\pi \int_{(c_1, c_2) \in F^{-1}(hK)} 1_{|c| \leqslant \varepsilon^2} \left( \int_{\frac{|c|}{\varepsilon}}^{\varepsilon} \frac{1}{r} |dr| \right) |dc_1 \wedge dc_2|$$
$$= 2\pi \int_{F^{-1}(hK)} 1_{|c| \leqslant \varepsilon^2} \ln(\frac{\varepsilon^2}{|c|}) |dc_1 \wedge dc_2|.$$

Note that for h small enough, the condition  $|c| \leq \varepsilon^2$  is always satisfied for  $c \in F^{-1}(hK)$ .

Now, the change of variables  $\hat{c} = F(c)/h$  yields

$$I_{\varepsilon}(h) = 2\pi h^2 \int_{\hat{c} \in K} \ln(\frac{\varepsilon^2}{|F^{-1}(h\hat{c})|}) J(h\hat{c}) |d\hat{c}|,$$

where J is the Jacobian of  $F^{-1}$ . Taylor's formula for J and  $F^{-1}$  easily shows that the integrand can be reduced to its principal part :

$$I_{\varepsilon}(h) = 2\pi h^2 \int_{\hat{c} \in K} \ln(\frac{\varepsilon^2}{|M^{-1} \cdot h\hat{c}|}) J(0) |d\hat{c}| + O(h^3).$$

Since  $J(0) = \det M^{-1}$ , the right hand-side is equal to :

$$2\pi h^2 \int_{\tilde{c}\in M^{-1}(K)} \ln(\frac{\varepsilon^2}{|h\tilde{c}|}) |d\tilde{c}| + O(h^3),$$

with  $\tilde{c} = M^{-1} \cdot \hat{c}$ . Because the measure  $\ln |c| |dc|$  is locally integrable at the origin, this finally gives :

$$I_{\varepsilon}(h) = -2\pi h^2 \ln h |M^{-1}(K)| + O(h^2),$$

thus proving proposition 4.7.8.

Bohr-Sommerfeld et singularités focus-focus

### Chapitre 5

## Forme normale de Birkhoff quantique et états semi-excités

Ce chapitre montre comment l'usage de la forme normale de Birkhoff quantique permet de traiter des problèmes non complètement intégrables, où on s'intéresse au spectre discret d'opérateurs pseudo-différentiels au voisinage d'une singularité de type fond de puits non dégénéré. Un énoncé général de la forme normale de Birkhoff y est donné, et son application permet de décrire le spectre dans une région de taille  $h^{\gamma}, \gamma \in ]0,1]$ , recouvrant ainsi les résultats de Sjöstrand [79]. Le cas de la résonance  $1:1:\dots:1$  est traité par la théorie de opérateurs de Toeplitz.

#### 5.1 Introduction

Ce chapitre explore les possibilités de la forme normale de Birkhoff pour l'étude du spectre discret d'opérateurs auto-adjoints au voisinage d'une singularité de type fond de puits non-dégénéré. Puisqu'on désire ici se passer de l'hypothèse de complète intégrabilité quantique (sous laquelle le spectre de tels opérateurs est connu – voir le chapitre d'introduction), on ne peut pas s'attendre à ce que la forme locale de la singularité détermine le spectre sur un voisinage fixe (c.-à-d. indépendant de h) de la valeur critique. Nous utiliserons donc le calcul symbolique de Sjöstrand, qui permet de microlocaliser sur des régions de taille  $O(h^{\gamma})$ ,  $\gamma > 0$ . Nous montrerons alors que la version « purement quantique » de la forme normale de Birkhoff est un outil performant, qui permet non seulement de retrouver les résultats de Sjöstrand [79], mais aussi d'examiner les problèmes de résonances entre les fréquences de l'opérateur linéarisé. Nous décrirons le cas de la résonance  $1: 1: \dots: 1$ .

La motivation de cette étude est l'opérateur de Schrödinger sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ 

$$\hat{H}(h) = -\frac{h^2}{2}\Delta + V, \qquad (5.1)$$

où  $V \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  est un potentiel admettant un minimum absolu non-dégénéré en 0, avec V(0) = 0, et tel que  $\liminf_{|x| \to \infty} V(x) = V_0 > 0$ .

H(h) est alors positif et de spectre discret dans  $] - \infty, V_0[$ . On s'intéressera aux valeurs propres  $E_k(h)$  de  $\hat{H}(h)$  contenues dans un voisinage de l'origine de taille  $O(h^{\gamma}), \gamma > 0$ .

Par un changement de variable linéaire unitaire sur  $\mathbb{R}^n$  – qui ne change pas le laplacien, on peut toujours supposer que la matrice V''(0) est diagonale; soient  $(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)$  ses valeurs propres  $(\omega_i > 0)$ . Par le changement  $x_i \to \sqrt{\omega_i x_i}$ , on transforme  $\hat{H}(h)$  en une perturbation de l'« oscillateur harmonique »  $\hat{H}_2(h)$ :

$$\hat{H}(h) = \hat{H}_2(h) + W,$$

avec

$$\hat{H}_2(h) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Omega_i(h), \quad \Omega_i(h) = \frac{1}{2} \left( -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2 \right),$$

et W = W(x) est un potentiel en  $O(|x|^3)$  près de l'origine.

Comme le remarquent Boutet de Monvel (M. et Mme.) et Lebeau [10], l'analyse pseudo-différentielle « classique » s'applique mal à ce point de vue perturbatif, puisque, dans la graduation standard,  $\hat{H}_2(h)$  et W sont tous deux des h-opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro. Une solution proposée dans cet article [10] consiste à introduire des classes de symboles plus adaptées, où le paramètre semi-classique est d'emblée lié aux variables d'espace. Cette méthode apparaît aussi dans l'article de Sjöstrand [79], qui ajoute l'idée que la forme normale de Birkhoff *classique*, quantifiée grâce à l'utilisation d'un opérateur intégral de Fourier, donne de précieux renseignements sur le spectre semi-excité, en particulier dans le cas non-résonant, où l'on peut se débarrasser microlocalement de W. La méthode que nous proposons est basée sur un analogue quantique plus étroit de la forme normale de Birkhoff, et permet de se passer (au moins explicitement) de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier. Nous montrons qu'un analogue quantique naturel de la série de Taylor normalisée classique est donné par une série formelle  $\tilde{K}(\varepsilon)$  d'opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux qui commutent avec  $\tilde{H}_2$ . L'énoncé principal de ce chapitre (théorème 5.4.1) affirme que le spectre de  $\hat{H}(h)$  dans une région semi-excitée est bien approché par les troncatures de  $\tilde{K}(\varepsilon)$ , restreintes à l'espace des états semi-excités de  $\tilde{H}_2$ .

L'utilisation des différentes représentations des opérateurs différentiels polynômiaux (Bargmann, Toeplitz) fournit alors des outils performants pour mener à bien l'étude spectrale, permettant en particulier une attaque plus directe du problème des résonances. Nous présentons ici le cas de la résonance  $1:1:\dots:1$ qui ne présente pas de difficultés géométriques supplémentaires. Le cas de la résonance 2:1, utilisant la théorie des systèmes complètement intégrables (car la forme normale est complètement intégrable en dimension 2) fera l'objet d'un travail futur de Colin de Verdière et de l'auteur.

#### 5.2 La forme normale de Birkhoff quantique

§ 5.2.1. Motivation. — Conjugué par la transformation unitaire U sur  $L^2$  donnée par  $f(x) \xrightarrow{U} h^{n/4} f(\sqrt{hx})$ , l'opérateur  $\hat{H}(h)$  devient

$$U\hat{H}U^{-1} = h\left(\tilde{H}_2 + \tilde{W}(x;h)/h\right),\,$$

avec

$$\tilde{H}_2 = \sum_{i=1}^n \omega_i \tilde{\Omega}_i, \quad \tilde{\Omega}_i = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2 \right),$$

et  $\tilde{W}(x;h)/h = W(\sqrt{hx})/h = O(\sqrt{h})$  uniformément pour x et h petits.

Développant W en série de Taylor à l'origine, on obtient formellement

$$U\hat{H}U^{-1} = h(\tilde{H}_2 + \sum_{j \ge 3} h^{(j-2)/2} W_j(x)), \qquad (5.2)$$

où  $W_j$  est un polynôme homogène de degré j. Le but de cette section est de conjuguer  $\hat{H}(h)$  par un opérateur unitaire adéquat de sorte de tuer – ou au moins de simplifier – le plus possible de termes  $W_j$ .

§ 5.2.2. La forme normale de Birkhoff générale. — La normalisation « à la Birkhoff » est un procédé formel qui, bien qu'introduit à l'origine pour l'étude des systèmes dynamiques [6], s'adapte en réalité à toute situation où intervient une algèbre de Lie graduée (voir par exemple Duistermaat [38] pour les exemples classiques, et Kummer [64] ou Eckhardt [41] pour une discussion sur la variante quantique). On devrait d'ailleurs plutôt dire « Birkhoff-Gustavson », car l'étude originelle de Birkhoff supposait que le terme principal  $\tilde{H}_2$  de la série à normaliser était *non-résonant* pour pouvoir effectivement supprimer tous les termes d'ordres supérieurs.

L'idée formelle de la normalisation de Birkhoff-Gustavson est la suivante. On se donne une algèbre de Lie  $\mathcal{D}$ , et une suite de sous-espaces  $\mathcal{D}_j$ ,  $j \ge 2$ , de dimensions finies et tels que

$$[\mathcal{D}_j, \mathcal{D}_k] \subset \mathcal{D}_{j+k-2}.$$
(5.3)

On suppose qu'il existe un élément  $H_2 \in \mathcal{D}_2$  fixé une fois pour toutes tel que pour tous  $j \ge 3$ , l'endomorphisme  $(\mathrm{ad}_{H_2})_{|\mathcal{D}_j|} = [H_2, \cdot]$  vérifie

$$\mathcal{D}_j = \ker(\mathrm{ad}_{H_2})_{\mid \mathcal{D}_i} \oplus \operatorname{im}(\mathrm{ad}_{H_2})_{\mid \mathcal{D}_i},\tag{5.4}$$

et on note  $\mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$  l'algèbre de Lie (c'en est bien une en vertu de (5.3) ) des séries formelles :

$$\mathcal{D}\llbracket \varepsilon \rrbracket = \bigoplus_{j \ge 2} \varepsilon^{j-2} \mathcal{D}_j.$$

Enfin, on désigne par  $\mathcal{D}^{(N)}[\varepsilon]$  l'algèbre de Lie des mêmes séries formelles modulo tous les termes d'ordre > N. Puisque  $\mathcal{D}^{(N)}[\varepsilon]$  est de dimension finie, on peut former son groupe de Lie connexe simplement connexe  $G^{(N)}(\varepsilon)$ . Si  $M \ge N$ , la projection naturelle  $\varpi^{M,N}$  de  $\mathcal{D}^{(M)}[\varepsilon]$  dans  $\mathcal{D}^{(N)}[\varepsilon]$  donne lieu à un unique homomorphisme (surjectif)

$$\pi^{M,N} : G^{(M)}(\varepsilon) \to G^{(N)}(\varepsilon)$$

tel que  $\varpi^{M,N} = d\pi^{M,N}$ . En particulier on a  $\pi^{N,N} = id$  et  $\pi^{M,N}\pi^{L,M} = \pi^{L,N}$ pour tous  $L \ge M \ge N$ . On peut donc former la limite projective

$$G(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\leftarrow \\ N \geqslant 0}} G^{(N)}(\varepsilon).$$

L'application exponentielle exp :  $\mathcal{D}\llbracket \varepsilon \rrbracket \to G(\varepsilon)$  est définie par

$$\pi^N \exp = \exp^N \varpi^N,$$

où exp<sup>N</sup> est l'exponentielle sur  $\mathcal{D}^{(N)}[\varepsilon]$  et  $\pi^N : G(\varepsilon) \to G^{(N)}(\varepsilon)$  et  $\varpi^N = d\pi^N : \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!] \to \mathcal{D}^{(N)}[\varepsilon]$  sont les projections naturelles. On note  $\operatorname{Ad}^N_{(\cdot)}$  la représentation adjointe de  $G^{(N)}(\varepsilon)$  dans  $\mathcal{D}^{(N)}[\varepsilon]$ . Elle s'étend en un homomorphisme  $\operatorname{Ad}_{(\cdot)}$  de  $G(\varepsilon)$  dans  $\operatorname{Aut}(\mathcal{D}[\![\varepsilon]\!])$  donné par

$$\varpi^N(\mathrm{Ad}_g) = \mathrm{Ad}_{\pi^N(g)}^N \varpi^N.$$

Soit  $G_2(\varepsilon)$  le noyau de  $\pi^2$ ; c'est le groupe de Lie associé aux séries formelles sans terme constant, qu'on note  $\mathcal{D}_2[\![\varepsilon]\!]$ . La restriction de  $\operatorname{Ad}_{(.)}$  à  $G_2(\varepsilon)$  agit alors sur  $\mathcal{D}_2[\![\varepsilon]\!]$ .

Le procédé de normalisation de Birkhoff fait jouer un rôle particulier au sous-groupe  $G_N$  de  $G_2^{(N)}(\varepsilon)$  formé des  $\exp \varepsilon^N A$ ,  $A \in \mathcal{D}_{N+2}$ . Ce groupe est le noyau de  $\pi^{N,N-1}$ , associé à l'algèbre de Lie ker  $\varpi^{N,N-1}$ . Cette dernière étant

centrale dans  $\mathcal{D}_2^{(N)}[\varepsilon]$ ,  $G_N$  est central dans  $G_2^{(N)}(\varepsilon)$  et isomorphe au groupe abélien  $\mathcal{D}_{N+2}$ . En outre,

$$G_2^{(N-1)}(\varepsilon) \simeq \frac{G_2^{(N)}(\varepsilon)}{G_N}.$$

Si  $\exp^N \varepsilon^N A = \exp^N \varepsilon^N A'$  avec A et  $A' \in \mathcal{D}_{N+2}$ , l'unicité pour les groupes à un paramètre implique que A = A'. On en déduit par récurrence que  $\exp^N$  est une bijection de  $\mathcal{D}_2^{(N)}[\varepsilon]$  sur  $G_2^{(N)}(\varepsilon)$ , ce qui implique que exp est une bijection de  $\mathcal{D}_2[\![\varepsilon]\!]$  sur  $G_2(\varepsilon)$ .

La normalisation de Birkhoff-Gustavson s'énonce alors ainsi (on rappelle que  $H_2$  est fixé vérifiant (5.4)):

Lemme 5.2.1 (forme normale de Birkhoff) Pour tout  $H(\varepsilon) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$  de la forme  $H_2 + \varepsilon H_3 + \cdots$  il existe  $g(\varepsilon) = \exp A(\varepsilon) \in G_2(\varepsilon), A(\varepsilon) \in \mathcal{D}_2[\![\varepsilon]\!]$ , et  $K(\varepsilon) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!] \cap \ker \operatorname{ad}_{H_2}$  tels que :

$$\operatorname{Ad}_{q(\varepsilon)}(H(\varepsilon)) = K(\varepsilon) \tag{5.5}$$

(en particulier,  $K_2 = H_2$ ).

**Démonstration.** La preuve est classique. On construit les projetés  $g^{(N)}(\varepsilon)$  et  $K^{(N)}(\varepsilon)$  par récurrence : si la normalisation (5.5) est obtenue dans  $\mathcal{D}^{(N)}[\varepsilon]$  grâce à un  $g^{(N)}$ , on note  $\tilde{g}^{(N)}$  un antécédent de  $g^{(N)}$  par  $\pi^{(N+1,N)}$ , et on obtient la normalisation à l'ordre N + 1 par un  $g^{(N+1)}$  de la forme

$$g^{(N+1)} = \exp(\varepsilon^{N+1}A)\tilde{g}^{(N)}, \quad A \in \mathcal{D}_{N+3}$$

en résolvant une équation (« équation de transport », ou « équation homologique ») de la forme

$$\operatorname{ad}_{H_2}(A) = B - K_{N+3}, \quad B \in \mathcal{D}_{N+3}.$$

Cette équation est résoluble grâce à (5.4), et on peut même toujours choisir  $A \in \operatorname{im} \operatorname{ad}_{H_2}$ .

**Remarque 5.2.1.** En tronquant  $H(\varepsilon)$  et  $g(\varepsilon)$  à l'ordre N (c'est-à-dire en appliquant les projections  $\varpi^N$  et  $\pi^N$ ), la normalisation (5.5) est valable à l'ordre N (c'est-à-dire dans  $\mathcal{D}^{(N)}[\varepsilon]$ ). On retrouve ainsi la forme normale de Birkhoff-Gustavson standard pour les champs de vecteurs (hamiltoniens ou non) en partant de la série de Taylor tronquée. Le résultat s'applique aussi aux champs de vecteurs de divergence nulle (« algèbre de Lie » des difféomorphismes préservant la forme volume). Le mécanisme de ces formes normales classiques est bien expliqué dans l'article [38]. Notre but ici est d'appliquer le procédé à une algèbre d'opérateurs (d'où l'adjectif « quantique »), celle des opérateurs différentiels polynômiaux; un autre point de vue serait d'examiner l'algèbre des opérateurs intégraux de Fourier inversibles (unitaires)).

**Remarque 5.2.2.** La première étape de la normalisation consiste à projeter  $H_3$  sur ker  $\operatorname{ad}_{H_2}$  parallèlement à im  $\operatorname{ad}_{H_2}$ ; dans un certain nombre de cas, on peut représenter ce projecteur par un opérateur de moyennisation du type  $H_3 \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Ad}_{tH_2}(H_3) dt$ . Cette étape est alors identique à la « méthode de moyennisation », qui apparaît à l'origine pour les hamiltoniens de la mécanique céleste. Son analogue quantique est appliqué par Weinstein [87]; pour une discussion plus récente dans le cadre semi-classique, voir Colin de Verdière [25].  $\triangle$ 

§ 5.2.3. Opérateurs différentiels polynômiaux. — L'algèbre  $\mathcal{D}$  qui nous intéressera ici est celle des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux (voir Boutet de Monvel [11]) sur  $\mathbb{R}^n$ , graduée par le degré total en x et  $\frac{\partial}{\partial x}$ . Elle peut être formellement décrite comme l'algèbre associative (dite de Heisenberg) engendrée par deux familles d'opérateurs  $a_i$  et  $b_i$ ,  $i = 1, \ldots, n$  vérifiant les relations

$$[a_i, b_j] = \delta_{i,j}, \qquad [a_i, a_j] = 0, \qquad [b_i, b_j] = 0.$$
(5.6)

Concrètement, on peut poser

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \right), \quad b_i = a_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \right).$$

L'oscillateur harmonique  $H_2$  s'écrit alors

$$\tilde{H}_2 = \sum_{i=1}^n \omega_i \left( a_i b_i - \frac{1}{2} \right).$$
(5.7)

On ne peut pas choisir pour  $\mathcal{D}_j$  l'espace des opérateurs combinaisons linéaires de  $a^{\alpha}b^{\beta}$  avec les multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant  $|\alpha| + |\beta| = j$  (qui serait l'analogue des polynômes homogènes de degré j dans le cas classique), car les relations (5.3) ne seraient pas vérifiées (des termes de degrés inférieurs apparaissent à cause de (5.6)). On voit cependant que les relations (5.6) préservent la *parité* du degré. On pose donc

$$\mathcal{D}_{j} = \left\{ \sum_{\substack{k \leqslant j \\ k \equiv j \mod 2}} \sum_{|\alpha| + |\beta| = k} c_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta}, \quad c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Il faut remarquer que les mêmes espaces  $\mathcal{D}_j$  sont obtenus en remplaçant respectivement a et b par x et  $\frac{\partial}{\partial x}$ . Le symbole principal, obtenu à partir du terme de degré j en remplaçant  $\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_i}$  par  $\xi_i$ , identifie  $\mathcal{D}_j/\mathcal{D}_{j-2}$  à l'espace des polynômes homogènes de degré j en  $(x,\xi)$ .  $\mathcal{D}_j$  agit sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  avec comme domaine l'ensemble des fonctions  $\psi$  telles que

$$P\psi \in L^2, \quad \forall P \in \mathcal{D}_j.$$

**Proposition 5.2.2** Pour toute série formelle d'opérateurs différentiels polynômiaux  $H(\varepsilon) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$  telle que  $H_2$  est donné par (5.7), il existe des séries  $K(\varepsilon) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!] \cap \ker(\operatorname{ad}_{\tilde{H}_2})$  et  $A(\varepsilon) \in \mathcal{D}_2[\![\varepsilon]\!]$  telles que

$$e^{A(\varepsilon)}H(\varepsilon)e^{-A(\varepsilon)} = K(\varepsilon).$$

**Démonstration**. Il est facile de vérifier que dans une algèbre associative vérifiant (5.6), on a la règle suivante : pour tous multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{N}^n$ ,

$$[a_i b_i, a^{\alpha} b^{\beta}] = (\beta_i - \alpha_i) a^{\alpha} b^{\beta}.$$
(5.8)

Autrement dit, les  $a^{\alpha}b^{\beta}$ ,  $|\alpha| + |\beta| \leq j$ , forment une base de fonctions propres diagonalisant  $\operatorname{ad}_{\tilde{H}_2}$  sur  $\mathcal{D}_j$ , les valeurs propres correspondantes étant  $\langle \omega, \beta - \alpha \rangle$ . En particulier,

$$\mathcal{D}_j = \ker(\mathrm{ad}_{\tilde{H}_2})_{\upharpoonright \mathcal{D}_j} \oplus \mathrm{im}(\mathrm{ad}_{\tilde{H}_2})_{\upharpoonright \mathcal{D}_j}, \quad \forall j \ge 0,$$

ce qui permet l'application de la forme normale de Birkhoff (lemme 5.2.1). Il existe donc des séries formelles  $K(\varepsilon) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!] \cap \ker(\operatorname{ad}_{\tilde{H}_2})$  et  $A(\varepsilon) \in \mathcal{D}_2[\![\varepsilon]\!]$  telles que

$$K(\varepsilon) = (e^{\operatorname{ad}_{A(\varepsilon)}})H(\varepsilon),$$

où  $e^{(\cdot)}$  désigne ici le développement formel en série de l'exponentielle. Le membre de droite est formellement identique à la série formelle  $e^{A(\varepsilon)}H(\varepsilon)e^{-A(\varepsilon)}$ .  $\Box$ 

**Remarque 5.2.3.** Il y a un certain danger à utiliser, pour une série formelle inversible  $B(\varepsilon)$ , la notation  $B(\varepsilon)A(\varepsilon)(B(\varepsilon))^{-1}$ . Si  $B(\varepsilon)$  n'est pas de la forme  $e^{A(\varepsilon)}$ , elle n'agit pas naturellement sur  $\mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$ ; autrement dit, le résultat du calcul formel de  $B(\varepsilon)A(\varepsilon)(B(\varepsilon))^{-1}$  n'est en général pas dans  $\mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$ . En particulier, il n'est pas intéressant, pour obtenir une approximation à l'ordre  $\varepsilon^N$ , de voir  $e^{A(\varepsilon)}$ comme une série formelle en  $\varepsilon$  et de la tronquer. On écrira plutôt :

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{(\mathrm{ad}_{A^{(N)}})^{j}}{j!} H^{(N)} = \tilde{H}_{2} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^{j} K_{j+2} + O(\varepsilon^{N+1}).$$
(5.9)

On a désigné ici par  $A^{(N)}$  et  $H^{(N)}$  les séries obtenues par troncature des termes d'ordre > N, et par  $O(\varepsilon^{N+1})$  un élément de  $\mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$  multiple de  $\varepsilon^{N+1}$  et comportant un nombre fini de termes non nuls.

On peut aussi se restreindre aux algèbres de Lie des opérateurs formellement *i*-auto-adjoints (*i.e.* de la forme  $\frac{i}{2}(P + P^*)$ ,  $P \in \mathcal{D}_j$ ), auquel cas  $e^{A(\varepsilon)}$  est formellement unitaire.

#### 5.3 Microlocalisation

Les méthodes qui nous intéressent dans ce travail ne se limitent pas à l'opérateur de Schrödinger, même s'il en est la motivation principale. C'est à la fois pour avoir des énoncés plus généraux et un maniement plus facile que l'on suppose désormais que  $\hat{H}(h)$  est un opérateur pseudo-différentiel dans  $S_{Cl}^0(\mathbb{R}^{2n})$ admettant un puits global non-dégénéré en (0,0), au sens de la définition 5.3.1. § 5.3.1. Symboles.— On note  $S^0(\mathbb{R}^{2n})$  l'espace des  $a(x,\xi;h) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  définies pour h dans un ensemble  $\mathfrak{h}$  s'accumulant en zéro, telles que

$$\forall \alpha, \beta, \quad \exists C > 0, \quad |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x,\xi;h)| \leqslant C, \tag{5.10}$$

uniformément pour  $h \in \mathfrak{h}$ . On définit aussi  $S^m(\mathbb{R}^{2n}) = h^m S^0(\mathbb{R}^{2n})$ . Ces espaces de symboles sont des sous-espaces des classes générales de symboles admissibles définis par D. Robert [75]. À un tel symbole on associe un *h*-opérateur pseudodifférentiel par la quantification de Weyl semi-classique

$$(A(h)u)(x) = (Op_h^W(a)u)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle} a((x+y)/2,\xi;h)u(y)dyd\xi.$$

A(h) est alors un opérateur uniformément borné, par rapport à h, dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Le sous-espace  $S^m_{Cl}(\mathbb{R}^{2n})$  est l'ensemble des symboles *classiques*, c'est-à-dire admettant un développement asymptotique de la forme

$$a(x;\xi;h) \sim \sum_{k=m}^{\infty} h^k p_k(x;\xi)$$

On notera encore  $S^m(\mathbb{R}^{2n})$  les quantifiés de Weyl des symboles dans  $S^m(\mathbb{R}^{2n})$ .

**Définition 5.3.1** On dit que  $\hat{H}(h)$  admet un puits global non-dégénéré (en l'origine) si  $\hat{H}(h) \in S^0_{Cl}(\mathbb{R}^{2n})$  est un opérateur auto-adjoint dont le symbole principal  $\sigma(\hat{H}(h))$  admet un minimum global non-dégénéré en (0,0), de minimum 0, et si  $\liminf_{(x,\xi)\to\infty} \sigma(\hat{H}(h)) > 0.$ 

Il est à noter que l'opérateur de Schrödinger ne satisfait pas cette hypothèse, dans la mesure où il n'est pas dans  $S^0(\mathbb{R}^{2n})$ ... Mais on sait, grâce aux techniques de localisation de Helffer-Sjöstrand [52], qu'on peut, modulo une erreur  $O(h^{\infty})$ sur  $Sp(\hat{H}(h)) \cap ] - \infty, c], c > 0$ , remplacer  $\hat{H}(h)$  par n'importe quel opérateur dans  $S^0(\mathbb{R}^{2n})$  admettant un puits global non-dégénéré en (0,0), pourvu qu'il coïncide microlocalement avec  $\hat{H}(h)$  près de l'origine.

§ 5.3.2. Série de Taylor. — Jusqu'à la fin de cette section, on se donne un opérateur  $\hat{H}(h) \in S^0_{Cl}(\mathbb{R}^{2n})$  dont le symbole principal a un puits nondégénéré en (0,0). Quitte à effectuer un changement symplectique linéaire, on supposera toujours que la partie quadratique du symbole principal s'écrit  $q_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2} (x_i^2 + \xi_i^2)$ . La description du spectre, pour laquelle nous aurons besoin des hypothèses globales de la définition 5.3.1, commencera à la section suivante.

De la même façon qu'en (5.2), on veut représenter formellement  $\frac{1}{h}U\hat{H}(h)U^{-1}$ par une série formelle dans  $\mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$ , avec  $\varepsilon = \sqrt{h}$ . Là encore, c'est la décomposition du symbole en série de Taylor qui donne le résultat.

Le maniement semi-classique de la graduation de l'algèbre  $\mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$  se fait au moyen des classes de symboles  $\Sigma_j$  suivantes :

**Définition 5.3.2** On désigne par  $\Sigma_j$  l'espace des symboles  $(p(h))_{h \in \mathfrak{h}}$  qui sont des sommes d'éléments de  $S^0(\mathbb{R}^{2n})$  et de symboles polynômiaux dans  $\mathbb{C}[x,\xi;h]$ ,

et tels que

$$p(x,\xi;h) = O\left(\sum_{\substack{2k+i=j\\k,i\in\mathbb{N}}} h^k \| (x,\xi) \|^i\right)$$

uniformément pour  $(x,\xi) \sim 0$  et  $h \in \mathfrak{h}$ .

 $\Sigma_j$  contient ainsi le symbole de tout opérateur de la forme  $U^{-1}h^{\frac{1}{2}}P_jU$ , avec  $P_j \in \mathcal{D}_j$ . En outre,  $\Sigma_{j+1} \subset \Sigma_j$ , et pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $S^m \subset \Sigma_{2m}$ ; enfin  $\hat{H}(h) \in \Sigma_2$ . La quantification de Weyl d'un tel symbole fournit la somme d'un opérateur pseudo-différentiel dans  $S^0(\mathbb{R}^{2n})$  et d'un *h*-opérateur différentiel à coefficients polynômiaux.

Proposition 5.3.1 Il existe une unique série formelle

$$\tilde{H}(\varepsilon) = \tilde{H}_2 + \varepsilon \tilde{H}_3 + \varepsilon^2 \tilde{H}_4 + \dots \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!],$$

avec  $H_2$  donné par (5.7), telle que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{H}(h) = hU^{-1} \left( \sum_{j=2}^{N+2} \varepsilon^{j-2} \tilde{H}_j \right) U + R_{N+3}(h),$$
(5.11)

où  $\varepsilon = \sqrt{h}$  et  $R_{N+3}(h) = Op_h^W(r_{N+3}(h))$  avec  $r_{N+3}(h) \in \Sigma_{N+3}$ .

**Démonstration.** On note  $a(x,\xi;h) \sim \sum_{k \ge 0} h^k a_k(x,\xi)$  le symbole de Weyl de  $\hat{H}(h)$ . Pour tout symbole  $p(x,\xi;h)$ , on a la formule

$$U(Op_h^W(p(h)))U^{-1} = Op_1^W(p'(h)),$$

dans laquelle  $p'(x,\xi;h) = p(\sqrt{hx},\sqrt{h\xi};h)$ . Or tout élément  $P_j \in \mathcal{D}_j$  s'écrit de façon unique  $P_j = Op_1^W(p_j)$ , où  $p_j$  est un polynôme en  $(x,\xi)$ , de degré inférieur ou égal à j et dont les composantes homogènes sont de même parité que j. L'équation (5.11) se réécrit donc de la manière suivante:

$$a(\sqrt{h}(x,\xi);h) = \sum_{j=2}^{N+2} h^{\frac{j}{2}} \tilde{H}_j(x,\xi) + r_{N+3}(\sqrt{h}(x,\xi);h),$$

où on a identifié  $\tilde{H}_j$  et  $Op_1^W(\tilde{H}_j)$ . Notons que  $\tilde{H}_2 = Op_1^W(q_2)$  est donné par (5.2). Si  $r_{N+3} \in \Sigma_{N+3}$ ,  $r_{N+3}(\sqrt{h}(x,\xi);h) = O(h^{\frac{N+3}{2}})$  près de l'origine, ce qui entraîne l'unicité des  $\tilde{H}_j$ .

L'existence va s'obtenir simplement en réordonnant correctement le développement de Taylor de a(h). Pour chaque k, le développement de Taylor de  $a_k$  à l'ordre  $N_k$  s'écrit

$$a_k = \sum_{i=0}^{N_k} A_{k,i} + B_{k,N_k+1},$$

où  $A_{k,i}$  est un polynôme homogène de degré i en  $(x,\xi)$ , et  $B_{k,N_k+1}$  est une fonction  $C^{\infty}$  qui est  $O(||(x,\xi)||^{N_k+1})$  près de l'origine. Par hypothèse,  $A_{0,0} = A_{0,1} = 0$ .

On fixe  $N \in \mathbb{N}$  et on pose, pour  $k \leq N/2 + 1$ ,  $N_k = 2 + N - 2k$ , de sorte que, d'une part,

$$b(h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{k \leq N/2+1 \\ k \in \mathbb{N}}} h^k B_{k,N_k+1} \in \Sigma_{N+3},$$

et d'autre part

$$\sum_{\substack{k \leq N/2+1 \\ k \in \mathbb{N}}} h^k \sum_{i=0}^{N_k} A_{k,i}(\sqrt{h}(x,\xi)) = \sum_{j=0}^{N+2} h^{\frac{j}{2}} \sum_{\substack{2k+i=j \\ k,i \in \mathbb{N}}} A_{k,i}(x,\xi).$$

Notons que les coefficients non nuls dans le terme de droite commencent à j = 2.

Enfin, le symbole a(h) étant classique, il existe un  $r(h) \in S_{Cl}^{E(N/2)+2}(\mathbb{R}^{2n}) \subset \Sigma_{N+3}$  tel que  $a(h) = \sum_{\substack{k \leq N/2+1 \ k \in \mathbb{N}}} h^k a_k + r(h)$ . On obtient donc :

$$a(\sqrt{h}(x,\xi);h) = \sum_{j=2}^{N+2} h^{\frac{j}{2}} \sum_{\substack{i \le j \\ i \equiv j \mod 2}} A_{k,i}(x,\xi) + r_{N+3}(\sqrt{h}(x,\xi);h),$$

où on a posé

$$_{N+3}(x,\xi;h) = r(x,\xi;h) + b(x,\xi;h) \in \Sigma_{N+3}$$

Autrement dit, la série formelle

r

$$\tilde{H}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \ge 2} \varepsilon^{j-2} \sum_{\substack{i \le j \\ i \equiv j \mod 2}} Op_1^W(A_{k,i}) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$$

répond à la question.

§ 5.3.3. Forme normale de Birkhoff. — Étant donné l'opérateur  $\hat{H}(h)$ , la proposition 5.3.1 fournit une série formelle  $\tilde{H}(\varepsilon)$ , et on note  $\tilde{K}(\varepsilon) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$  une série normalisée (formellement auto-adjointe) associée : il existe  $\tilde{g}(\varepsilon)$  tel que

$$\tilde{g}(\varepsilon)\tilde{H}(\varepsilon)\tilde{g}(\varepsilon)^{-1} = \tilde{K}(\varepsilon).$$

Il nous reste à énoncer cette normalisation sous une forme utilisable dans le cadre semi-classique. Le résultat obtenu est à rapprocher de [79, theorem 1.4], ainsi que des formes normales pour les laplaciens riemanniens de Zelditch [91].

 $\tilde{g}(\varepsilon)$  étant formellement unitaire, il s'écrit  $\tilde{g}(\varepsilon) = e^{i\tilde{A}}$ , où  $\tilde{A}(\varepsilon) = \varepsilon \tilde{A}_3 + \cdots \in \mathcal{D}_2[\![\varepsilon]\!]$  est formellement auto-adjointe. Pour tous  $N \ge 0$ , on note  $\tilde{H}^{(N)}(\varepsilon)$  la série tronquée jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^N$  inclus, et de même pour  $\tilde{A}(\varepsilon)$  et  $\tilde{K}(\varepsilon)$ . Enfin, on note

$$K^{(N)}(h) \stackrel{\text{def}}{=} h U^{-1} \left( \tilde{K}^{(N)}(\sqrt{h}) \right) U = \hat{H}_2(h) + \sum_{j=3}^{N+2} K_j(h), \tag{5.12}$$

avec  $K_j(h) = U^{-1}h^{j/2}\tilde{K}_jU$ . On définit de même  $\hat{H}^{(N)}(h) = \hat{H}_2(h) + \cdots$  et  $A^{(N)}(h) = A_3(h) + \cdots$ .

On se donne  $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ , valant 1 sur un voisinage M de l'origine, et on note  $\Phi(h) = Op_h^W(\varphi)$ . Notons que pour tout h-opérateur différentiel P d'ordre zéro (en h),  $\Phi P$  et  $P\Phi$  appartiennent à  $S^0(\mathbb{R}^{2n})$ . Puisque  $\Phi(h)A^{(N)}(h)\Phi(h)$  est uniformément borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , et donc auto-adjoint, on peut former l'opérateur unitaire

$$g_{\varphi}^{(N)}(h) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{i}{\hbar}\Phi(h)A^{(N)}(h)\Phi(h)}.$$
(5.13)

Par le théorème d'Egorov,  $g_{\varphi}^{(N)}(h)\hat{H}(h)(g_{\varphi}^{(N)}(h))^{-1} \in S^0(\mathbb{R}^{2n})$  (voir par exemple le livre [75, p.202]), et son symbole principal a la même partie quadratique que  $\hat{H}(h)$ . On peut donc lui appliquer la proposition 5.3.1. Il reste à déterminer la série formelle associée. On écrit pour cela

$$g_{\varphi}^{(N)}(h)\hat{H}(h)(g_{\varphi}^{(N)}(h))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\operatorname{ad}_{\frac{i}{h}\Phi(h)A^{(N)}(h)\Phi(h)})^{j} \hat{H}(h).$$

Puisque  $\operatorname{ad}_{\frac{i}{h}\Phi(h)A^{(N)}(h)\Phi(h)}(h) \exp \Sigma_{j} \operatorname{sur} \Sigma_{j+1}$ , le terme d'ordre j dans la somme est dans  $\Sigma_{j+2}$ . Jusqu'à l'ordre N, la série formelle associée est donc déterminée par la série de Taylor de la somme tronquée à l'ordre j = N, dans laquelle on peut remplacer  $\hat{H}(h)$  par  $\hat{H}^{(N)}(h)$ . Enfin, puisque, pour tous j, les symboles de  $(\operatorname{ad}_{\frac{i}{h}\Phi(h)A^{(N)}(h)\Phi(h)})^{j}\hat{H}^{(N)}(h)$  et  $(\operatorname{ad}_{\frac{i}{h}A^{(N)}(h)})^{j}\hat{H}^{(N)}(h)$  ont le même développement asymptotique près de l'origine, l'équation (5.9) indique que la série formelle associée à  $g_{\varphi}^{(N)}(h)\hat{H}(h)(g_{\varphi}^{(N)}(h))^{-1}$  est bien  $\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon)$ .

On en déduit l'énoncé suivant :

**Théorème 5.3.2** Avec les notations ci-dessus, il existe un opérateur unitaire  $g_{\varphi}^{(N)}(h)$  (donné par (5.13)), et un opérateur  $Q_{N+3}(h) = Op_h^W(q_{N+3}(h))$ , avec  $q_{N+3} \in \Sigma_{N+3}$ , tel que

$$g_{\varphi}^{(N)}(h)\hat{H}(h)(g_{\varphi}^{(N)}(h))^{-1} = K^{(N)}(h) + Q_{N+3}(h).$$
(5.14)

#### 5.4 Approximation des états semi-excités

§ 5.4.1. Résultat principal. — On se donne toujours H(h) admettant un puits global non-dégénéré, et on s'intéresse à la partie du spectre située à distance  $O(h^{\gamma}), \gamma > 0$ , de 0.

 $\mathcal{D}_j$  désigne comme précédemment l'espace des opérateurs différentiels formellement auto-adjoints à coefficients polynômiaux de degré total inférieur ou égal à j et dont tous les monômes ont la parité de j. Le théorème 5.3.2 associe à  $\hat{H}(h)$  une série formelle  $\tilde{K}(\varepsilon) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!]$ , avec  $\tilde{K}_2 = \tilde{H}_2$  donné par (5.7), qui est normalisée :  $\forall j \ge 2, [\tilde{H}_2, \tilde{K}_j] = 0$  ( $\tilde{K}_j \in \mathcal{D}_j$ ).

On connaît bien la théorie spectrale de l'oscillateur harmonique  $\tilde{H}_2$ . Dans la représentation de Bargmann-Fock (fonctions entières dans  $\mathbb{C}^n$  munies de la norme  $L^2$  de poids  $e^{-|z|^2}$ ; cf. [2]),  $a_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$  et  $b_i = z_i$ , donc

$$\tilde{H}_2 = \sum_i \omega_i (z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{1}{2})$$

Une base orthonormée de fonctions propres est formée des monômes  $z^{\alpha}/\sqrt{\alpha}!$ pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , associés aux valeurs propres  $\langle \alpha, \omega \rangle + \frac{1}{2} |\omega|$ . Notons

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} |\omega| < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$$

ces valeurs propres (la positivité des  $\omega_i$  implique que  $\lambda_0$  est simple), et  $\mathfrak{E}_k$  les sous-espaces propres (de dimension finie) correspondants.

Soit  $\tilde{K}^{(N)} = \tilde{K}^{(N)}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^{j} \tilde{K}_{j+2}$ . Par hypothèse, chaque  $\mathfrak{E}_{k}$  est stable par  $\tilde{K}^{(N)}$ . La restriction de  $\tilde{K}^{(N)}$  à  $\mathfrak{E}_{k}$  est une matrice hermitienne de dimension finie, donc diagonalisable; les fonctions propres sont des combinaisons linéaires des  $z^{\alpha} \in \mathfrak{E}_{k}$ . De retour dans  $L^{2}(\mathbb{R}^{n})$ , ces fonctions sont dans dans l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n})$ . On en déduit que  $\tilde{K}^{(N)}$  est essentiellement auto-adjoint à partir de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n})$ , et son spectre est la fermeture de l'union des valeurs propres des  $\tilde{K}^{(N)}_{|\mathfrak{E}_{k}}$ .

Le spectre de  $\hat{H}(h)$  dans une région semi-excitée ( $\lambda \leq ch^{\gamma}, c, \gamma > 0$ ) correspond à celui de  $\frac{1}{h}U\hat{H}(h)U^{-1}$  dans la région { $\lambda \leq c\varepsilon^{-\delta}$ }, avec  $\varepsilon = \sqrt{h}$  et  $\delta = 2(1-\gamma)$ . Le but de cette section est de montrer que ce spectre est bien approché par celui de  $\tilde{K}^{(N)}_{|\mathfrak{E}^{\delta}(\varepsilon)}$ , où  $\mathfrak{E}^{\delta}(C,\varepsilon)$  est le sous-espace propre de  $\tilde{H}_2$  associé aux valeurs propres inférieures à  $C\varepsilon^{-\delta}$ .

**Théorème 5.4.1** On suppose que  $\hat{H}(h)$  admet un puits global non-dégénéré et que  $\tilde{K}(\varepsilon)$  est une série normalisée associée. On se donne  $\gamma \in [0,1]$  et on pose  $\delta = 2(1 - \gamma)$ . Pour tout c > 0, il existe C > c tel que, si  $E_0(h) \leq E_1(h) \leq \cdots$ et  $\tilde{E}_0^{(N)}(\varepsilon) \leq \tilde{E}_1^{(N)}(\varepsilon) \leq \cdots$  sont les valeurs propres de  $\hat{H}(h)$  et  $\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon)_{\uparrow \mathfrak{E}^{\delta}(C,\varepsilon)}$ , alors

 $E_j(h) - h\tilde{E}_j^{(N)}(\sqrt{h}) = O(h^{(N+3)\frac{\gamma}{2}}),$ 

uniformément pour tous j tels que  $E_j(h)$  (ou  $h\tilde{E}_j^{(N)}(\sqrt{h})) \leq ch^{\gamma}$ .

**Remarque 5.4.1.** L'espace  $\mathfrak{E}^{\delta}(\varepsilon)$  étant de dimension finie, croissant lorsque  $h = \varepsilon^2 \to 0$ , ce théorème est proche du point de vue de l'analyse numérique, car il justifie la méthode qui consiste à chercher des approximations du spectre en diagonalisant des matrices de grande taille. L'amélioration qu'il propose, par rapport à la méthode usuelle consistant à projeter les fonctions propres de  $\hat{H}(h)$  sur les états propres de l'oscillateur harmonique, est d'utiliser la série de Birkhoff normalisée, pour laquelle la projection sur les états propres de l'oscillateur harmonique est l'identité.

La démonstration du théorème se fait en deux étapes. On commence par montrer que deux opérateurs pseudo-différentiels dans  $S^0$  admettant un puits

global non-dégénéré et dont les séries de Taylor des symboles coïncident jusqu'à un certain ordre auront des spectres semi-excités proches. Dans cette étape les deux opérateurs jouent le même rôle, et on peut appliquer les techniques de microlocalisation à paramètre introduites par Sjöstrand [78], [79]. Cette étape, appliquée à l'opérateur normalisé donné par le théorème 5.3.2, est énoncée par la proposition 5.4.2.

La deuxième étape (proposition 5.4.3) démontre que le spectre semi-excité d'un opérateur pseudo-différentiel admettant un puits global non-dégénéré et dont la série formelle associée est *normalisée* (et finie) est égal modulo  $O(h^{\infty})$  à celui de la matrice hermitienne donnée par la restriction de cette série formelle à  $\mathfrak{E}^{\delta}(\varepsilon)$ .

On utilisera dans toute la démonstration la notation avec le paramètre h. On note à cet effet  $\mathfrak{F}^{\gamma}(C,h) = U^{-1}(\mathfrak{E}^{\delta}(C,\sqrt{h}))$ ; donc pour  $\varepsilon = \sqrt{h}$ , le spectre de  $(\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon)_{|\mathfrak{E}^{\delta}(C,\varepsilon)})$  est égal à celui de  $\frac{1}{h}(K^{(N)}(h)_{|\mathfrak{F}^{\gamma}(C,h)})$ , où on rappelle que  $K^{(N)}(h)$  est défini par (5.12).

§ 5.4.2. Microlocalisation. — La microlocalisation dans la région semi-excitée s'effectue à l'aide d'un calcul symbolique d'opérateurs pseudo-différentiels adapté : soit  $\chi(x,\xi) \in C_0^{\infty}(T^*\mathbb{R}^n), \ \chi = 1$  près de zéro, et, pour  $\eta > 0, \ \chi_{\eta}(x,\xi) = \chi(\frac{x}{\eta}, \frac{\xi}{\eta})$ . Suivant Sjöstrand [78], on construit alors l'opérateur

$$\hat{\chi}^{\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} Op_{h}^{W}(\chi_{(h^{\frac{\gamma}{2}})}).$$

Pour  $\gamma \in [0,1]$ , son symbole appartient à la classe  $S^0_{\gamma}(\mathbb{R}^{2n})$ , définie en remplaçant (5.10) par

$$\forall \alpha, \beta, \quad \exists C > 0, \quad |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x,\xi;h)| \leqslant C h^{-\frac{\gamma}{2}(|\alpha| + |\beta|)}$$

Si  $P_j(h)$  est un opérateur de la forme  $Op_h^W(p_j(h))$ , avec  $p_j \in \Sigma_j$ , alors pour tous  $\gamma \in [0,1]$ , et tout  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $P_j(h)\hat{\chi}^{\gamma}$  est uniformément borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , et on a, par le calcul symbolique:

$$\|P_{j}(h)\hat{\chi}^{\gamma}\| = O(\sum_{\substack{2k+i=j\\k,i\in\mathbb{N}}} h^{k+i\frac{\gamma}{2}}) = O(h^{j\frac{\gamma}{2}}),$$
(5.15)

 $\operatorname{car} k + i\frac{\gamma}{2} \ge \gamma(k + i/2) = \gamma \frac{j}{2}.$ 

Les opérateurs  $\hat{\chi}^{\gamma}$  sont utilisés pour mesurer la microlocalisation des fonctions propres de la manière suivante : si K est un voisinage compact de  $(0,0) \in \mathbb{R}^{2n}$ , et u(h) une famille dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , normalisée, on dira que u(h) est microlocalisée dans  $h^{\gamma}K$  si pour tout  $\chi$  valant 1 sur un voisinage de K,

$$\|(1 - \hat{\chi}^{\gamma})u\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})} = O(h^{\infty}).$$
(5.16)

§ 5.4.3. Première étape. — En tronquant convenablement le symbole à l'infini, on peut construire un élément de  $S^0_{Cl}(\mathbb{R}^{2n})$  admettant un puits global nondégénéré et ayant le même développement de Taylor que  $K^{(N)}(h)$ . Notons-le  $\hat{K}^{(N)}(h)$ .

La proposition suivante énonce que le spectre semi-excité de  $\hat{K}^{(N)}(h)$  est une bonne approximation de celui de  $\hat{H}(h)$ .

**Proposition 5.4.2** Soient  $E_0(h) \leq E_1(h) \leq \cdots$  et  $E_0^{(N)}(h) \leq E_1^{(N)}(h) \leq \cdots$ les valeurs propres de  $\hat{H}(h)$  et  $\hat{K}^{(N)}(h)$ . Pour tous  $\gamma \in [0,1]$  et c > 0, on a

$$E_j(h) - E_j^{(N)}(h) = O(h^{(N+3)\frac{\gamma}{2}}),$$

uniformément pour tous j tels que  $E_j(h)$  (ou  $E_j^{(N)}(h)$ )  $\leq ch^{\gamma}$ .

**Démonstration.** On suit le schéma de Sjöstrand [79, proposition 2.3]: l'idée principale est que les fonctions propres sont microlocalisées au fond du puits de potentiel dans la région donnée par la dynamique classique (qui est donc de taille  $O(h^{\frac{\gamma}{2}})$ , si les énergies sont d'ordre  $O(h^{\gamma})$ ). Plus précisément, on a le résultat suivant ([79]):

« Soient P(h) un *h*-opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 dont le symbole principal p admet un minimum non-dégénéré en 0, et  $B_P(c)$  la boule fermée définie par

$$B_P(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \frac{1}{2}p''(0).(x;\xi) \leqslant c\}.$$

Soit maintenant c > 0. Alors toute fonction propre normalisée u = u(h) associée à une valeur propre  $E(h) \leq ch^{\gamma}$  est microlocalisée dans  $h^{\gamma}B_P(c)$ : l'estimation (5.16) est valide pour toute  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  valant 1 sur un voisinage de  $B_P(c)$ . En outre, le reste est localement uniforme si P(h) dépend continûment d'un paramètre t. »

(la précision sur le support de  $\chi$  n'est pas énoncée dans l'article [79], mais découle de la preuve qui y est donnée.)

Soit  $g = g_{\varphi}^{(N)}(h)$  l'opérateur unitaire donné par le théorème 5.3.2. On applique l'estimation (5.16) à

$$P_t(h) \stackrel{\text{def}}{=} (1-t)g\hat{H}(h)g^{-1} + t\hat{K}^{(N)}(h)$$

Notons que  $P_t(h) \in S^0(\mathbb{R}^{2n})$  et que la partie quadratique de son symbole en zéro est constante, égale au symbole de  $\tilde{H}_2$ .

Donnons-nous maintenant une fonction  $\chi$  valant 1 sur un voisinage de  $B_{\tilde{H}_2}(c)$ (donc vérifiant (5.16)). Comme le symbole de  $\hat{K}^{(N)}(h) - K^{(N)}(h)$  est dans  $\Sigma_j$ pour tous  $j \ge 0$ , l'estimation (5.15) implique

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)}(h) - K^{(N)}(h) \right) \hat{\chi}^{\gamma} \right\| = O(h^{\infty}).$$
 (5.17)

De la même façon, le théorème 5.3.2 implique

$$\left\| \left( K^{(N)}(h) - g\hat{H}(h)g^{-1} \right) \hat{\chi}^{\gamma} \right\| = O(h^{\frac{\gamma}{2}(N+3)}),$$

ce qui nous donne finalement

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)}(h) - g\hat{H}(h)g^{-1} \right) \hat{\chi}^{\gamma} \right\| = O(h^{\frac{\gamma}{2}(N+3)}).$$

Puisque, par (5.16), on a

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)}(h) - g\hat{H}(h)g^{-1} \right) (1 - \hat{\chi}^{\gamma})u_t \right\| = O(h^{\infty}),$$

on en déduit, écrivant  $u_t = (1 - \hat{\chi}^{\gamma})u_t + \hat{\chi}^{\gamma}u_t$ , que

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)}(h) - g\hat{H}(h)g^{-1} \right) u_t \right\| = O(h^{\frac{\gamma}{2}(N+3)}).$$

Enfin, on note  $E_{i,t}(h)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  les valeurs propres de  $P_t(h)$  en ordre croissant répétées avec multiplicité. À h fixé, chaque  $E_{i,t}(h)$  est continue en t, et en dehors des points de croisement  $t_k$ , qui sont isolés (par l'analyticité de  $t \to P_t(h)$ ) et donc en nombre fini, elle est  $C^{\infty}$  et de multiplicité constante (voir p.ex. le livre [62, VII §3]). Sur  $[0,1] \setminus \bigcup_k \{t_k\}$ , on a :

$$\frac{\partial E_{i,t}(h)}{\partial t} = \langle \frac{\partial P_t(h)}{\partial t} u_t(h), u_t(h) \rangle,$$

et donc  $\frac{\partial E_{i,t}(h)}{\partial t} = O(h^{(N+3)\frac{\gamma}{2}})$ , si  $E_{i,t} \leq ch^{\gamma}$ . La proposition en découle.  $\Box$ 

*§ 5.4.4. Deuxième étape.* — Nous terminons ici la preuve du théorème 5.4.1. Étant donnée la proposition 5.4.2, il suffit bien sûr de montrer la proposition suivante :

**Proposition 5.4.3** Soit  $\gamma \in [0,1]$ . Pour tout c > 0, il existe C > c tel que, si  $\lambda_0(h) \leq \lambda_1(h) \leq \cdots$  et  $\lambda'_0(h) \leq \lambda'_1(h) \leq \cdots$  sont les valeurs propres de  $\hat{K}^{(N)}(h)$  et  $K^{(N)}(h)_{|\mathfrak{F}^{\gamma}(C,h)}$ , alors

$$\lambda_j(h) - \lambda'_j(h) = O(h^\infty),$$

uniformément pour tous j tels que  $\lambda_j(h)$  (ou  $\lambda'_j(h)$ )  $\leq ch^{\gamma}$ .

Démonstration. Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 5.4.4** Soit  $\Pi = \Pi(h)$  le projecteur orthogonal sur  $\mathfrak{F}^{\gamma}(h)$ .

1. Pour tout opérateur différentiel  $P_j \in U^{-1}(h^{\frac{j}{2}}\mathcal{D}_j)U$ , on a la majoration (grossière):

$$||P_j\Pi|| = O(h^{j\frac{\gamma}{2} - \frac{(1-\gamma)(n-1)}{2}})$$

2. Pour toute fonction  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  valant 1 sur un voisinage de  $B_{\tilde{H}_2}(C)$ ,

$$(1 - \hat{\chi}^{\gamma})\Pi \in S^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}).$$

3. Pour toute fonction  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans l'intérieur de  $B_{\tilde{H}_2}(C)$ ,

$$(1-\Pi)\hat{\chi}^{\gamma} \in S^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$$

Soit maintenant  $u \in \mathfrak{F}^{\gamma}(h)$  un vecteur propre de  $K^{(N)}$  et  $\hat{H}_2(h)$ . On choisit  $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  valant 1 sur un voisinage de  $B_{\tilde{H}_2}(C)$ . Puisque  $u = \Pi u$ , le deuxième point du lemme fournit l'estimation :

$$\|(1-\hat{\chi}^{\gamma})u\| = O(h^{\infty}).$$

On déduit alors du premier point du lemme que

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)} - K^{(N)} \Pi \right) (1 - \hat{\chi}^{\gamma}) u \right\| = O(h^{\infty}).$$
 (5.18)

Si P est un opérateur (pseudo)-différentiel et  $\chi \in C_0^{\infty}$ , on obtient en écrivant  $P\Pi\hat{\chi}^{\gamma} = P\hat{\chi}^{\gamma}\Pi\hat{\chi}^{\gamma} + P(1-\hat{\chi}^{\gamma})\Pi\hat{\chi}^{\gamma}$  et en appliquant le deuxième point du lemme 5.4.4,

$$\|P\Pi\hat{\chi}^{\gamma}\| \leqslant \|P\hat{\chi}^{\gamma}\| \cdot \|\Pi\hat{\chi}^{\gamma}\| + O(h^{\infty}) = O(1)\|P\hat{\chi}^{\gamma}\| + O(h^{\infty}).$$

L'estimation (5.17) implique donc

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)} - K^{(N)} \right) \Pi \hat{\chi}^{\gamma} \right\| = O(h^{\infty}).$$

On obtient donc:

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)} - K^{(N)} \right) u \right\| = \| \left( \hat{K}^{(N)} - K^{(N)} \right) (\Pi \hat{\chi}^{\gamma} u + \Pi (1 - \hat{\chi}^{\gamma}) u) \| = O(h^{\infty}).$$

Réciproquement, supposons que u soit un vecteur propre de  $\tilde{H}(h)$ , unitaire, et associé à une valeur propre inférieure à  $ch^{\gamma}$ . Si C est assez grand (et seulement si C > c), on peut choisir une fonction  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans l'intérieur de  $B_{\tilde{H}_2}(C)$  et valant 1 sur un voisinage de  $B_{\tilde{H}_2}(c)$ . On a, d'après (5.16),  $\|(1 - \hat{\chi}^{\gamma})u\| = O(h^{\infty})$ . L'estimation (5.18) est donc encore valide.

On déduit du troisième point du lemme que

$$\left\| \left( K^{(N)} - K^{(N)} \Pi \right) \hat{\chi}^{\gamma} \right\| = O(h^{\infty}).$$

Écrivant  $\hat{K}^{(N)} - K^{(N)}\Pi = (\hat{K}^{(N)} - K^{(N)}) + (K^{(N)} - K^{(N)}\Pi)$ , on trouve

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)} - K^{(N)} \Pi \right) \hat{\chi}^{\gamma} \right\| = O(h^{\infty}),$$

et on conclut comme précédemment que

$$\left\| \left( \hat{K}^{(N)} - K^{(N)} \Pi \right) u \right\| = O(h^{\infty}).$$

La preuve de la proposition se termine alors comme dans les articles [52] ou [79] par des arguments de distance de Kato, en tenant compte du fait que la multiplicité totale des spectres de  $K^{\gamma(N)}$  et de  $K^{(N)}\Pi$  dans  $] - \infty, ch^{\gamma}]$  est  $O(h^{-N_0}), N_0 > 0.$  **Démonstration** du lemme 5.4.4. Pour la preuve du premier point, on se place en représentation de Bargmann. Sachant que  $||z^{\alpha}/\sqrt{\alpha!}|| = 1$ , on vérifie facilement que pour tous multi-indices  $\beta$  et  $\gamma$ ,

$$\left\| z^{\beta} (\frac{\partial}{\partial z})^{\gamma} \frac{z^{\alpha}}{\sqrt{\alpha!}} \right\| \sim \alpha^{\frac{\beta+\gamma}{2}} \text{ quand } |\alpha| \to \infty.$$

Écrivant tout  $u \in \mathfrak{E}_k$  sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{d_k} c_i \frac{z^{\alpha_{(i)}}}{\sqrt{\alpha_{(i)}!}},$$

où  $d_k$  désigne la dimension de  $\mathfrak{E}_k$ , on obtient, pour  $P_j \in \mathcal{D}_j$ ,

$$\|\tilde{P}_j u\| \leqslant b'(\lambda_k)^{j/2} \sqrt{d_k},$$

où b' est indépendant de u et de k. Il est aisé de majorer grossièrement  $d_k$  par  $O((\lambda_k)^{n-1})$ , ce qui fournit la borne (où le O dépend de j):

$$\|(\tilde{P}_j)_{\uparrow \mathfrak{E}^{\delta}(C,\varepsilon)}\| = O(\varepsilon^{-\frac{\delta}{2}(j+n-1)}).$$

Repassant au paramètre h par  $\varepsilon = \sqrt{h}$  et  $\delta = 2(1 - \gamma)$ , on obtient le premier point du lemme.

Le deuxième point est essentiellement une reformulation du résultat de Sjöstrand déjà cité (formule (5.16)). On note  $q = \sum \omega_i(\frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2})$  le symbole de  $\hat{H}_2$ . Soit  $\rho \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  valant 1 sur un voisinage de [0,C] et telle que  $\rho \circ q$  soit à support dans l'intérieur de  $\chi^{-1}\{1\}$ .

Soit alors  $P^{\gamma} = \rho(\frac{\hat{H}_2(h)}{h^{\gamma}})$ , défini par le calcul fonctionnel. On a  $P^{\gamma} \in S^0_{\gamma}(\mathbb{R}^{2n})$ , et  $(1 - \hat{\chi}^{\gamma})P^{\gamma} \in S^{\infty}$ .

En outre,  $(1-P^{\gamma})\Pi = ((1-\rho).1_{[0,C]})(\frac{\hat{H}_2(h)}{h^{\gamma}}) = 0$  (on a noté  $1_{[0,C]}$  la fonction caractéristique de l'intervalle [0,C]). Donc pour tout opérateur différentiel Q,

$$|Q(1 - \hat{\chi}^{\gamma})\Pi|| = ||Q(1 - \hat{\chi}^{\gamma})P^{\gamma}\Pi|| \leq ||Q(1 - \hat{\chi}^{\gamma})P^{\gamma}|| = O(h^{\infty}),$$

ce qui prouve le deuxième point du lemme.

Le troisième point se montre de manière analogue. On choisit cette fois  $\rho \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  à support dans [0,C] et telle que  $\rho \circ q$  vaille 1 sur le support de  $\chi$ . Alors  $P^{\gamma} = \rho(\frac{\hat{H}_2(h)}{h^{\gamma}})$  vérifie  $(1 - \Pi)P^{\gamma} = ((1 - 1_{]-\infty,C]}) \cdot \rho)(\frac{\hat{H}_2(h)}{h^{\gamma}}) = 0$ . Donc pour tout opérateur différentiel Q,

$$Q(1 - \Pi)\hat{\chi}^{\gamma} = Q(1 - \Pi)(1 - P^{\gamma})\hat{\chi}^{\gamma} =$$
$$Q(1 - P^{\gamma})\hat{\chi}^{\gamma} - Q\Pi(1 - P^{\gamma})\hat{\chi}^{\gamma}.$$

Le premier terme est  $O(h^{\infty})$  (en norme  $L^2$ ) par le calcul symbolique, ainsi que le deuxième, en vertu du premier point du lemme. On en déduit le dernier point du lemme.

§ 5.4.5. Asymptotiques de fond de puits.— Le théorème 5.4.1 permet de retrouver facilement le résultat de Helffer et Sjöstrand [52] sur les valeurs propres dans une région du type  $] - \infty, ch]$ .

**Corollaire 5.4.5 ([52])** Pour tout c > 0, et pour h assez petit, le spectre de  $\hat{H}(h)$  dans  $]-\infty,ch]$  est constitué d'un nombre borné (indépendamment de h) de valeurs propres. Ces valeurs propres admettent un développement asymptotique de la forme

$$E(h) \sim \sum_{j=2}^{\infty} h^{\frac{j}{2}} E_j,$$

où  $E_0$  est une valeur propre de  $\tilde{H}_2$ . Le nombre de valeurs propres ayant un tel  $E_0$  fixé est égal pour h assez petit à la multiplicité de  $E_0$  pour  $\tilde{H}_2$ . En particulier, la plus petite valeur propre de  $\hat{H}(h)$  est simple pour h assez petit.

**Démonstration.** On applique le théorème 5.4.1 avec  $\gamma = 1$ . L'espace  $\mathfrak{E}^{\gamma}(C,\varepsilon)$  est alors de dimension indépendante de  $\varepsilon$  (on a  $\delta = 0$ ), et le résultat découle de la théorie standard des perturbations de matrices hermitiennes appliqué à  $\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon)_{\uparrow \mathfrak{E}^{\gamma}(C,\varepsilon)}$ .

On comprend bien en particulier que si les  $K_j$  avec j impair sont nuls jusqu'à j < 2k, alors  $\frac{E(h)}{h}$  admet un développement asymptotique en puissances *entières* de h modulo  $O(h^{k-\frac{1}{2}})$ .

§ 5.4.6. Fonction de comptage. — On note  $N_h^{\gamma} = \#\{E \in Sp(\hat{H}(h)), E \leq h^{\gamma}\}.$ 

**Théorème 5.4.6** On note  $q(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2})$  la partie quadratique du symbole principal p de  $\hat{H}(h)$ . Pour tout  $\gamma \in [0,1[$ ,

$$N_h^{\gamma} = \frac{h^{-n(1-\gamma)}}{(2\pi)^n} \int_{q(x,\xi) \leqslant 1} |dxd\xi| + O(h^{(1-n)(1-\gamma)}) + O(h^{-n(1-\gamma)+\frac{\gamma}{2}}).$$

**Remarque 5.4.2.** 
$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{q(x,\xi) \leq 1} |dxd\xi| = \frac{1}{n!\omega_1 \dots \omega_n}.$$

**Remarque 5.4.3.** Si (et seulement si)  $\gamma = 0$ , le dernier terme d'erreur est du même ordre que le terme principal. C'est heureux car on sait que dans ce cas la constante qui intervient est le volume de  $p^{-1}(]-\infty,1]$ ) (cf. [51]). Donc si  $p \neq q$ , ce terme d'erreur est optimal.

À l'inverse, si  $\gamma>2/3,$  le dernier terme d'erreur est négligeable par rapport au premier. $\bigtriangleup$ 

**Démonstration.** Le théorème 5.4.1 indique que le nombre de  $E_i(h) \leq h^{\gamma}$  est égal à celui des  $\tilde{E}_i^{(N)}(\varepsilon) \leq \varepsilon^{\delta}$ , à une erreur près qui est majorée par le nombre de  $E_j$  (ou  $h\tilde{E}_j^{(N)}$ ) dans un intervalle de largeur  $O(h^{\frac{\gamma}{2}(N+3)-1}) = O(\varepsilon^{N+1-\frac{\delta}{2}(N+3)})$ .

Appliquant ceci à N = 0, on est réduit à compter les valeurs propres  $(\lambda_k)$  de  $\tilde{H}_2$  inférieures à  $\varepsilon^{-\delta}$  (on note toujours  $\varepsilon = \sqrt{h}$ , et  $\delta = 2(1 - \gamma)$ ).

Il est aisé de majorer le nombre (avec multiplicité) de  $\lambda_k \leq C\varepsilon^{-\delta}$  dans un intervalle de largeur  $\ell$  par  $O(\ell\varepsilon^{-\delta(n-1)})$ , uniformément par rapport à  $\ell$  et  $\varepsilon$ . En prenant  $\ell = \varepsilon^{1-\frac{3}{2}\delta}$ , on obtient

$$N_h^{\gamma} = \#\{\alpha \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2}|\omega| + \langle \omega, \alpha \rangle \leqslant \varepsilon^{-\delta}\} + O(\varepsilon^{1 - \delta(n + \frac{1}{2})}).$$

Le premier terme est égal à

$$\varepsilon^{-n\delta}$$
Volume $(\{x \in (\mathbb{R}_+)^n, \langle \omega, x \rangle \leq 1\}) + O(\varepsilon^{-(n-1)\delta}),$ 

qui s'identifie avec les deux premiers termes de la formule du théorème.  $\Box$ 

#### 5.5 Résonances

En vertu du théorème 5.4.1, toute étude plus détaillée du spectre de  $\tilde{H}(h)$ dans une région semi-excitée passe par l'étude de la série normalisée  $\tilde{K}(\varepsilon)$ . La première étape consiste en la détermination du noyau de  $\mathrm{ad}_{\tilde{H}_2}$ . Ce dernier étant la sous-algèbre de  $\mathcal{D}$  engendrée par les  $a^{\alpha}b^{\beta}$  tels que

$$\langle \omega, \beta - \alpha \rangle = 0,$$

il dépend principalement de la nature des résonances de  $\omega$ , c'est-à-dire des relations de dépendance Z-linéaires entre les  $\omega_i$ . Notons que l'étude du noyau est non-triviale parce qu'on se restreint à des  $\alpha$  et  $\beta$  « positifs » (c.-à-d.  $\in \mathbb{N}^n$ ).

On note  $\mathcal{R}_{\omega}$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre des résonances :

$$\mathcal{R}_{\omega} = \{ \alpha \in \mathbb{Z}^n, \quad \langle \alpha, \omega \rangle = 0 \}.$$

§ 5.5.1. Partie complètement intégrable. — La sous-algèbre de ker  $\mathrm{ad}_{\tilde{H}_2}$ correspondant à l'élément particulier  $0 \in \mathcal{R}_{\omega}$  est particulièrement simple à étudier. Elle est commutative, et engendrée par les opérateurs  $a^{\alpha}b^{\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , qui sont des polynômes en ab, ou en les  $\tilde{\Omega}_i$ . Tout  $K_j \in \mathcal{D}_j$  se décompose donc de façon unique en

$$\tilde{K}_j = f_{j/2}(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_n) + L_j,$$

où  $L_j \in \mathcal{D}_j$  est combinaison linéaire de  $a^{\alpha}b^{\beta}$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Notons que  $f_1 = \langle \omega, \cdot \rangle$ ,  $L_2 = 0$  et que puisque  $\tilde{\Omega}_i$  est de degré pair, seuls les  $f_k$  avec k entier peuvent être non nuls. On note  $f(\varepsilon^2) = \sum_{k \ge 1} \varepsilon^{2(k-1)} f_k$  la série formelle correspondante.

Soit  $N_0 \ge 0$  le plus grand j pour lequel  $L_{j+2} = 0$  (éventuellement,  $N_0 = \infty$ ). Bien sûr, puisque  $|\alpha| + |\beta| \ge |\alpha - \beta|$ ,

$$N_0 + 2 \ge \min\{|\alpha|, \alpha \in \mathcal{R}_\omega \text{ et } \alpha \neq 0\} \ge 2.$$

On a alors  $\tilde{K}^{(N_0)}(\varepsilon) = f^{(N_0)}(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_n; \varepsilon^2)$ , où comme d'habitude,  $f^{(N_0)}$  désigne la série tronquée à l'ordre  $\varepsilon^{N_0}$  inclus. Le théorème 5.4.1 indique donc que les valeurs propres de  $\hat{H}(h)$  dans une région semi-excitée sont de la forme

$$hf^{(N_0)}(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \dots, \alpha_n + \frac{1}{2}; h) + O(h^{\frac{\gamma}{2}(N_0 + 3)}).$$
 (5.19)

En particulier, les termes  $E_j$  du développement asymptotique du corollaire 5.4.5 sont nuls pour j impair et  $\leq N_0 + 2$ .

Pour retrouver exactement le résultat de Sjöstrand [79], il suffit de resommer la série  $f(\varepsilon^2)$  de la façon suivante. On pose  $f_0 = 0$ , et on note  $f_k = \sum_{i=0}^k f_{k,i}$  la décomposition de  $f_k$  en polynômes homogènes de degré *i*. Pour  $k \ge 0$ , soit  $g_k$ une fonction  $C_0^{\infty}$  dont le jet formel en 0 est  $\sum_{i\ge 0} f_{k+i,i}$ ; on construit ensuite un symbole g(h) asymptotique à  $\sum_{k\ge 0} h^k g_k$  près de zéro. Les valeurs propres sont alors de la forme

$$g\left(h(\alpha_1+\frac{1}{2}),\ldots,h(\alpha_n+\frac{1}{2});h\right)+O(h^{\frac{\gamma}{2}(N_0+3)}).$$

§ 5.5.2. Résonance  $1: 1: \dots: 1$ . Le cas non-résonant à ceci d'agréable qu'il donne lieu à un comportement de type complètement intégrable. Le comportement des valeurs propres par rapport à celles de l'oscillateur harmonique est cependant délicat dans la mesure ou l'ensemble des  $(\lambda_k - \lambda_{k'})$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . De ce point de vue, la résonance  $1: 1: \dots: 1$  est le cas le plus éloigné, puisqu'alors les  $\lambda_k$  suivent une progression arithmétique. C'est la dichotomie classique entre hamiltonien ergodique et hamiltonien à bicaractéristiques simplement périodiques.

On dit que  $\omega$  est en résonance  $1 : 1 : \cdots : 1$  si tous les  $\omega_i$  sont égaux. Le noyau de  $\operatorname{ad}_{\tilde{H}_2}$  est engendré par les  $a^{\alpha}b^{\beta}$  avec  $|\alpha| = |\beta|$ . En particulier ce sont des opérateurs de degré pair, ce qui implique d'une part que les développements asymptotiques de fond de puits (corollaire 5.4.5) s'écrivent en puissances *entières* de h, et d'autre part que  $N_0 \ge 1$ .

On suppose toujours que  $\hat{H}(h)$  vérifie les hypothèses du théorème 5.4.1, et on note toujours  $\lambda_k = \omega_1(k + \frac{n}{2}), k \in \mathbb{N}$ , les valeurs propres de l'oscillateur harmonique  $\tilde{H}_2$ , et  $q = \frac{\omega_1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \xi_i^2)$  son symbole principal. Le flot hamiltonien  $\varphi^t$  de q est simplement périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ . L'hypersurface invariante  $q^{-1}\{1\}$  est  $C^{\infty}$  et possède une densité canonique |dz| définie par  $|dxd\xi| = |dz| \otimes |dq|$ . Utilisant la remarque (5.4.2), on vérifie facilement que

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{q^{-1}\{1\}} |dz| = \frac{1}{(n-1)!\omega_1^n}.$$

Soit  $\tilde{K}(\varepsilon) \in \mathcal{D}[\![\varepsilon]\!] \cap \ker \operatorname{ad}_{\tilde{H}_2}$  une série normalisée associée à la série  $\tilde{H}(\varepsilon)$ . En comparant les trois premiers coefficients de (5.9), on obtient

$$\begin{split} K_2 &= H_2 \\ \tilde{K}_3 &= \tilde{H}_3 + [A_3, \tilde{H}_2] \\ \tilde{K}_4 &= \tilde{H}_4 + [A_3, \tilde{H}_3] + \frac{1}{2} [A_3, [A_3, \tilde{H}_2]] + [A_4, \tilde{H}_2]. \end{split}$$

Puisque ker $(ad_{\tilde{H}_2})|_{\mathcal{D}_3} = 0$ , on a  $\tilde{K}_3 = 0$  et  $A_3 \in im(ad_{\tilde{H}_2})|_{\mathcal{D}_3}$ ; en outre,  $A_3$  est uniquement déterminé. Il s'ensuit que  $\tilde{K}_4$  est uniquement déterminé, et égal à la projection sur ker $(ad_{\tilde{H}_2})|_{\mathcal{D}_4}$  de  $\tilde{H}_4 + \frac{1}{2}[A_3,\tilde{H}_3]$ .

Notons  $\sqrt{-1}a_j$ ,  $q_j$  et  $p_j$  les symboles principaux respectifs de  $A_j$ ,  $\tilde{K}_j$  et  $\tilde{H}_j$ . On a  $\partial_t(a_3 \circ \varphi^t) = \{q_2, a_3\} \circ \varphi^t = p_3 \circ \varphi^t$ . D'autre part,  $a_3 \in \operatorname{im}(\operatorname{ad}_{q_2})$ , donc  $\int_0^T a_3 \circ \varphi^t dt = 0$ , ce qui implique finalement

$$a_3 = -\frac{1}{T} \int_0^T \left( \int_0^t p_3 \circ \varphi^s ds \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (s-T) p_3 \circ \varphi^s ds.$$

Le projecteur sur ker $(ad_{q_2})$  parallèlement à im $(ad_{q_2})$  est  $f \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \varphi^t dt$ , donc

$$q_4 = \frac{1}{T} \int_0^T p_4 \circ \varphi^t dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \{a_3, p_3\} \circ \varphi^t dt$$

Par exemple, si  $p_3 = ux_i^3$  et  $p_4 = vx_i^4$ , on trouve  $q_4 = \frac{3}{8}(-\frac{5u^2}{2\omega_1} + v)(x_i^2 + \xi_i^2)^2$ .

**Théorème 5.5.1** Si  $\hat{H}(h)$  est en résonance  $1:1:\dots:1$  et  $\gamma \in ]0,1[$ , il existe R > 0 et des sous-ensembles  $\mathcal{A}_k(h)$  de  $\mathbb{R}_+$  finis, deux à deux disjoints, vérifiant, pour tous  $k \leq \frac{C}{\omega_1} h^{\gamma-1} - \frac{n}{2}$ ,

$$\mathcal{A}_k(h) \subset B(\lambda_k, Rh^{2\gamma-1}),$$

et tels que

1. 
$$Sp\left(\hat{H}(h)\right)\cap ]-\infty, ch^{\gamma}] = \left(\bigcup_{k\leqslant \frac{C}{\omega_1}h^{\gamma-1}-\frac{n}{2}}h\mathcal{A}_k(h)\right)\cap ]-\infty, ch^{\gamma}];$$

- 2. chaque  $\mathcal{A}_k(h)$  contient exactement  $d_k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$  valeurs propres de  $\hat{H}(h)$ , comptées avec leurs multiplicités;
- 3. On note  $E_{k,i}(h) = h(\lambda_k + \mu_k^{(i)}(h)), i = 1, ..., d_k$ , les éléments de  $h\mathcal{A}_k(h)$ , comptés avec multiplicités, et  $m_k(d\lambda; h)$  la mesure réelle:

$$m_k(d\lambda;h) = \frac{1}{k^{n-1}} \sum_{i=1}^{d_k} \delta(\lambda - \frac{\mu_k^{(i)}(h)}{h\lambda_k}).$$

Si  $k(h) \in \mathbb{N}$  est une famille tendant vers  $\infty$  lorsque  $h \to 0$  et telle que  $h\lambda_{k(h)} \leq Ch^{\gamma}$  et  $E_{k(h),i}(h) \leq ch^{\gamma}$ , alors  $m_{k(h)}(d\lambda;h)$  tend faiblement lorsque  $h \to 0$  vers une mesure m donnée par

$$m(f) = \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^n \int_{q^{-1}\{1\}} f \circ r(z) |dz|, \qquad f \in C_0(\mathbb{R}),$$

où  $r = q_4$  est le symbole principal de  $K_4$ .

**Remarque 5.5.1.** Le premier point du théorème indique que le spectre est regroupé dans des « bandes » autour des  $h\lambda_k$ . Étant de largeur  $O(h^{2\gamma})$ , ces

bandes peuvent largement se recouvrir les unes les autres. Pourtant, le dernier point montre que pour des k assez grands, le terme principal de la répartition des valeurs propres dans ces bandes est de largeur  $O(h^{\gamma+1})$ . Les valeurs propres sont donc en première approximation regroupées dans des « bandes principales » qui, elles, sont deux à deux distinctes pour h assez petit.  $\triangle$ 

**Démonstration**. Commençons par rappeler qu'en représentation de Bargmann, les fonctions propres de  $\tilde{H}_2$  associées à  $\lambda_k$  sont les polynômes homogènes de degré k. La multiplicité de  $\lambda_k$  est donc  $d_k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ .

On utilisera cette fois dans la démonstration la notation avec le paramètre  $\varepsilon$ . On rappelle à cet effet que  $\varepsilon^2 = h$  et  $\delta = 2(1 - \gamma)$ .

Soient *B* la boule unité de  $\mathbb{C}^n$ ,  $S = \partial B$ , et  $\mathfrak{O}^0$  l'espace de Hilbert des fonctions  $L^2(S)$  qui se prolongent en fonctions holomorphes dans l'intérieur de *B*. On sait (cf. [11]) qu'il existe un isomorphisme unitaire de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  sur  $\mathfrak{O}^0$ , transformant les opérateurs de  $\mathcal{D}_j$  en opérateurs de Toeplitz sur *S* de degré j/2(au sens où ils envoient l'espace de Sobolev  $H^s \cap \mathfrak{O}^0$  sur  $H^{s-j/2} \cap \mathfrak{O}^0$ ).

En particulier  $H_2$  est de degré 1 et elliptique (son symbole principal est non nul sur S).  $\tilde{H}_2^{-1}$  est donc un opérateur de Toeplitz de degré -1.  $\tilde{K}_j/(\tilde{H}_2)^{\frac{j}{2}}$  est donc borné, ce qui implique que

$$\left\| (\varepsilon^{j-2} \tilde{K}_j)_{\restriction \mathfrak{E}^{\delta}(\varepsilon)} \right\| = O(\varepsilon^{-\delta \frac{j}{2} + j - 2}) = O(\varepsilon^{j\gamma - 2}).$$

Puisque  $\tilde{K}_3 = 0 \ (N_0 \ge 1)$ , on en déduit  $(\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon) - \tilde{H}_2)_{\uparrow \mathfrak{E}^{\delta}(\varepsilon)} = O(\varepsilon^{4\gamma - 2}).$ 

Le théorème 5.4.1 indique que pour tout  $N \ge 0$ , on peut écrire les valeurs propres de  $\frac{1}{h}\hat{H}(h)$  inférieures à  $c\varepsilon^{-\delta}$  sous la forme  $\lambda_k + \mu_k^{(i)}(\varepsilon)$  avec  $\lambda_k \le C\varepsilon^{-\delta}$ , et où les  $\mu_k^{(i)}(\varepsilon)$  sont données modulo  $O(\varepsilon^{(N+3)\gamma-2})$  par les valeurs propres de  $(\tilde{K}^{(N)}(\varepsilon) - \tilde{H}_2)_{\uparrow \mathfrak{C}^{\delta}(\varepsilon)}$ . Notons qu'on a fait ici l'abus de noter  $\mu_k^{(i)}(\varepsilon)$  (au lieu de  $\mu_k^{(i)}(\varepsilon^2)$ ) pour le  $\mu_k^{(i)}(h)$  du théorème, afin d'éviter une surcharge inutile. On choisit alors N > 1 et on pose  $\mathcal{A}_k = \{\mu_k^{(1)}, \ldots, \mu_k^{(d_k)}\}$ : les deux premiers points du théorème sont satisfaits.

On suppose à partir de maintenant que  $\mu_k^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant \mu_k^{(d_k)}$ . Soit

$$M(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \tilde{K}^{(N)}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tilde{H}_2}}\right) - \tilde{H}_2 \right) / (\varepsilon^2 \tilde{H}_2) = \frac{\tilde{K}_4}{(\tilde{H}_2)^2} + \varepsilon^2 \frac{\tilde{K}_6}{(\tilde{H}_2)^3} + \cdots$$

M est un polynôme en  $\varepsilon$  de degré  $\leq N-2$  dont les coefficients sont des opérateurs de Toeplitz de degré zéro. On note  ${\mu'}_k^{(1)}(\varepsilon) \leq \cdots \leq {\mu'}_k^{(d_k)}(\varepsilon)$  les valeurs propres de  $(M(\varepsilon))_{\uparrow \mathfrak{E}_k}$ . Puisque  $(\tilde{H}_2)_{\restriction \mathfrak{E}_k} = \omega_1(k + \frac{n}{2}) = \lambda_k$ , on a

$$\mu_k^{(i)}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \lambda_k {\mu'}_k^{(i)} \left(\varepsilon \sqrt{\lambda_k}\right) + O(\varepsilon^{(N+3)\gamma-2})$$

uniformément pour k et i tels que  $\lambda_k \leq C\varepsilon^{\delta}$  et  $\lambda_k + \mu_k^{(i)}(\varepsilon) \leq c\varepsilon^{\delta}$ .

Puisque M(0) est un opérateur de Toeplitz auto-adjoint d'ordre zéro, commutant avec  $\tilde{H}_2$  et de symbole principal  $r/q^2$ , on déduit de Boutet de Monvel-Guillemin [12, theorem 13.11] que la mesure

$$\frac{1}{k^{n-1}} \sum_{i=1}^{d_k} \delta(\lambda - \mu'_k^{(i)}(0))$$

tend faiblement lorsque  $k \to \infty$  vers la mesure m du théorème. On vérifie la constante de normalisation en testant la formule sur une fonction f valant 1 sur un compact contenant à la fois les  $\mu'_k^{(i)}(0)$  et l'image par r du compact  $q^{-1}\{1\}$ .

Notons  $\varepsilon_k = \varepsilon \sqrt{\lambda_k}$ ; si k = k(h) vérifie les hypothèses du théorème,  $\varepsilon_k = O(\varepsilon^{\gamma})$ , et donc tend vers zéro si  $\gamma > 0$ . Lorsque  $\varepsilon \to 0$ , les  ${\mu'}_k^{(i)}(\varepsilon)$  tendent vers  ${\mu'}_k^{(1)}(0)$  uniformément par rapport à k et i, en vertu de la théorie des perturbations d'opérateurs auto-adjoints bornés. Or, pour toute fonction  $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ , il existe  $C_f > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k^{n-1}} \sum_{i=1}^{d_k} \left( f(\frac{\mu_k^{(i)}(\varepsilon)}{\varepsilon^2 \lambda_k}) - f(\mu'_k^{(i)}(0)) \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{k^{n-1}} \sum_{i=1}^{d_k} \left( f(\frac{\mu_k^{(i)}(\varepsilon)}{\varepsilon^2 \lambda_k}) - f(\mu'_k^{(i)}(\varepsilon_k)) + f(\mu'_k^{(i)}(\varepsilon_k)) - f(\mu'_k^{(i)}(0)) \right) \right| \leqslant \\ &\leqslant C_f \frac{d_k}{k^{n-1}} \left( O(\frac{\varepsilon^{(N+3)\gamma-2}}{\varepsilon^2 \lambda_k}) + \sup_{k,i} |\mu'_k^{(i)}(\varepsilon_k) - \mu'_k^{(i)}(0)| \right). \end{aligned}$$

Donc pour  $N > \frac{4}{\gamma} - 3$ , le membre de droite tend vers zéro lorsque k = k(h) vérifie les hypothèses du théorème, ce qui termine la preuve.

Forme normale de Birkhoff et états semi-excités

# Table des figures

2.1	$\Delta(z) = U(T(z))z.\dots 46$
3.1	An asymptotic affine lattice
3.2	the basis $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$
3.3	parallel transport on $\Sigma(h)$
3.4	parallel translation
3.5	Spectrum of the Champagne bottle
3.6	Unwinding of the spectrum
4.1	The linearized flow
4.2	Topology of $\Lambda_0$
4.3	The fibration $F$ on $\overline{\Omega \setminus U}$
4.4	Regularization of $\kappa$
4.5	Unwinding the joint spectrum
4.6	The upper half of the polytope
4.7	Translation of the polytope
4.8	The function $\Psi'_0(x)$
4.9	Level spacings (numerics 1)
4.10	Level spacings (numerics 2) $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 141$
4.11	The smallest spacing $\ldots \ldots 142$
4.12	The counting function $N_h(K)$ for the Champagne bottle 143

### Bibliographie

- V.I. Arnold. A theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics. Siberian Math. J., 4, 1963. English transl.
- [2] V. Bargmann. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I. Comm. Pure Appl. Math., 19:187–214, 1961.
- [3] L.M. Bates. Examples for obstructions to action-angle coordinates. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 110A:27–30, 1988.
- [4] L.M. Bates. Monodromy in the Champagne bottle. Z. Angew. Math. Phys., 6:837–847, 1991.
- [5] S. Bates and A. Weinstein. Lectures on the Geometry of Quantization, volume 8 of Berkeley Mathematics Lecture Notes. AMS, 1997.
- [6] G.D. Birkhoff. Dynamical systems. AMS, 1966.
- [7] P.M. Bleher, D.V. Kosygin, and Y.G. Sinai. Distribution of energy levels of quantum free particle on the Liouville surface and trace formulae. *Communications in Mathematical Physics*, 170(2):375–403, 1995.
- [8] S. Bochner. Theta relations with spherical harmonics. Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., 57:804–808, 1951.
- [9] N. Bourbaki. Groupes et algèbres de Lie. Éléments de mathématique. Hermann, Paris, 1960–1975. Chap. 6.
- [10] A. Boutet de Monvel, L. Boutet de Monvel, and G. Lebeau. Sur les valeurs propres d'un oscillateur harmonique perturbé. J. Analyse Math., 58:39–60, 1992.
- [11] L. Boutet de Monvel. Opérateurs à coefficients polynômiaux, espace de Bargman, et opérateurs de Toeplitz. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1980-1981. exposé IIbis.
- [12] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. The spectral theory of Toeplitz operators. Number 99 in Annals of Mathematics Studies. Princeton university press, 1981.
- [13] P.J. Braam and J.J. Duistermaat. Normal forms of real symmetric systems with multiplicity. *Indag. Math.*, 4(4):407–421, 1993.
- [14] R. Brummelhuis, T. Paul, and A. Uribe. Spectral estimates around a critical level. Duke Mathematical Journal, 78(3):477–530, 1995.
- [15] C. Carathéodory. Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Teubner, Leipzig, 1935.
- [16] J.W.S. Cassels and A. Fröhlich. Algebraic Number Theory. Academic Press, 1967.

- [17] A.-M. Charbonnel. Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. Asymptotic Analysis, 1:227-261, 1988.
- [18] A.-M. Charbonnel and G. Popov. A semi-classical trace formula for several commuting operators. Preprint Univ. Nantes, 1997.
- [19] M.S. Child. Quantum states in a Champagne bottle. J.Phys.A., 31:657– 670, 1998.
- [20] M.S. Child, T. Weston, and J. Tennyson. Quantum monodromy in the spectrum of  $H_2O$  and other systems. to appear.
- [21] Y. Colin de Verdière. Quasi-modes sur les variétés riemanniennes. Inventiones Mathematicæ, 43:15–52, 1977.
- [22] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent I. Duke mathematical journal, 46(1):169–182, 1979.
- [23] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent II. Mathematische Zeitschrift, 171:51–73, 1980.
- [24] Y. Colin de Verdière. Cours de DEA. Université Grenoble I, 1992.
- [25] Y. Colin de Verdière. La méthode de moyennisation en mécanique semiclassique. In *Journées EDP*, Saint Jean de Monts, 1996. CNRS.
- [26] Y. Colin de Verdière, M. Lombardi, and J. Pollet. La formule de Laudau-Zener microlocale. Preprint Institut Fourier 412, http: //www-fourier.ujf-grenoble.fr/PREP/prep\_if.html.
- [27] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semiclassique I: Concentration microlocale. Communications in partial differential equations, 19(9–10):1535–1563, 1994.
- [28] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semiclassique II: Conditions de Bohr-Sommerfeld. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique, 61(3):347–367, 1994.
- [29] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Conditions de Bohr-Sommerfeld singulières. Preprint Institut Fourier 432, http://www-fourier.ujfgrenoble.fr/PREP/prep\_if.html, 1998.
- [30] Y. Colin de Verdière and J. Vey. Le lemme de Morse isochore. *Topology*, 18:283–293, 1979.
- [31] S. Colombo. Les transformations de Mellin et Hankel. CNRS, 1959.
- [32] R. Cushman and J.J. Duistermaat. The quantum spherical pendulum. Bulletin of the AMS (new series), 19:475–479, 1988.
- [33] R. Cushman and J.J. Duistermaat. Non-hamiltonian monodromy. preprint University of Utrecht, 1997.
- [34] R. Dautray and J.-L. Lions. Transformations, Sobolev, Opérateurs, volume 3 of Analyse mathématique et calcul numérique. Masson, 1987.
- [35] J.P. Dufour and P. Molino. Compactification d'actions de ℝ<sup>n</sup> et variables actions-angles avec singularités. In Dazord and Weinstein, editors, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley, volume 20, pages 151–167. MSRI, 1989.
- [36] J.J. Duistermaat. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities. Comm. Pure Appl. Math., 27:207–281, 1974.

- [37] J.J. Duistermaat. On global action-angle variables. Comm. Pure Appl. Math., 33:687–706, 1980.
- [38] J.J Duistermaat. Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of hamiltonian systems. In L. Salvadori, editor, *Bifurcation theory and applications*, volume 1057 of *Lecture Notes in Math.*, pages 57–105. Springer, 1984.
- [39] J.J. Duistermaat and G.J. Heckman. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space. *Inventiones mathematicæ*, 69:259–268, 1982.
- [40] J.J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators II. Acta mathematica, 128:183–269, 1972.
- [41] B. Eckhardt. Birkhoff-Gustavson normal form in classical and quantum mechanics. J. Phys. A, 19:2961–2972, 1986.
- [42] L.H. Eliasson. Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals. PhD thesis, University of Stockholm, 1984.
- [43] L.H. Eliasson. Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case. Comment. Math. Helvetici, 65:4–35, 1990.
- [44] M. Flato, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Crochet de Moyal-Vey et quantification. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 283:19–24, 1976.
- [45] A.T. Fomenko. Topological classification of integrable systems, volume 6 of Advances in soviet mathematics. AMS, 1991.
- [46] I.M. Gelfand, M.I. Graev, and N.Ja. Vilenkin. Les Distributions, volume 5. Dunod, 1962.
- [47] I.M. Gelfand and Z.Ia. Schapiro. Homogeneous distributions and applications. Ouspehi Mat. Naouk, 10(3):3–70, 1955. in Russian.
- [48] V. Guillemin and D. Schaeffer. On a certain class of Fuchsian partial differential equations. Duke Mathematical Journal, 44(1):157–199, 1977.
- [49] V. Guillemin and A. Uribe. Monodromy in the quantum spherical pendulum. Communications in Mathematical Physics, 122:563–574, 1989.
- [50] D. Gurarie. Quantized Neumann problem, separable potentials on  $S^n$  and the Lame equation. J. Math. Physics, 36(10):5355–5391, 1995.
- [51] B. Helffer and D. Robert. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. Annales de l'Institut Fourier, 31(3):169– 223, 1981.
- [52] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit. I. Communications in Partial Differential Equations, 9:337–408, 1984.
- [53] B. Helffer and J. Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l'équation de Harper. I. Mém. Soc. Math. France (N.S.), 34, 1988.
- [54] B. Helffer and J. Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l'équation de Harper. III. Mém. Soc. Math. France (N.S.), 39, 1989.
- [55] B. Helffer and J. Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l'équation de Harper. II. Mém. Soc. Math. France (N.S.), 40, 1990.
- [56] F. Hirzebruch. Topological Methods in Algebraic Geometry, volume 131 of Grundlehren der math. W. Springer, New York, 1966.

- [57] L. Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. Acta mathematica, 121:193–218, 1968.
- [58] L. Hörmander. Fourier integral operators I. Acta mathematica, 127:79–183, 1971.
- [59] L. Hörmander. The analysis of Linear partial differential operators, volume I–IV. Springer, 1983–90.
- [60] C. Huygens. Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum. Paris, 1673.
- [61] K. Jacobi. Lettre adressée à M. le président de l'Académie des sciences. J. Math. Pures Appl., 5:350–354, 1840. avec note de l'éditeur.
- [62] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132 of *G.M.W.* Springer, second edition, 1980.
- [63] J.B. Keller. Semiclassical mechanics. SIAM Rev., 27(4):485–504, 1985.
- [64] M. Kummer. Anharmonic oscillators in classical and quantum mechanics with applications to the perturbed Kepler problem. In *Conservative systems* and quantum chaos, volume 8 of *Fields Institute Communications*, pages 35–63, 1996.
- [65] L.M. Lerman and Ya.L. Umanskiy. Four-dimensional integrable hamiltonian systems with simple singular points (topological aspects), volume 176 of Translations of Mathematical Monographs. AMS, 1998.
- [66] J. Liouville. Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique. J. Math. Pures Appl., 20:137–138, 1855. Présentée en 1853.
- [67] C. März. Spectral asymptotics for Hill's equation near the potential maximum. Asymptotic Analysis, 5:221–267, 1992.
- [68] V.P. Maslov. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Dunod, Paris, 1972.
- [69] H. Mineur. Réduction des systèmes mécaniques à n degrés de liberté admettant n intégrales premières uniformes en involution aux systèmes à variables séparées. J. Math. Pures Appl., 15:385–389, 1936.
- [70] J. Moser. Integrable hamiltonian systems and spectral theory. Lezioni Fermiane. Scu.Norm.Sup., 1981.
- [71] Zung Nguyên Tiên. A topological classification of integrable hamiltonian systems. In R. Brouzet, editor, Séminaire Gaston Darboux de géometrie et topologie différentielle, pages 43–54. Université Montpellier II, 1994-1995.
- [72] Zung Nguyên Tiên. A note on focus-focus singularities. Diff. Geom. Appl., 7(2):123–130, 1997.
- [73] F. Pham. Resurgence, quantized canonical transformations, and multiinstantons expansions. In M. Kashiwara and T. Kawai, editors, *Algebraic Analysis*, volume II, pages 699–726. 1989.
- [74] G. Pick. Geometrisches zur Zahlentheorie. Sitzenber. Lotos (Prague), 19:311–319, 1899.
- [75] D. Robert. Autour de l'approximation semi-classique, volume 68 of Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1987.

- [76] H. Rüssmann. Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtlösung. Math. Ann., 154:285– 300, 1964.
- [77] J Sjöstrand. Density of state oscillations for magnetic schödinger operator. In Bennewitz, editor, *Differential Equations and Mathematical Physics*, pages 295–345. Univ. of Alabama at Birmingham, 1990.
- [78] J. Sjöstrand. Microlocal analysis for the periodic magnetic schrödinger equation and related questions. In *Microlocal analysis and applications* (*CIME lectures*), volume 1495 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 237– 332. Springer, 1991.
- [79] J. Sjöstrand. Semi-excited states in nondegenerate potential wells. Asymptotic Analysis, 6:29–43, 1992.
- [80] J. Vey. Sur certains systèmes dynamiques séparables. American journal of mathematics, 100:591–614, 1978.
- [81] S. Vũ Ngọc. Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment. preprint Institut Fourier 377, 1997.
- [82] S. Vũ Ngọc. Quantum monodromy in integrable systems. Comm. Math. Phys., 1998. to appear.
- [83] S. Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. preprint Institut Fourier 433, 1998.
- [84] S. Vũ Ngọc. Conditions de Bohr-Sommerfeld pour les singularités focusfocus et monodomie quantique. In *Journées EDP*, Saint Jean de Monts, 1998. CNRS.
- [85] F.W. Warner. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Springer, 1983.
- [86] A. Weinstein. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. Advances in Mathematics, 6:329–346, 1971.
- [87] A. Weinstein. Asymptotics of eigenvalue clusters for the laplacian plus a potential. Duke Math. J., 44(4):883–892, 1977.
- [88] A. Weinstein. Connections of Berry and Hannay type for moving lagrangean submanifolds. Advances in Mathematics, 82:135–159, 1990.
- [89] J. Williamson. On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems. American journal of mathematics, 58(1):141– 163, 1936.
- [90] S. Zelditch. Wave invariants for non-degenerate closed geodesics. preprint 1996.
- [91] S. Zelditch. Wave invariants at elliptic closed geodesics. preprint, 1995.
- [92] Maorong Zou. Monodromy in two degrees of freedom integrable systems. Journal of Geometry and Physics, 10:37–45, 1992.

Institut Fourier, UMR 5582 (UJF-CNRS), B.P. 74, F-38402 St Martin d'Hères Cedex. e-mail: San.Vu-Ngoc@ujf-grenoble.fr