

# Mémoire de DEA

Indices de difféomorphismes de contact :

Exemple du tore en dimension 3.

Vũ Ngọc San

décembre 1994

DEA dirigé durant l'automne 1994  
à l'Université de Californie à Berkeley

par  
ALAN WEINSTEIN

# Contents

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Structures de contact</b>	<b>4</b>
1.1	Généralités . . . . .	4
1.2	Théorème de Gray . . . . .	6
1.3	Isotopies de formes de contact sur $\mathbb{T}^3$ . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Construction de difféomorphismes de contact</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Point de vue symplectique</b>	<b>16</b>
3.1	Symplectisation d'une structure de contact . . . . .	16
3.2	Phases génératrices de lagrangiennes . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Opérateurs intégraux de Fourier</b>	<b>23</b>
4.1	symboles . . . . .	23
4.2	intégrales de Fourier . . . . .	24
4.3	symbole principal d'une intégrale de Fourier . . . . .	24
4.4	opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	26
4.5	transformations canoniques . . . . .	27
4.6	composition propre et continuité . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Opérateurs avec indices</b>	<b>30</b>
5.1	opérateurs de Fredholm . . . . .	30
5.2	indices et homotopie . . . . .	32
5.3	indices des difféomorphismes de contact de $\mathbb{T}^3$ . . . . .	34

## 0 Introduction

Je me propose de montrer dans ce mémoire comment on associe à tout difféomorphisme de contact du fibré des sphères cotangentes d'une variété différentielle un *indice*, par le biais des opérateurs intégraux de Fourier vus comme opérateurs de Fredholm.

Afin d'appliquer concrètement ces concepts, je présente tout au long de l'étude l'exemple du tore  $\mathbb{T}^2$ , en commençant par construire explicitement des difféomorphismes de contact sur  $\mathbb{T}^3$  selon une idée due à Emmanuel Giroux. Je termine par montrer, modulo un résultat simplificateur, que le cas de tore ne peut mener malheureusement qu'à des opérateurs d'indice nul.

Je tiens avant tout à remercier Alan Weinstein et son élève Vinay Kathotia pour leur accueil à Berkeley.

# 1 Structures de contact

## 1.1 Généralités

Soit  $M$  une variété différentielle  $C^\infty$ .

**Définition 1.1** On appelle **élément de contact** sur  $M$  la donnée d'un point  $x$  appelé *point de contact* et d'un hyperplan tangent à  $M$  en ce point.

Autrement dit, on spécifie une forme linéaire sur  $T_x M$ , à multiplication par une constante non nulle près. Il est alors naturel de définir un élément de contact **orienté**, qui est la donnée d'une forme linéaire sur  $T_x M$ , à multiplication par une constante *positive* près.

Une variété de contact sera alors une variété munie d'une manière générique d'un hyperplan tangent en chaque point :

**Définition 1.2** On appelle **structure de contact** sur  $M$  la donnée d'un champ  $C^\infty$  d'hyperplans tangents  $\{\xi_x\}$  tel que pour toute 1-forme  $\varphi$  le définissant localement, la restriction de  $d\varphi(x)$  à  $\xi_x$  est non-dégénérée pour tout  $x$ .

On appelle une telle forme  $\varphi$  une **forme de contact**, et  $\xi$  le champ d'**hyperplans de contact**.  $M$  est bien-sûr nécessairement de dimension impaire, puisqu'une 2-forme ne peut être non-dégénérée qu'en dimension paire. On pose  $\dim M = 2n+1$ . En tous points  $x$ ,  $T_x M$  est la somme directe  $\ker \varphi_x \oplus \ker d\varphi_x$ . Si on note  $e$  un vecteur générateur de  $\ker d\varphi_x$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $\xi_x = \ker \varphi_x$ , alors  $\varphi_x \wedge (d\varphi_x)^n(e, \mathcal{B}) = \varphi_x(e)(d\varphi_x)^n(\mathcal{B})$ . Comme  $\varphi_x(e) \neq 0$ , on a

**Proposition 1.1** Dans la définition (1.2), il est équivalent de demander que  $\varphi \wedge (d\varphi)^n$  soit (localement) une forme volume.  $\diamond$

**Définition 1.3** S'il existe une 1-forme globale définissant  $\xi_x$ , on dit que la structure de contact est **exacte**.

On n'est pas toujours assuré de l'existence d'une forme de contact globale. Mais s'il en existe, d'après la proposition (1.1),  $M$  est alors nécessairement orientable.

**Définition 1.4** On dit qu'une structure de contact est **coorientable** si le fibré en ligne des quotients des espaces tangents par les hyperplans de contact est orientable.

Deux formes de contact diffèrent d'une constante multiplicative non nulle, la coorientabilité permet donc de déterminer lesquelles pointent vers le côté positif. Une structure de contact exacte est bien sûr automatiquement coorientable. Remarquons qu'une variété de contact de dimension  $2n+1$  avec  $n$  pair, qui est en outre orientable est toujours coorientable, puisque pour tout réel  $\tau$ ,  $\tau\varphi \wedge (d(\tau\varphi))^n = \tau^{n+1}\varphi \wedge (d\varphi)^n$ , donc si  $\omega$  est une forme volume sur  $M$ , on pourra

dire qu'une forme de contact  $\varphi$  est positive si  $\varphi \wedge (d\varphi)^n$  est du même signe que  $\omega$  ( $-\varphi$  sera alors bien négative...). Réciproquement, si  $M$  possède une structure de contact coorientable, alors  $M$  est orientable; en effet si  $\varphi$  est une 1-forme définissant la coorientation, c'est automatiquement une forme de contact globale, et  $\varphi \wedge (d\varphi)^n$  définit une orientation sur  $M$ .

On a prouvé en outre la proposition suivante :

**Proposition 1.2** *Une structure de contact est exacte si et seulement si elle est coorientable.*  $\diamond$

À partir du paragraphe suivant (1.2), on supposera toujours implicitement que les structures de contact considérées sont exactes.

On va voir maintenant qu'on peut, à partir de toute variété différentielle  $M$  de dimension  $n$ , construire une variété de contact  $S$  de dimension  $2n - 1$ . On pourra même demander à  $S$  d'être coorientable.

**Définition 1.5** *On appelle **variété des éléments de contact** d'une variété différentielle  $M$  l'ensemble des éléments de contact de  $M$ , autrement dit le projectivisé du fibré cotangent  $T^*M$ , noté  $PT^*M$ .*

*On appelle **variété des éléments de contact orientés** de  $M$  l'ensemble des éléments de contact orientés de  $M$ , autrement dit le fibré des sphères cotangentes noté  $S^*M$ .*

On munit ces deux variétés du champ d'hyperplans  $\xi$  qui au point  $(x, p) \in S = PT^*M$  (ou  $S^*M$ ) associe  $\ker \pi^*p$  (où  $\pi$  est la projection  $S \rightarrow M$ ), c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de  $T_{(x,p)}S$  qui se projettent dans l'élément de contact  $(x, p)$ .

**Théorème 1.3**  *$S^*M$  et  $PT^*M$  munis de ce champ d'hyperplans sont des variétés de contact de dimension  $2n - 1$ .  
En outre  $S^*M$  est coorientable.*

**Démonstration:** La dimension de  $PT^*M$  (resp.  $S^*M$ ) est bien  $2n - 1$  comme quotient de  $T^*M$  par l'action de  $\mathbb{R}^*$  (resp.  $\mathbb{R}_+^*$ ). Localement, on peut trouver une inclusion  $S = PT^*M$  (ou  $S^*M$ )  $\hookrightarrow T^*M$  et alors  $\varphi(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^*p$  est une 1-forme définissant  $\xi$ . Son extension naturelle à  $T^*M$  n'est rien d'autre que la 1-forme symplectique de Liouville, ce qui assure que  $\varphi$  est bien une forme de contact (voir proposition 3.1).

$PT^*M$  n'est pas toujours coorientable (par exemple, avec  $M = \mathbb{R}^3$ , on a  $PT^*M = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^2$  qui n'est pas orientable, et donc *a fortiori* pas coorientable). Par contre,  $S^*M$  est un recouvrement à deux feuilletés de  $PT^*M$  par l'équivalence antipodique, et donc automatiquement coorientable. (On peut aussi proclamer

directement que  $S^*M$  est exacte puisque l'inclusion naturelle  $S^*M \ni (x, p) \mapsto (x, 1.p) \in T^*M$  est globale et donc  $\varphi$  est globalement définie.)  $\diamond$

Tout ceci est bien-sûr très tautologique, et à relier avec la section 3.1.

## 1.2 Théorème de Gray

Le théorème suivant est en quelque sorte l'analogue du théorème de Darboux en géométrie de contact.

**Théorème 1.4 (Gray)** *Soit  $M$  une variété de contact compacte. Soit  $\varphi_t$  une famille à un paramètre de formes de contact sur  $M$ , et posons  $\xi_t = \ker(\varphi_t)$ . Alors il existe une famille à un paramètre de difféomorphismes  $f_t$  sur  $M$  telle que*

$$f_{t*}\xi_t = \xi_0$$

(c'est-à-dire  $\exists u_t \neq 0$ , tq.  $f_t^*\varphi_t = u_t\varphi_0$  et  $u_0 = 1$ )

On exprime ainsi la rigidité des structures de contact.

**Démonstration:** La preuve que je propose utilise une méthode maintenant standard due à Moser (voir [Moser]) (voir aussi [Bates/Weinstein] pour une preuve similaire d'une version "globale" du théorème de Darboux).

On cherche donc à résoudre le système suivant:

$$(*) \begin{cases} f_0 = id \\ u_0 = 1 \\ \frac{d}{dt}(f_t^*\varphi_t - u_t\varphi_0) = 0 \end{cases}$$

On utilise la formule classique:

**Lemme 1.5**

$$\frac{d}{dt}(f_t^*\varphi_t) = f_t^*\left(\frac{d}{dt}(\varphi_t) + \mathcal{L}_{X_t}\varphi_t\right)$$

pour toutes familles à un paramètre d'applications  $C^\infty$   $f_t$  et de  $k$ -formes  $\varphi_t$ , où  $X_t$  est le champ de vecteurs associé à  $f_t$ .

**Démonstration:** Considérons  $f^*$  comme une fonction  $\mathbb{R} \times \Omega^k(M) \times (TM)^k \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $(t, \varphi, v)$  associe  $(f_t^*\varphi).v$ . Alors  $(f_t^*\varphi_t).v = f^*(t, \varphi(t, x), v)$ , soit  $\frac{d}{dt}(f_t^*\varphi_t).v = \frac{\partial}{\partial t}(f^*(t, \varphi(t), v)) = \frac{\partial f^*}{\partial t}(t, \varphi(t, x), v) + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi}(t, \varphi(t, x), v) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

On remarque que  $f^*$  est linéaire en  $\varphi$  donc  $\frac{\partial f^*}{\partial \varphi}(\cdot) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f^*(t, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, v) = f_t^*\left(\frac{d}{dt}(\varphi_t)\right).v$

D'autre part  $\frac{\partial f^*}{\partial t}(t, \varphi(t, x), v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (f^*(t+h, \varphi(t, x), v) - f^*(t, \varphi(t, x), v))/h \stackrel{\text{def}}{=} f_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\varphi_t).v$   $\diamond$

L'idée est alors de chercher explicitement  $X_t$ , et non  $f_t$ . Grâce à la compacité de  $M$ ,  $f_t$  est alors entièrement déterminée. Posons  $\omega_t = d\varphi_t$ . Comme  $\dim(M)$  est impaire,  $\omega_t$  est dégénérée. Soit  $z_t \in \ker \omega_t$ ,  $z_t \neq 0$ . Alors  $z_t \notin \xi_t$ , car  $\omega_t|_{\xi_t}$  est non dégénérée. On peut donc supposer que  $\varphi_t(z_t) = 1$  (on a ainsi décrit ce qu'on appelle le champ de vecteurs de Reeb). Comme  $\forall t, TM = \langle z_t \rangle \oplus \xi_t$ , on cherche  $X_t$  sous la forme  $Y_t + \lambda_t z_t$ , où  $Y_t \in \xi_t$ , et  $\lambda_t$  est une fonction réelle. (\*) s'écrit  $f_t^*(\frac{d}{dt}(\varphi_t) + i_{X_t}d\varphi_t + d(i_{X_t}\varphi_t)) = \frac{d}{dt}(t)\varphi_0$ . D'autre part une condition nécessaire est que  $\varphi_0 = (1/u_t)f_t^*\varphi_t$ , ce qui mène à l'équation

$$f_t^*(\frac{d}{dt}(\varphi_t) + i_{Y_t}d\varphi_t + d\lambda_t) = \frac{d}{dt}(u_t)(1/u_t)f_t^*\varphi_t$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t) + i_{Y_t}\omega_t + d\lambda_t = (1/u_t)\frac{d}{dt}(u_t) \circ f_t^{-1}\varphi_t \quad (1)$$

On voit alors que le plus simple est de choisir  $\lambda_t \equiv 0$ . Comme  $\omega_t|_{\xi_t}$  est non dégénérée,  $Y_t$  (et donc  $X_t$ ) est entièrement déterminé par (1)| $\xi_t$ . Donc  $f_t$  aussi, avec  $f_0 = id$ . Maintenant (1)| $\langle z_t \rangle$  avec  $u_0 = 1$  détermine  $u_t$  par l'équation différentielle triviale

$$\frac{1}{u_t}\frac{d}{dt}(u_t) = A_t$$

où on a posé  $A_t = \frac{d}{dt}(\varphi_t)_{f_t}(z_t)$ . On est en outre assuré que  $u_t$  ne s'annule jamais.

La preuve est achevée, puisqu'on a résolu l'équation

$$\forall v, \frac{d}{dt}(f_t^*\varphi_t).v = \frac{1}{u_t}\frac{d}{dt}(u_t)f_t^*\varphi_t.v$$

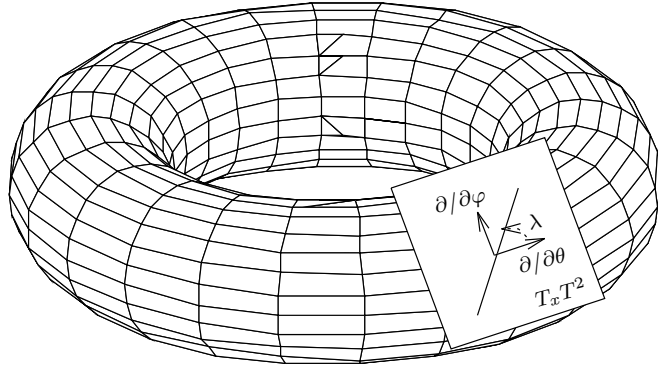
dont l'unique solution est  $f_t^*\varphi_t.v = u_t\varphi_0.v$ . ◇

### 1.3 Isotopies de formes de contact sur $\mathbb{T}^3$

Dans l'idée d'utiliser le théorème de Gray, on va s'intéresser ici à la construction de familles à un paramètre de formes de contact sur  $\mathbb{T}^3$  particulièrement simples: des segments.



On note  $S = S^*(\mathbb{T}^2)$  la variété des éléments de contact orientés de  $\mathbb{T}^2$ , c'est-à-dire le fibré des sphères de  $T^*\mathbb{T}^2$ .  $S$  est alors un fibré trivial qu'on identifie à  $\mathbb{T}^3 = \{(\theta, \varphi, \lambda)\}$ ,  $\lambda$  désignant suivant le contexte une 1-forme ou bien l'angle entre  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  et elle, vue comme élément de  $T\mathbb{T}^2$  au moyen de la structure riemannienne standard du tore. (voir figure).



Soit  $\alpha$  la forme de contact canonique sur  $S$ : elle est définie à scalaire près par

$$\alpha_s(\xi) = 0 \iff \lambda(\pi_*\xi) = 0$$

où  $s = (\theta, \varphi, \lambda) \in S$  et  $\pi$  est la projection du fibré  $S \rightarrow \mathbb{T}^2$ . On peut choisir  $\alpha_s = \pi^*\lambda$ , ce qui mène à son identification à la matrice-ligne

$$(\cos(\lambda), \sin(\lambda), 0) = \cos(\lambda)d\theta + \sin(\lambda)d\varphi$$

Si  $\phi = (a, b, c)$  est une 1-forme et  $\omega = \begin{pmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{pmatrix}$  est une 2-forme, on

identifiera  $\phi \wedge \omega = \omega \wedge \phi$  avec son action sur la base canonique (autrement dit le coefficient de  $d\theta \wedge d\varphi \wedge d\lambda$ ). On a alors

$$\phi \wedge \omega = \phi \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de savoir si les formes de contact  $\alpha$  et  $f^*\alpha$  sont isotopes (voir section 2). Pour commencer, cherchons dans quels cas l'isotopie peut être réalisée par un segment.

**Problème 1.1**  $GL(3, \mathbb{Z})$  est le groupe des difféomorphismes linéaires de  $S$ . Y a-t'il des  $f \in GL(3, \mathbb{Z})$  tels que le segment  $[\alpha, f^*\alpha] \subset \Omega^1(S)$  soit constitué entièrement de formes de contact, et si oui, quels sont-ils ?

Posons donc  $\alpha_t = (1-t)\alpha + t f^*\alpha$ .  $\alpha_t$  est une forme de contact  $\iff \alpha_t \wedge d\alpha_t \neq 0$ . Soit  $A_t = \alpha_t \wedge d\alpha_t$ . On a

$$\begin{aligned} A_t &= [(1-t)\alpha + t f^*\alpha] \wedge [(1-t)d\alpha + t f^*d\alpha] \\ &= (1-t)^2 \alpha \wedge d\alpha + (1-t)t[\alpha \wedge f^*d\alpha + (f^*\alpha) \wedge d\alpha] + t^2 f^*(\alpha \wedge d\alpha) \\ &= t^2[\alpha \wedge d\alpha - \alpha \wedge f^*d\alpha - (f^*\alpha) \wedge d\alpha + f^*(\alpha \wedge d\alpha)] + \\ &\quad t[-2\alpha \wedge d\alpha + \alpha \wedge f^*d\alpha + (f^*\alpha) \wedge d\alpha] + \alpha \wedge d\alpha \end{aligned}$$



Mais  $d\alpha = -d\lambda \wedge (\sin(\lambda)d\theta - \cos(\lambda)d\varphi)$ , d'où  $\alpha \wedge d\alpha = (-\sin^2(\lambda) - \cos^2(\lambda))d\theta \wedge d\varphi \wedge d\lambda = -1$ . Donc  $f^*(\alpha \wedge d\alpha) = (-1)(\det f)$ .

Posons  $B = \frac{1}{2}(\alpha \wedge f^*d\alpha + (f^*\alpha) \wedge d\alpha)$ ; c'est une fonction  $S \rightarrow \mathbb{R}$ . On a

$$A_t = t^2(-1 - \det f - 2B) + 2t(1 + B) - 1$$

Notons  $\Delta = (1 + b)^2 - (1 + \det f + 2B) = B^2 - \det f$  le discriminant.

1. Supposons  $f \in GL^-(3, \mathbb{Z})$ . Alors  $A_t = t^2(-2B) + 2t(1 + B) - 1$ ,  $\Delta = B^2 + 1$ .  
 $A_t$  a donc deux racines distinctes  $\frac{1+B \pm \sqrt{B^2+1}}{2B}$ . Il est facile de voir que la fonction  $g(y) = (1 + y - \sqrt{y^2 + 1})/2y$  ( $g(0) = 1/2$ ) est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et a pour image  $]0, 1[$ . Autrement dit  $A_t$  a toujours une racine dans  $]0, 1[$ , et donc il existe un  $t \in ]0, 1[$  tel que  $\alpha_t$  ne soit pas une forme de contact.
2. Supposons  $f \in SL(3, \mathbb{Z})$ . Alors  $A_t = t^2(-2 - 2B) + 2t(1 + B) - 1$ ,  $\Delta = B^2 - 1$ . Supposons  $|B| \geq 1$ . Alors les racines sont  $\frac{1+B \pm \sqrt{B^2-1}}{2(B+1)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left| \frac{B-1}{B+1} \right|}$ .  
Si  $B \geq 1$ ,  $0 \leq B-1 < B+1$  donc  $\left| \frac{B-1}{B+1} \right| < 1$  et les racines sont dans  $]0, 1[$ .  
Si maintenant  $B \leq -1$ ,  $0 \leq -(B+1) < -B+1$  donc  $\left| \frac{B-1}{B+1} \right| > 1$  et il n'y a pas de racine dans  $[0, 1]$ .  
Dans ce cas les  $\alpha_t$  sont toutes des formes de contact si et seulement si  $B < 1$ .

Le problème dans le cas où  $\det f = 1$  est donc réduit à trouver le maximum de la fonction  $B$  définie sur la variété compacte  $S$ .

On a vu que  $d\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\lambda) \\ 0 & 0 & -\cos(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$ , et on remarque que pour toute 1-forme  $\beta$ ,  $\beta \wedge d\alpha = -\beta \cdot {}^t\alpha$ , et donc  $(f^*\alpha) \wedge d\alpha = -(f^*\alpha) \cdot {}^t\alpha = -\alpha_f \cdot f \cdot {}^t\alpha$ . De même on peut écrire  $\alpha \wedge f^*d\alpha = f^*(f^{*-1}\alpha \wedge d\alpha) = f^*(-\alpha_{f^{-1}} \cdot f^{-1} \cdot {}^t\alpha) = (-\alpha_{f^{-1}} \cdot f^{-1} \cdot {}^t\alpha)_f \cdot \det f = -\alpha \cdot f^{-1} \cdot {}^t\alpha_f = -\alpha_f \cdot {}^t f^{-1} \cdot {}^t\alpha$  d'où finalement

$$B = -\frac{1}{2}(\alpha_f \cdot r \cdot {}^t\alpha)$$

où  $r$  est la matrice  $f + {}^t f^{-1}$ .

Je présente ici le résultat de l'étude de  $B$ , qui s'écrit

$$B(s) = -\frac{1}{2}(\cos_f \cos_\lambda r_{11} + \cos_f \sin_\lambda r_{12} + \sin_f \cos_\lambda r_{21} + \sin_f \sin_\lambda r_{22})$$

On a noté  $\cos_f$  pour  $\cos(f_\lambda(s))$  avec  $f = \begin{pmatrix} f_\theta \\ f_\varphi \\ f_\lambda \end{pmatrix}$ ,  $\cos_\lambda$  pour  $\cos(\lambda)$  et idem pour  $\sin$ .

Enfin on utilise le fait que  $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , les bornes de la fonction sur  $\mathbb{T}$   $y \mapsto A \cos(ay + b) + B \sin(ay + b)$  sont  $\pm \sqrt{A^2 + B^2}$ , ainsi que le fait que  ${}^t f^{-1}$  se calcule facilement comme comatrice de  $f$ ...

1. Supposons que  $f_{31} = f_{32} = 0$  (c'est-à-dire que  $f$  laisse stable le plan  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ ). On a alors deux cas:

- (a) Si  $f_{33} = 1$  alors  $B = -\frac{1}{2}(f_{11} + f_{22})$
- (b) Si  $f_{33} = -1$  alors  $B = \frac{1}{2}(f_{11} - f_{22})$

2. Si  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$  n'est pas fixé par  $f$ , alors

$$B_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{21}^2 + r_{22}^2}$$

et dans ce cas  $B_{\max} < 1 \iff (r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{21}^2 + r_{22}^2) \leq 3$ .

Mais ce cas ne peut pas se présenter, comme le montre le lemme suivant:

**Lemme 1.6** *Soit  $f \in SL(3, \mathbb{R})$ . Soit  $r = f + {}^t f^{-1}$ . Alors*

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{21}^2 + r_{22}^2 \geq 4$$

La démonstration est indiquée plus loin.

On a donc en résumé:

**Proposition 1.7** *Le segment  $[\alpha, f^* \alpha]$  est constitué entièrement de formes de contact si et seulement si  $f \in SL(3, \mathbb{Z})$  et l'une des deux situations suivantes se produit:*

- $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\text{tr}(f) \geq 0$
- $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} f_{11} & * & * \\ * & f_{22} & * \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $f_{11} - f_{22} + 1 \leq 0$

Dans tous les cas,  $f$  préserve  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ . ◇

**Démonstration:** (du lemme 1.6) Elle est due à V.Kathotia.

Supposons dans un premier temps que  $f_{13} = 0$ . On note  $F = {}^t f^{-1}$  la comatrice, et  $Q_r = r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{21}^2 + r_{22}^2$ .

Comme  $\det f = 1$ , on a le développement  $f_{11}F_{11} + f_{12}F_{12} = 1$ , et donc  $r_{11}^2 + r_{12}^2 = (f_{11} + F_{11})^2 + (f_{12} + F_{12})^2 \geq 4(f_{11}F_{11}) + 4(f_{12}F_{12}) = 4$ .

Donc  $Q_r \geq 4$ .

Pour le cas général, soient  $O$  la matrice orthogonale d'une rotation d'axe  $(0, 0, 1)$  :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\theta \in \mathbb{R}), g = Of, \text{ et } \rho = g + {}^t g^{-1}, \text{ alors}$$

$$\rho = Or, \text{ et donc } Q_\rho = Q_r.$$

Il suffit alors de choisir  $\theta$  de telle sorte que  $g_{13} = 0$ , et on est ramené au cas précédent.  $\diamond$

Les conditions de la proposition 1.7 étant assez contraignantes, on peut chercher à les amoindrir, quitte à obtenir une isotopie qui ne soit plus un segment.

Supposons que  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , où  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ . Pour le problème qui va nous intéresser, à savoir calculer l' "indice" de  $f$ , la proposition précédente est suffisante, puisqu'on montrera qu'on peut se ramener à cas où  $A$  est l'identité, qui satisfait clairement la condition imposée.

Néanmoins, on peut aller un peu plus loin:

**Proposition 1.8** *Si  $f \in SL(3, \mathbb{Z})$  préserve  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ , alors il existe un chemin  $C^\infty$  formé de formes de contact joignant  $\alpha$  et  $f^*\alpha$ .*

**Démonstration:** Supposons d'abord que  $f$  induise l'identité sur  $\{0\}^2 \times \mathbb{T}$  (c'est-à-dire  $f_{33} = 1$ ). La preuve est alors immédiate si on remarque que pour  $h = \begin{pmatrix} B & x \\ & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B \in SL(2, \mathbb{R})$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $h^*\alpha$  est parfaitement définie et est une forme de contact.

En effet  $(h^*\alpha)_{(\theta, \varphi, \lambda)} v = \alpha_\lambda(hv)$  qui est parfaitement légal sur  $\mathbb{T}^3$ ; et on a toujours  $h^*\alpha \wedge d(h^*\alpha) = -\det h = -1$ .

La conclusion découle alors du fait que  $SL(2, \mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}$  sont connexes par chemins  $C^\infty$ .

Si maintenant  $f_{33} = -1$ , la même méthode assure que  $f^*\alpha$  est isotope à  $f_0^*\alpha$ , où  $f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Or  $f_0^*\alpha = \alpha$ .  $\diamond$

Dans la preuve de la proposition (1.7), on a montré que nécessairement  $f \in SL(3, \mathbb{Z})$ . En prenant davantage de recul, ce résultat est immédiat car on a :

**Lemme 1.9** *Soit  $f \in GL(3, \mathbb{Z})$ . Si  $\alpha$  est isotope à  $f^*\alpha$  (par une isotopie de formes de contact), alors  $f \in SL(3, \mathbb{Z})$ .*

**Démonstration:**  $f^*(\alpha \wedge d\alpha) = -\det f$  et  $\alpha \wedge d\alpha = -1$ . Donc si  $\det f = -1$  et si  $\alpha_t$  est une telle isotopie,  $\alpha_t \wedge d\alpha_t$  soit s'annuler pour un certain  $t$ , ce qui est absurde.  $\diamond$

Pour terminer , mentionnons que la réciproque de la proposition (1.8) est aussi vraie (voir [Eliashberg]), mais n'a pas à ma connaissance de preuve élémentaire. Remarquons qu'une telle réciproque fournit comme corollaire une autre preuve du lemme (1.6) dans le cas de  $\mathbb{Z}$ .

## 2 Construction de difféomorphismes de contact

Soit  $M$  une variété différentielle compacte munie d'une structure de contact  $\alpha$ ,  $f$  un difféomorphisme de  $M$  tel que le segment  $[\alpha, f^*\alpha]$  soit formé de formes de contact. Autrement dit  $\alpha_t = \alpha + t(f^*\alpha - \alpha)$  est une famille à un paramètre de formes de contact. D'après le théorème de Gray (1.4) il existe des familles  $g_t$  et  $u_t$  telles que  $g_t^*\alpha_t = u_t\alpha$  et  $g_t$  est le groupe à un paramètre associé au champ de vecteurs  $X_t \in \xi_t \stackrel{\text{def}}{=} \ker \alpha_t$  défini par

$$\left( \frac{d}{dt}(\alpha_t) + i_{X_t} d\alpha_t \right) |_{\xi_t} = 0 \quad (2)$$

On note  $\text{Gray}(f) = fg_1$ .

$(fg_t)$  est alors une isotopie de  $f$  à  $\text{Gray}(f)$ , et  $\text{Gray}(f)^*\alpha = g_1^*f^*\alpha = g_1^*\alpha_1 = u_1\alpha$  donc  $\text{Gray}(f)$  est un difféomorphisme de contact.

On a ainsi une méthode élégante pour construire un difféomorphisme de contact isotope à un difféomorphisme donné. Et ce qui est remarquable, c'est que dans le cas du tore  $\mathbb{T}^2$ , la méthode s'applique concrètement et presque sans calculs !



Venons-en donc au problème du tore. Dans l'idée de classifier topologiquement tous les difféomorphismes de contact, on peut se contenter d'étudier le cas où  $f$  est linéaire, c'est-à-dire  $f \in GL(3, \mathbb{Z})$ . (Cette idée sera précisée en section (5.3)) En outre, on montre facilement le lemme suivant:

**Lemme 2.1** *Si  $f$  a la propriété supplémentaire d'être de la forme*

$$f = A \oplus 1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in GL(2, \mathbb{Z})$$

*(la proposition (1.7) nous assure qu'il existe de tels  $f$ )*

*Alors  $\forall \lambda \in \mathbb{T}$ ,  $\pi \circ \text{Gray}(f)|_{\mathbb{T}^2 \times \{\lambda\}} = f|_{\mathbb{T}^2 \times \{0\}} = A$ , si  $\pi$  est la projection de  $\mathbb{T}^3$  sur ses deux premiers facteurs.*

**Démonstration:** On a  $\alpha(\frac{\partial}{\partial \lambda}) = 0$ , et  $\alpha_t = \alpha + t(f^*\alpha - \alpha)$ , donc  $\alpha_t(\frac{\partial}{\partial \lambda}) = 0$ , i.e.  $\frac{\partial}{\partial \lambda} \in \xi_t$ . Soit  $x_t$  tel que  $(x_t, \frac{\partial}{\partial \lambda})$  soit une base de  $\xi_t$ .  $d\alpha_t|_{\xi_t}$  est non-dégénérée, donc  $d\alpha_t(x_t, \frac{\partial}{\partial \lambda}) \neq 0$  ( $\xi_t$  est de dimension 2 !).

D'autre part (2)  $\Rightarrow \frac{d}{dt}(\alpha_t)(\frac{\partial}{\partial \lambda}) + d\alpha_t(X_t, \frac{\partial}{\partial \lambda}) = 0$ , soit  $d\alpha_t(X_t, \frac{\partial}{\partial \lambda}) = 0$ , ce qui veut dire que  $X_t \in \langle \frac{\partial}{\partial \lambda} \rangle$ .

Comme  $g_t$  est défini par  $\dot{g}_t = X_t \circ g_t$ , on a  $g_t|_{\mathbb{T}^2 \times \{\lambda\}} = id$  donc  $\text{Gray}(f)|_{\mathbb{T}^2 \times \{\lambda\}} = fg_1|_{\mathbb{T}^2 \times \{\lambda\}} = f|_{\mathbb{T}^2 \times \{0\}}$   $\diamond$

Comme exemple explicitons les calculs pour  $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Il suffit donc

d'étudier la composante  $v$  de  $X_t$  sur  $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ .

(2)  $\Rightarrow \frac{d}{dt}(\alpha_t)(x_t) + v.d\alpha_t(\frac{\partial}{\partial \lambda}, x_t) = 0$ . Si on pose  $\alpha_t = (a_t, b_t, 0)$  alors on peut choisir  $x_t = (-b_t, a_t, 0)$  – qu'on note  $\alpha_t^\perp$ , et on a  $v = (\alpha - f^*\alpha)(x_t)/d\alpha_t(\frac{\partial}{\partial \lambda}, x_t)$ .

On trouve  $v = -1/|x_t|^2 = \frac{-1}{t^2 + (1-t)^2}$ .  $g_t$  s'obtient alors en résolvant l'équation différentielle

$$\dot{\lambda} = \frac{-1}{t^2 + (1-t)^2}$$

soit  $\lambda = \lambda_0 - \pi/4 - \arctan(2t - 1)$ , donc

$$g_t(\theta, \varphi, \lambda) = (\theta, \varphi, \lambda - \pi/4 - \arctan(2t - 1))$$

d'où

$$\text{Gray}(f) = (\theta, \varphi, \lambda) \mapsto (\varphi, -\theta, \lambda - \pi/2)$$

(On peut d'ailleurs vérifier aisément qu'il est de contact, et même que  $\text{Gray}(f)^*\alpha = \alpha$ .)  $\diamond$

Le deuxième exemple n'est guère plus compliqué, mais il va nous servir de base pour la suite.

**Problème 2.1** Déterminer  $\text{Gray} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Posons  $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On a donc  $f^*\alpha = \alpha + \alpha_\theta d\lambda$ , où  $\alpha_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\frac{\partial}{\partial \lambda})$ , et enfin

$$\alpha_t = \alpha + t\alpha_\theta d\lambda.$$

Comme  $\alpha_\theta = \cos(\lambda)$  est une fonction de  $\lambda$ , on a  $d\alpha_t = d\alpha = \omega$ . On note encore  $\alpha^\perp$  l'orthogonal direct de  $\alpha$  vu comme section de  $T\mathbb{T}^2$ , où  $T\mathbb{T}^2$  est vu comme sous-espace de  $T\mathbb{T}^3 = T(S^*\mathbb{T}^2)$ . Si  $\wedge$  désigne le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3 = T_{(\theta, \varphi, \lambda)}\mathbb{T}^3 \simeq T_{(\theta, \varphi, \lambda)}^*\mathbb{T}^3$ , alors  $(\alpha^\perp, \alpha_t \wedge \alpha^\perp)$  est une base de  $\xi_t$ .

Posons  $X_t = u\alpha^\perp + v\alpha_t \wedge \alpha^\perp$ . Alors

$$(2) \iff \begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha_t)(\alpha^\perp) + v\omega(\alpha_t \wedge \alpha^\perp, \alpha^\perp) = 0 \\ \frac{d}{dt}(\alpha_t)(\alpha_t \wedge \alpha^\perp) + u\omega(\alpha^\perp, \alpha_t \wedge \alpha^\perp) = 0 \end{cases}$$

Or  $\frac{d}{dt}(\alpha_t) = \alpha_\theta d\lambda$  donc  $\frac{d}{dt}(\alpha_t)(\alpha^\perp) = 0$  soit  $v = 0$ ; d'autre part  $d\lambda(\alpha_t \wedge \alpha^\perp) = d\lambda(\alpha \wedge \alpha^\perp) = \|\alpha\|^2 = 1$ .

Enfin  $\omega = -\alpha^\perp \wedge d\lambda$  (voir section (1.3)) donc  $\omega(\alpha^\perp, \alpha_t \wedge \alpha^\perp) = -(\alpha^\perp \cdot \alpha^\perp)(d\lambda \cdot \alpha_t \wedge \alpha^\perp) = -\|\alpha^\perp\|^2 \|\alpha\|^2 = -1$ , d'où  $u = \alpha_\theta = \cos(\lambda)$ , et  $X_t = \cos(\lambda)\alpha^\perp =$

$$-\sin(\lambda)\cos(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos^2(\lambda)\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

On a donc

$$g_t(\theta, \varphi, \lambda) = (\theta - t \sin(\lambda) \cos(\lambda), \varphi + t \cos^2(\lambda), \lambda)$$

et enfin

$$\text{Gray}(f) = (\theta, \varphi, \lambda) \mapsto (\theta + \lambda - \sin(\lambda) \cos(\lambda), \varphi + \cos^2(\lambda), \lambda)$$

Là encore, on peut même vérifier que  $\text{Gray}(f)^*\alpha = \alpha$ .  $\diamond$

On remarque que la restriction de  $\text{Gray}(f)$  à chaque 2-tore  $\mathbb{T}^2 \times \{\lambda\}$  est une simple translation.

Enfin notons que cet exemple permet de traiter immédiatement les cas

$$f_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $a, b \in \mathbb{Z}$ , puisqu'il suffit de remplacer dans la preuve  $\alpha_\theta$  par  $a\alpha_\theta + b\alpha_\varphi$ . On obtient

$$\begin{aligned} \text{Gray}(f_{a,b}) &= (\theta, \varphi, \lambda) \mapsto \\ &(\theta + a\lambda - a \sin(\lambda) \cos(\lambda) - b \sin^2(\lambda), \varphi + b\lambda + a \cos^2(\lambda) + b \sin(\lambda) \cos(\lambda), \lambda) \end{aligned}$$

Là encore, la restriction de  $\text{Gray}(f_{a,b})$  à chaque 2-tore  $\mathbb{T}^2 \times \{\lambda\}$  est une translation, et donc tous les difféomorphismes obtenus commutent avec les difféomorphismes de contact de la forme  $\tau_\Delta((\theta, \varphi), \lambda) = ((\theta, \varphi) + \Delta, \lambda)$ , c'est-à-dire les difféomorphismes de contact induits par les translations sur  $T^2$ .

On utilisera ce fait en fin de section suivante (problème 3.1).

### 3 Point de vue symplectique

#### 3.1 Symplectisation d'une structure de contact

À partir de toute variété de contact  $S$  de dimension  $2n - 1$ , on peut construire canoniquement une variété symplectique  $M$  de dimension  $2n$  de la manière suivante:

On définit  $M$  comme l'ensemble des formes algébriques de contact. Autrement dit, si  $\varphi$  est une forme (différentielle) de contact sur  $S$ ,

$$M = \{\rho\varphi(x), x \in S, \rho \in \mathbb{R}_+^*\}$$

On munit  $M$  de la structure différentielle  $(x, \rho) = \rho\varphi(x)$  – comme sous-ensemble de  $T^*S$  –, qui en fait une variété conique  $C^\infty$ . Enfin on définit sur  $M$  la 1-forme “tautologique”  $\alpha$  par la formule

$$\alpha_{(x,\rho)}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (x, \rho)(\pi_{1*}\xi) = \rho\varphi_x(\pi_{1*}\xi)$$

où  $\pi_1$  est la projection  $(x, \rho) \mapsto x : M \rightarrow S$ .

**Proposition 3.1**  *$d\alpha$  est symplectique si et seulement si  $\varphi$  est une forme de contact.*

**Démonstration:** On a  $\alpha_{(x,\rho)} = \rho\tilde{\varphi}_x$ , où  $\tilde{\varphi} = \pi_1^*\varphi$ . Donc  $d\alpha_{(x,\rho)} = \rho d\tilde{\varphi} + d\rho \wedge \tilde{\varphi}$ , et comme les 2-formes commutent pour l'action du produit extérieur, on a

$$(d\alpha)^n = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} (\rho d\tilde{\varphi})^{n-k} \wedge (d\rho \wedge \tilde{\varphi})^k$$

Comme  $d\rho \wedge d\rho = 0$ , seuls subsistent dans la somme les termes correspondant à  $k = 0, 1$ . Or  $\rho^n (d\tilde{\varphi})^n = \rho^n (\pi_1^*(d\varphi)^n) = 0$  car  $\varphi$  est une 2-forme sur  $S$ , qui est de dimension  $2n - 1$ . Donc seul le terme  $k = 1$  subsiste et on a

$$(d\alpha)^n = \rho^{n-1} d\rho \wedge ((d\varphi)^{n-1} \wedge \varphi)$$

Enfin  $d\alpha$  est symplectique si et seulement si  $(d\alpha)^n \neq 0$ , tandis que  $\varphi$  est une forme de contact si et seulement si  $(d\varphi)^{n-1} \wedge \varphi \neq 0$  ce qui termine la preuve.  $\diamond$

Un cas intéressant est celui où  $S = S^*X$  est le fibré en sphères de  $T^*X$ , ou encore la variété de éléments de contact orientés de  $X$ . En effet  $M$  n'est alors rien d'autre que  $T^*X \setminus \{0\}$ . D'autre part, si on note  $S^*X = \{(x, u)\} \hookrightarrow T^*X$ , on dispose de la forme de contact canonique sur  $S^*X$  (voir section 1.1)  $\varphi(x, u) = \pi_2^*u$ , où  $\pi_2$  est la projection du fibré  $S^*X \rightarrow X$ , et donc, sur  $T^*X$ , puisque  $\alpha(x, \xi = \rho u) = \rho\pi_1^*\varphi(x)$ , où  $\pi_1$  est la projection  $T^*X \setminus \{0\} \rightarrow S^*X$ , on a

$$\alpha(x, \xi) = \pi^*(\rho u) = \pi^*(\xi),$$



où  $\pi = \pi_2 \pi_1$  est la projection  $T^*X \setminus \{0\} \rightarrow X$ :

$\alpha$  est donc la 1-forme canonique de Liouville restreinte à  $T^*X \setminus \{0\}$ , et la structure symplectique obtenue est la structure canonique de  $T^*X \setminus \{0\}$ .

Revenons au cas général. Muni de la “symplectisée”  $M$  de la variété de contact  $S$ , on est maintenant en mesure de transporter tout difféomorphisme de contact sur  $S$  en un difféomorphisme symplectique de  $M$ . Plus précisément, on a:

**Proposition 3.2** *Il y a correspondance naturelle bijective entre les difféomorphismes de contact  $g$  sur  $S$  tels que  $g^*\varphi = \rho\varphi$  avec  $\rho > 0$  et les difféomorphismes symplectiques homogènes sur  $M$ .*

Par homogène, on entend ici que le difféomorphisme en question doit commuter avec l’action de  $\mathbb{R}_+^*$  sur la variété conique  $M$ .

**Démonstration:** Si  $g$  est un difféomorphisme de contact, on note  $\rho(x)$  la fonction telle que  $g^*\varphi = \rho^{-1}\varphi$ . On pose alors

$$g_!(x, \rho) = (g(x), \rho\rho(x))$$

$g_!$  est bien-sûr homogène. D’autre part, on a  $g_!^* \alpha = \alpha_{(g(x), \rho\rho(x))} T_{(x, \rho)} g_! = \rho\rho(x)\varphi_{g(x)} T_x g \pi_{2*} = \rho\pi_2^*(\rho(x)g^*\varphi) = \rho\pi_2^*\varphi = \alpha_{(x, \rho)}$ . A fortiori,  $g_!^*(d\alpha) = d\alpha$ , et  $g_!$  est bien symplectique.

Réciproquement, si  $g_!$  est symplectique homogène, alors  $g$  défini par  $g_!(x, 1) = (g(x), \rho(x))$  est un difféomorphisme de  $S$ , qui s’écrit aussi  $g = \pi_1 \circ g_!|_S$ . Donc  $(g^*\varphi)_x = g_!^*(\pi_1^*\varphi)_{(x, 1)} = g_!^*\alpha_{(x, 1)}$ . Il suffit donc de montrer que  $g_!$  préserve  $\alpha$ . Une preuve géométrique de ce fait se trouve dans [Arnold], mais nous n’aurons besoin que du cas où  $M = T^*X \setminus \{0\}$ , qui sera réglé au paragraphe suivant.  $\diamond$

**Définition 3.1** *On appelle  $g_!$  le symplectisé de  $g$ .*

Pour terminer ce paragraphe, et indépendamment de ce qui précède, on montre un résultat qui nous sera utile plus tard:

**Lemme 3.3** *Si  $g$  est un difféomorphisme symplectique de  $T^*X$  qui “préserve la structure de fibré”, i.e.  $g(x, \xi) = (f(x), h(x, \xi))$ , où  $f$  est un difféomorphisme de  $X$ , alors  $g$  est la transformation canonique induite par  $f$  modulo une translation dans les fibres. (i.e.  $h(x, \xi) = ({}^t df(x))^{-1}\xi + \tau(x)$ )*

**Démonstration:** Supposons d’abord que  $f = id$ . Alors  $g^*(d\alpha) = g^*(d\xi \wedge dx) = \frac{\partial h_x}{\partial \xi} d\xi \wedge dx$ . Donc  $(\frac{\partial h_x}{\partial \xi} d\xi - d\xi) \wedge dx = 0$  ce qui équivaut à  $\frac{\partial h_x}{\partial \xi} = id$ , soit  $h(x, \xi) = \xi + \tau(x)$ .

Pour le cas général, on se ramène au cas précédent en composant par la transformation canonique induite par  $f^{-1}$ .  $\diamond$

## 3.2 Phases génératrices de lagrangiennes

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , et  $X$  une variété de dimension  $n$ . Soit  $\varphi(x, \theta)$  une fonction  $C^\infty$  de  $X \times \mathbb{R}^N$  à valeurs réelles telle que les différentielles de  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_N}$  soient indépendantes. (On dit alors que  $\varphi$  est une **phase non dégénérée**):

$$C_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \theta), \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(x, \theta) = 0\}$$

est une sous-variété de  $X \times \mathbb{R}^N$  de dimension  $n$ . Alors  $C_\varphi \ni (x, \theta) \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \theta) \in T^*X$  est une immersion lagrangienne, c'est-à-dire que

$$\Lambda_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \theta)), \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0\}$$

est une sous-variété lagrangienne de  $T^*X$ .

Enfin si  $d_{(x,\theta)}\varphi(x, \theta) \neq 0$  pour tous  $(x, \theta) \in X \times \mathbb{R}^N$ , et si  $\varphi$  est homogène en  $\theta$ , alors  $\Lambda_\varphi$  est une lagrangienne conique dans  $T^*X \setminus \{0\}$ .

La proposition suivante montre que ce processus mène (localement) à la plus générale des lagrangiennes de  $T^*X$ .

**Proposition 3.4** *Soit  $\Lambda$  une lagrangienne dans  $(T^*X \setminus \{0\}, (x_0, \xi_0))$ , alors il existe un entier  $N \leq n$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}^N$ , et une fonction  $\varphi(x, \theta)$  pour  $\theta$  voisin de  $\theta_0$ , tels que  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(x_0, \theta_0) = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$  est à différentielles indépendantes,  $\xi_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, \theta_0)$ , et*

$$\Lambda = \Lambda_\varphi = \{(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \theta)), \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0\}$$

*Si en outre  $\Lambda$  est conique, alors  $\varphi$  est homogène.*

Dans l'idée de donner une méthode pour obtenir explicitement une telle fonction de phase, on présente une démonstration entièrement constructive (suivant [Lebeau]).

**Lemme 3.5** *Soit  $E$  un espace vectoriel,  $E^*$  son dual. Soit  $\Sigma = E \oplus E^*$  muni de la structure symplectique canonique  $\sigma((x, \xi), (y, \eta)) = \xi(y) - \eta(x)$ . Soit  $L$  un sous-espace lagrangien de  $\Sigma$ . Alors il existe une application linéaire  $M : E \rightarrow E^*$  telle que l'application  $(x, \xi) \mapsto \xi + M(x)$  soit une bijection de  $L$  sur  $E^*$ .*

Une preuve immédiate serait d'affirmer l'existence d'une lagrangienne transverse simultanément à  $L$  et à  $E^*$  dans  $\Sigma$ . Mais elle serait un peu frauduleuse dans la mesure où ce lemme est vraiment équivalent à cette affirmation. En effet si on admet l'existence d'une telle lagrangienne  $\Lambda$ , alors  $\pi : (x, \xi) \mapsto x, \Lambda \rightarrow E$  a pour noyau  $\Lambda \cap E^* = \{0\}$ , est donc bijective et  $\Lambda$  est de la forme  $\{x, Ax\}$ . D'autre part  $\Lambda$  est lagrangienne  $\iff A$  est symétrique. Enfin  $\varpi : (x, \xi) \mapsto \xi - A(x), L \rightarrow E^*$  a pour noyau  $L \cap \{\xi = A(x)\} = L \cap \Lambda = \{0\}$ . Il suffit donc de choisir  $M = -A$ . Réciproquement, si on admet le résultat du lemme, il suffit de choisir

la lagrangienne  $\Lambda = \{(x, -M(x))\}$ ...

**Démonstration:** (du lemme) Soit  $p$  la projection  $(x, \xi) \mapsto \xi$ . Soit  $N = \ker p|_L$ . Si  $N = \{0\}$  il suffit de choisir  $M = 0$ . Sinon, soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  où  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $N$ . On munit  $E^*$  de la base duale. On note  $E \ni x = (x', x'')$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_p)$ . Alors  $\forall i = 1 \dots p, \forall (x, \xi) \in L, \sigma((x, \xi), (e_i, 0)) = 0$  car  $e_i \in L$  est lagrangienne. Donc  $\xi_i = 0$  et  $L \subset \{\xi' = 0\}$ . On pose  $M = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $(x, \xi) \mapsto \xi + Mx$  réalise une bijection de  $L = \{(x', 0, 0, \xi'')\}$  sur  $E^* = \{(x', \xi'')\}$ .  $\diamond$

**Lemme 3.6** Soit  $\Lambda$  une sous-variété lagrangienne de  $T^*X \setminus \{0\}$  et  $(y_0, \eta_0) \in \Lambda$ . Alors on peut construire un changement de variable  $\chi$  sur  $X$  au voisinage de  $y_0$  telle que dans les coordonnées canoniques induites par  $\chi$ , l'application  $(x, \xi) \mapsto \xi$  soit un difféomorphisme local de  $(\Lambda, (x_0, \xi_0))$  sur la fibre  $\pi^{-1}(x_0)$ .

On note ici  $d^*\chi(x, \xi) = (\chi(x), {}^t(d\chi(x))^{-1}\xi)$  la transformation canonique induite par  $\chi$ .

**Démonstration:** L'idée est de choisir  $\chi(y) = y + O(y^2)$ , où le terme quadratique se construit à l'aide du lemme (3.5). On travaille ici en coordonnées locales – dans une carte de  $X$  centrée en  $x_0$ , donc  $0 = y_0 = \chi(y_0) = x_0$ . Si  $A^1, \dots, A^n$  sont des matrices symétriques, on note  $A$  l'application linéaire  $\mathbb{R}^n \rightarrow M_n(\mathbb{R}) : y \mapsto A_y = \begin{pmatrix} {}^t(A^1 y) \\ \vdots \\ {}^t(A^n y) \end{pmatrix}$ . On cherche donc  $\chi$  sous la forme

$$x = \chi(y) = y + \frac{1}{2}A_y \cdot y$$

On a  $d_y^*\chi : (T^*X, y) \rightarrow (T^*X, x)$ ,  $\eta \mapsto \xi = ({}^t d_x \chi)^{-1}\eta$ , et  ${}^t d_x \chi = I + {}^t(A_y)$ .

$$\text{Soit } F = (d^*\chi)^{-1} = \begin{cases} x \mapsto y = \chi^{-1}(x) \\ \xi \mapsto \eta = {}^t d_x \chi \xi = (I + {}^t(A_{\chi^{-1}(x)}))\xi \end{cases}$$

$d_{(x_0, \xi_0)}F : T_{(x_0, \xi_0)}(T^*X) \rightarrow T_{(y_0, \eta_0)}(T^*X)$  et on a

$$d_{(x_0, \xi_0)}F(\delta x, \delta \xi) = (d_x \chi^{-1} \delta x, {}^t A_{({}^t d_x \chi)^{-1} \xi_0} \delta x + \delta \xi),$$

car  $A_0 = 0$ .

Comme  $\eta_0 = {}^t(d_x \chi)^{-1} \xi_0 \neq 0$  (car  $\xi_0 \neq 0$ ), l'application  $S_n(\mathbb{R}) \times \dots \times S_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) : (A^1, \dots, A^n) \mapsto A_{\eta_0}$  est surjective, car

$$S_n(\mathbb{R}) \ni A \mapsto A \eta_0 \in \mathbb{R}^n$$

l'est. En effet soit  $u \in \mathbb{R}^n$ . Si  $u = 0$ ,  $A = 0$  convient. Sinon une homothétie de rapport  $|\eta_0|/|u|$  composée avec la symétrie orthogonale d'hyperplan  $(\eta_0 - \frac{|\eta_0|}{|u|}u)^\perp$

– lorsqu’elle est définie – envoie bien  $\eta_0$  sur  $u$ . Le lemme linéaire (3.5) appliqué à l’espace symplectique  $\Sigma = T_{(x_0, \xi_0)} T^* X \simeq (T_{x_0} X) \oplus (T_{x_0} X)^* = \{(\delta x, \delta \xi)\}$  et au sous-espace lagrangien  $L = T_{(x_0, \xi_0)} \Lambda$  nous fournit alors une matrice symétrique  $M$ , dont un antécédent par l’application précédente nous donne le résultat (car  $\{(0, \delta \xi)\} = (T_{x_0} X)^*$  est l’espace tangent à la fibre  $\pi^{-1}(x_0)$ ).  $\diamond$

**Démonstration:** (de la proposition) D’après le lemme précédent, on peut construire une carte locale dans laquelle  $\Lambda$  est de la forme  $\{(h(\xi), \xi), \xi \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}\}$ . On sait alors que  $\Lambda$  est lagrangienne si et seulement si  $h$  est fermée, en tant que 1-forme sur  $(\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$ . On peut alors supposer que  $h$  est exacte et  $h(\xi) = d_\xi H$ . Dans le cas où  $\Lambda$  est conique, le problème de trouver une primitive de  $h$  (qui s’obtient dans le cas général à l’aide d’une des nombreuses variantes du “lemme de Poincaré”) s’effondre complètement car on a

**Lemme 3.7** *Soit  $\Lambda$  une lagrangienne conique de  $T^* X \setminus \{0\}$  de la forme  $\{(h(\xi), \xi)\}$ . Alors  $h$  est exacte et  $h(\xi).\xi$  est une primitive de  $h$ .*

**Démonstration:**  $d\langle h(\xi), \xi \rangle.v = \langle h'(\xi).v, \xi \rangle + \langle h(\xi), v \rangle$ . Comme  $h$  est fermée,  $h'$  est symétrique et  $\langle h'(\xi).v, \xi \rangle = \langle v, h'(\xi).\xi \rangle$ .  $\Lambda$  étant conique, on a  $\forall \lambda > 0, h(\lambda \xi) = \xi$  d’où en dérivant par rapport à  $\lambda$ ,

$$h'(\xi).\xi = 0,$$

qui n’est rien d’autre que l’identité d’Euler pour les fonction homogènes de degré 0.

D’où  $d\langle h(\xi), \xi \rangle = h(\xi)$ .  $\diamond$

On peut maintenant achever la démonstration de la proposition: on choisit  $N = n$ , et

$$\varphi(x, \theta) = x.\theta - H(\theta)$$

On a  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \iff x = H'(\theta) = h(\theta)$ , et  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \theta$ , donc  $\Lambda_\varphi = \{(x, \theta), x = h(\theta)\} = \{(h(\theta), \theta)\} = \Lambda$ .  $\diamond$

Précisons maintenant le contexte dans lequel on voudra utiliser cette proposition. Soit  $g$  un difféomorphisme de contact sur  $S^* X$  ( $X$  sera le tore  $\mathbb{T}^2$ ), vérifiant la condition de la proposition 3.2 – d’après le théorème de Gray, tous les difféomorphismes de contact de la forme Gray  $f$  la vérifient, puisqu’on a imposé “ $u_0 \equiv 1$ ”. On note  $\chi$  son symplectisé  $\chi = g!$ . On note  $C$  le graphe de  $\chi$  dans  $T^* X \times T^* X \simeq T^*(X \times X)$

$$C = \{(x, y, \xi, \eta), (y, \eta) = \chi(x, \xi)\}$$

Enfin on note  $\sim$  l’application de  $T^*(X \times X)$  dans lui-même qui à  $(x, y, \xi, \eta)$  associe  $(x, y, \xi, -\eta)$ . Dans le cas d’un difféomorphisme quelconque  $\chi$ , on a:

**Lemme 3.8** a)  $\tilde{C}$  est lagrangienne pour la structure canonique de  $T^*(X \times X)$  si et seulement si  $\chi$  est une transformation canonique.

b) En outre  $\tilde{C}$  est conique si et seulement si  $\chi$  est homogène.

**Démonstration:** Le b) est immédiat.

Soit  $\sigma_X$  la structure symplectique canonique de  $T^*X$ . Celle de  $T^*(X \times X)$  est alors  $\sigma_X \oplus \sigma_X$ .  $\tilde{C}$  est lagrangienne  $\iff \sigma_X \oplus \sigma_X|_C = 0$

$$\begin{aligned} &\iff \forall (x, y, \xi, \eta) \in \tilde{C}, \sigma_X(x, \xi) + \sigma_X(y, \eta)|_{T_{(x,y,\xi,\eta)}\tilde{C}} = 0 \\ &\iff \forall (x, y, \xi, \eta) \in C, \sigma_X(x, \xi) - \sigma_X(y, \eta)|_{T_{(x,y,\xi,\eta)}C} = 0 \\ &\iff \sigma_X = \chi^* \sigma_X \\ &\iff \chi \text{ est symplectique. } \diamond \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin on peut faire une remarque en passant:

**Définition 3.2** On dit qu'une lagrangienne  $\Lambda$  de  $T^*X$  est **exacte** si  $\alpha|_\Lambda = 0$ , où  $\alpha$  est la 1-forme canonique de Liouville.

D'après le lemme (3.7), on a donc aussi prouvé le résultat suivant:

**Proposition 3.9** Toute lagrangienne conique de  $T^*X \setminus \{0\}$  est exacte.  $\diamond$

**Corollaire 3.10** (voir prop.(3.2)) Si  $g_!$  est un difféomorphisme symplectique homogène, et  $\alpha_X$  la 1-forme de Liouville, alors  $g_!^* \alpha_X = \alpha_X$  est bien de contact.

**Démonstration:**  $\text{Gr\~{a}phe}(g_!)$  est une lagrangienne conique, donc exacte.  $\diamond$



Venons-en plus précisément au problème du tore, et en particulier au cas de la matrice

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ou encore  $f = f_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .)

D'après le problème (2.1), on sait que  $\text{Gray}(f)$  est de la forme  $(x, u) \mapsto (x + h(u), u)$ , où  $(x, u) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1 \simeq S^*(\mathbb{T}^2)$ . Dans la suite, c'est la seule information qui va nous être utile, et le problème se formule ainsi:

**Problème 3.1** Soit  $g$  un difféomorphisme de contact sur  $S^*X$  de la forme  $g(x, u) = (x + h(u), u)$ . Trouver un système de phases génératrices de la lagrangienne

$$\Lambda = \text{Gr\~{a}phe}(g) \subset T^*(X \times X) \setminus \{0\}$$

On a donc  $g_!(x, \xi) = (g(x, u), \rho\rho(x, u))$ , où  $\xi = (u, \rho)$ , soit  $g_!(x, \xi) = (x + h(\xi/|\xi|), \rho(x, \xi/|\xi|)\xi)$ . On renote  $h(\xi)$  et  $\rho(x, \xi)$  pour  $h(\xi/|\xi|)$  et  $\rho(x, \xi/|\xi|)$ .  $h$  et  $\rho$  sont alors homogènes de degré 0, et on a

$$\Lambda = \tilde{C} = \{(x, x + h(\xi), \xi, -\rho(x, \xi)\xi)\}$$

$\Lambda$  est exacte, ce qui veut dire, puisque  $\alpha_X = \xi dx$ , que  $\xi dx = \rho(x, \xi)\xi d(x + h(\xi))$ , soit  $(\xi - \rho(x, \xi)\xi)dx = \xi.h'(\xi)$ . Donc  $\rho(x, \xi) = 1$ , et  $\xi.h'(\xi) = 0$ .

Autrement dit les données du problème contiennent implicitement le fait que  $g^*\varphi = \varphi$  ( $\varphi$  est la forme de contact “canonique” de  $S^*X$ ) et que  $h$  est exacte, de primitive  $H(\xi) = h(\xi).\xi$ .

Par acquit de conscience, on pourrait se rappeler que la première propriété a été établie directement pour le cas du problème (2.1), et vérifier que

$$h(\xi) = (\lambda - \sin(\lambda) \cos(\lambda), \cos^2(\lambda))$$

est fermée, en utilisant les coordonnées polaires  $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\rho \cos(\lambda), \rho \sin(\lambda))\dots$

On a donc

$$\Lambda = \{(x, x + h(\xi), \xi, -\xi), (x, \xi) \in T^*X \setminus \{0\}\}.$$

On peut maintenant appliquer toute la machinerie expliquée précédemment pour exhiber une fonction de phase. Mais dans notre cas on peut être un peu plus rusé. En effet  $\Lambda$  a presque déjà la forme voulue ( $\{(\tilde{h}(\xi), \xi)\}$ ). Pour s’en convaincre, on peut effectuer le changement de variable (local) sur  $X(x) \times X(y)$ :  $\begin{cases} x \mapsto x + y \\ y \mapsto x - y \end{cases}$ ,

qui induit la transformation canonique  $\begin{cases} \xi \mapsto \frac{\xi + \eta}{2} \\ \eta \mapsto \frac{\xi - \eta}{2} \end{cases}$

(Notons que cette idée peut venir en utilisant le fait que, d’après la structure de  $g$ , l’opérateur de Fourier correspondant doit commuter avec les translations de  $X$  (voir section 4.5))

Appelant à nouveau  $(x, y, \xi, \eta)$  les nouvelles coordonnées,  $\Lambda$  est (localement) de la forme  $\Lambda = \{(x, -h(\xi), 0, \xi)\}$  : c’est donc le produit de la section nulle de  $T^*X$  par une lagrangienne ayant la forme requise, et une phase génératrice est donc  $\tilde{\varphi}(x, y, \theta) = y.\theta + H(\theta)$ .

Revenant aux coordonnées initiales, on voit aisément que

$$\varphi(x, y, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} (x - y).\theta + H(\theta)$$

est une phase génératrice *globale* pour  $\Lambda$  (car on a vu qu’il existe une primitive globale  $H$  de  $h$ ).  $\diamond$

*Remarque* : on a ici une phase qui est optimale (ou encore **réduite**), dans le sens où la dimension de la variable  $\theta$  est minimale (ici  $N = n = \dim X$ ), alors que la proposition (3.4) donnait une borne grossière  $N = \dim X \times X = 2n$ .

## 4 Opérateurs intégraux de Fourier

Nous n'avons jusqu'à présent travaillé qu'avec des objets purement géométriques : difféomorphismes de contact, puis transformations canoniques et enfin sous-variétés lagrangiennes de l'espace cotangent. Le point de vue que nous allons adopter maintenant et de considérer ces objets comme "représentations intrinsèques" de certains opérateurs sur des espaces de Hilbert. On désigne en général par "quantification" ce passage de la géométrie à l'analyse fonctionnelle. (voir [Bates/Weinstein])

On va donc décrire ici brièvement une large classe d'opérateurs, qui ont localement la forme

$$Pu(x) = \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) u(y) d\theta dy$$

où la fonction de phase  $\varphi$  et l'amplitude  $a$  vérifient certaines propriétés. On remarque qu'un opérateur différentiel standard  $P(x, \partial_x) = \sum p_\alpha(x) \partial_x^\alpha$  se met naturellement sous cette forme car en écrivant  $u = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(u)$  on a

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\cdot\theta} p(x, i\theta) u(y) dy d\theta$$

On a noté  $\mathcal{F}$  pour la transformation de Fourier  $\mathcal{F} = \int e^{-ix\cdot\xi} dx$ .

Pour les détails et les diverses justifications nécessaires des différentes définitions présentées ici, voir [Duistermaat] et [Treves 2], ou encore [Hörmander 0,3,4], qui reste la référence.

### 4.1 symboles

Soit  $E$  un fibré vectoriel  $C^\infty$  de dimension  $N$  sur une variété paracompacte  $M$ .  $E \setminus \{0\}$  est alors une variété conique (i.e. admettant une action  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}_+^*$  telle que le fibré des orbites soit  $C^\infty$ ).

**Définition 4.1** *On dit que  $a \in C^\infty(E)$  est un **symbole de degré  $\mu$  et de type  $(\rho, \delta) \in [0, 1] \times [0, 1]$  si dans tout système de coordonnées  $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^N$  de  $E$  on a***

$$\forall \alpha, \beta, \forall K \subset\subset U, \exists C_{\alpha,\beta,K}, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,K} (1 + |\xi|)^{\mu - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}$$

*On note alors  $a \in S_{\rho,\delta}^\mu(E)$ . Enfin on note  $S_\rho^\mu = S_{\rho,1-\rho}^\mu$*

Dans la suite, on ne s'occupera pas des classes "exotiques" ( $\rho \neq 1$ ) et on notera  $S^\mu = S_1^\mu$ .

## 4.2 intégrales de Fourier

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , et soit  $\Lambda$  une sous-variété lagrangienne conique de  $T^*M \setminus \{0\}$ . Si  $\Gamma$  est un cône ouvert de  $M \times \mathbb{R}^N$  et  $\varphi$  une phase génératrice (non dégénérée) pour  $\Lambda$  sur  $\Gamma$  telle que  $d_{(x,\theta)}\varphi(x,\theta) \neq 0 \ \forall (x,\theta) \in M \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , alors

$$A : C_0^\infty(M, \Omega_{\frac{1}{2}}) \ni u \mapsto \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) u(x) dx d\theta \quad (1)$$

est une densité distribution (définie par intégrale oscillante) pour toute amplitude  $a \in S^\mu(M \times \mathbb{R}^N)$ , telle que cône  $\text{supp } a \subset \Gamma$ .  
cône  $\text{supp } a = \{(x, \lambda\theta), (x, \theta) \in \text{Supp } (a), \lambda > 0\}$ .

**Définition 4.2** On appelle **intégrale de Fourier** d'ordre  $m$  portée par  $\Lambda$  une distribution  $A \in \mathcal{D}'(M, \Omega_{\frac{1}{2}})$  de la forme

$$A = \sum A_j$$

où  $A_j$  est une famille de distributions de type décrit ci-dessus (seule  $\Lambda$  étant fixée), telle que  $\{\text{supp } A_j\}$  soit localement finie, avec amplitudes  $a_j \in S^{m+n/4-N_j/2}(M \times \mathbb{R}^{N_j})$ . (le choix du degré des  $a_j$  permettra d'assurer que  $A$  est bien d' "ordre  $m$ ", en un sens précisé au paragraphe 4.6). On note  $I^m(M, \Lambda)$  l'espace des telles intégrales de Fourier.

Cette définition est adéquate pour montrer par exemple que si  $\Lambda$  est fermée,

$$C^\infty(M) \subset \bigcap_{m \in \mathbb{R}} I^m(M, \Lambda)$$

[voir Treves, chapitre VIII, prop.3.2]

*Remarque:* l'appellation utilisée ici est celle de [Duistermaat]. [Treves] appelle ces distributions "distributions de Fourier" tandis que Hörmander préfère "distributions lagrangiennes" (voir [Hörmander 4, prop.25.1.5']).

## 4.3 symbole principal d'une intégrale de Fourier

Soit  $A \in I^m(M, \Lambda)$ . Par définition, au voisinage de chaque point  $(x_0, \xi_0) \in \Lambda$ , il existe un cône ouvert  $\Gamma_0$  tel que  $\Lambda \cap \Gamma_0$  soit généré par une fonction de phase  $\varphi$  sur un cône  $\Gamma$  de  $M \times \mathbb{R}^N$  et tel que  $A$  s'écrive sous la forme (1). Supposons d'abord que  $A$  s'écrive globalement ainsi, avec une amplitude  $a \in S^{m+n/4-N/2}(\Gamma)$ .

On peut à partir de  $\varphi$  construire une semi-densité sur  $C_\varphi$ , notée  $\sqrt{d_\varphi}$ , qui est homogène de degré  $N/2$  en  $\theta$ . On note  $\alpha$  la semi-densité obtenue en transportant  $a\sqrt{d_\varphi}$  sur  $\Lambda$  par le difféomorphisme  $(x, \theta) \rightarrow (x, \frac{\partial\varphi}{\partial x})$  (voir section 3.2). On a alors  $\alpha \in S^{m+n/4}(\Lambda \cap \Gamma_0, \Omega_{\frac{1}{2}})$ .



On montre ensuite qu'on peut remplacer  $\varphi$  par une phase *réduite*, ce qui mène à une nouvelle semi-densité  $\beta$  vérifiant

$$e^{i\frac{\pi}{4}s}\alpha - \beta \in S^{m+n/4-1}(\Lambda \cap \Gamma_0, \Omega_{\frac{1}{2}}),$$

où  $s$  est la signature de la forme quadratique  $\varphi_{\theta\theta}$  restreinte à l'espace des “ $\theta$  excédentaires”.

Enfin si  $\tilde{\varphi}$  définie sur le cône  $\tilde{\Gamma}$  est une autre fonction de phase réduite non dégénérée pour le même  $\Gamma_0$ , il existe un difféomorphisme  $f$  de  $\tilde{\Gamma}$  sur  $\Gamma$  préservant les fibres tel que  $\varphi \circ f = \tilde{\varphi}$ , et on montre alors que la semi-densité sur  $\Gamma_0 \cap \Lambda$  correspondante est inchangée.

Si on oublie pour l'instant le terme  $e^{i\frac{\pi}{4}s}$ ,  $A$  définit donc sans ambiguïté un élément

$$\dot{\alpha} \in S^{m+n/4}(\Lambda, \Omega_{\frac{1}{2}})/S^{m+n/4-1}(\Lambda, \Omega_{\frac{1}{2}})$$

qu'on appelle le *symbole principal* de  $A$ .

Dans le cas général un élément de  $I^m(M, \Lambda)$  est une somme localement finie de tels  $A$  donc la définition reste valide.

Une manière un peu plus intrinsèque de faire apparaître un tel objet est de tester la distribution  $A$  par une “onde”  $e^{-i\rho h}$  où  $h$  est une phase telle que l'espace tangent à  $\{(x, dh(x))\}$  soit une lagrangienne  $L$  transverse simultanément à  $T_{(x_0, \xi_0)}^*\Lambda$  et à l'espace tangent à la fibre verticale  $T_{x_0}^*M$  – qu'on note  $F_{x_0}$ . (il en existe, voir le lemme 3.5). Utilisant la formule de la phase stationnaire pour  $\rho \rightarrow \infty$ , on obtient un terme principal (i.e. modulo  $O(\rho^{m+n/4-1})$ ) qui, transporté de  $C_\varphi$  à  $\Lambda$ , est un terme  $p$  égal à  $\alpha$  à multiplication par une constante près. Cette constante est de la forme :

$$e^{i\frac{\pi}{4}s_L} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_\varphi}$$

et on vérifie que  $e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_\varphi}\alpha$  ne dépend plus de la fonction de phase  $\varphi$ .  $s_L$  est ici la signature d'une certaine forme quadratique mesurant la position relative de  $L$  par rapport à  $T_{(x_0, \xi_0)}^*\Lambda$  et  $F_{x_0}$ . Si  $L'$  est une autre telle lagrangienne, la différence  $s_L - s_{L'}$  est 2 fois un entier  $s(F_{x_0}, T_{(x_0, \xi_0)}^*\Lambda, L, L')$  appelé indice d'Hörmander.

Le terme  $p$  obtenu – laissant maintenant varier  $(x, \xi)$  – est donc vu comme une section de  $\Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L}$  où  $\mathbb{L}$  est le fibré en lignes des fonctions  $f$  définies sur l'espace des lagrangiennes transverses simultanément à  $T_{(x_0, \xi_0)}^*\Lambda$  et  $F_{x_0}$  et vérifiant

$$f(L) = i^{s(F_{x_0}, T_{(x_0, \xi_0)}^*\Lambda, L, L')} f(L'),$$

appelé le fibré de **Keller-Maslov**.

On fait donc la définition suivante :

**Définition 4.3** *la classe de  $p$  dans*

$$S^{m+n/4}(\Lambda, \Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L})/S^{m+n/4-1}(\Lambda, \Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L})$$

est appelée le **symbole principal** de l'intégrale de Fourier  $A \in S^m(M, \Lambda)$ , et on le note  $\sigma(A)$ .

Il contient toute l'information "d'ordre  $m$ " de  $A$ , puisqu'on a [voir Treves, chapitre VIII, théo.4.1] ou [Duistermaat, théo.4.2.1] :

**Théorème 4.1** *L'application  $A \mapsto \sigma(A)$  est une bijection de  $I^m(M, \Lambda)/I^{m-1}(M, \Lambda)$  sur  $S^{m+n/4}(\Lambda, \Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L})/S^{m+n/4-1}(\Lambda, \Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L})$*

#### 4.4 opérateurs intégraux de Fourier

On considère maintenant le cas où  $M = X \times Y$ . Rappelons le résultat suivant (Schwartz):

**Théorème 4.2** *Soit  $T$  un opérateur continu  $C_0^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ . Alors il existe une unique distribution  $K_T \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ , appelée noyau de Schwartz de  $T$ , telle que*

$$\langle T\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle K_T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle$$

pour toutes  $\varphi_1 \in C_0^\infty(Y)$ ,  $\varphi_2 \in C_0^\infty(X)$ .

On a le même résultat pour les densités distributions d'ordre  $1/2$ .

**Définition 4.4** *Un opérateur  $A : C_0^\infty(Y, \Omega_{\frac{1}{2}}) \rightarrow \mathcal{D}'(X, \Omega_{\frac{1}{2}})$  est appelé **opérateur intégral de Fourier** d'ordre  $m$  si son noyau de Schwartz  $K_A \in \mathcal{D}'(X \times Y, \Omega_{\frac{1}{2}})$  appartient à  $I^m(X \times Y, \Lambda)$  pour une certaine sous-variété lagrangienne conique  $\Lambda$  de  $T^*(X \times Y) \setminus \{0\}$ .*

On retrouve localement la forme annoncée en introduction.

On a en outre le résultat :

**Théorème 4.3** *Soit  $\Lambda$  une lagrangienne conique de  $T^*X \setminus \{0\} \times T^*Y \setminus \{0\}$ . Alors tout opérateur intégral de Fourier porté par  $\Lambda$  s'étend en un opérateur continu de  $\mathcal{E}'(Y)$  dans  $\mathcal{D}'(X)$ .*

Voir [Treves, chapitre VIII, théo.5.1]

*Remarque:* le "décalage" de  $\dim M/4$  observé au paragraphe précédent dans les degrés des fonctions est là pour assurer la cohérence avec les opérateurs intégraux de Fourier définis par une transformation canonique et en particulier les opérateurs pseudo-différentiels (voir le paragraphe suivant), pour lesquels  $M = X \times X$ . On a l'habitude de choisir alors une semi-densité unité sur  $X$ ; divisant par celle-ci on obtient un symbole principal  $\sigma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(K_A)$  défini dans

$$S^m(\Lambda, \mathbb{L})/S^{m-1}(\Lambda, \mathbb{L}).$$

## 4.5 transformations canoniques

On va s'intéresser particulièrement aux opérateurs intégraux de Fourier portés par une lagrangienne conique  $\Lambda = \tilde{C}$ , où  $C$  est le graphe d'une transformation canonique homogène  $T^*Y \rightarrow T^*X$ , et  $\sim$  est l'application de  $T^*X \times T^*Y$  dans lui-même :  $(x, \xi, y, \eta) \mapsto (x, \xi, y, -\eta)$ . (Autrement dit  $C$  est une lagrangienne dans  $T^*X \times \overline{T^*Y}$ ). (voir section 3.2)

On note  $I^m(X, Y; C)$  l'ensemble de ces opérateurs intégraux de Fourier. Remarquons que d'habitude, cette notation comprend aussi le cas général où  $C$  est une relation canonique homogène (voir [Duistermaat, p137]).

*Exemples:*

- Si  $C$  est le graphe de l'identité, c'est-à-dire  $X = Y$  et  $C$  est la diagonale de  $X \times X$ , on a une trivialisatoin naturelle de  $\Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L}$  en prenant  $\sigma(id)$  comme section unité. On trouve alors des opérateurs du type :

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\theta} \sigma_P(x, \theta) \mathcal{F}u(\theta) d\theta,$$

autrement dit des opérateurs pseudo-différentiels ;  $\sigma_P = e^{-ix.\theta} P(e^{i.\theta})$  est appelé le *symbole* (complet) de  $P$ .

- Si la transformation canonique  $\chi$  est induite par un difféomorphisme  $g$  de  $X$  sur  $Y$ , on a dans chaque carte locale une phase évidente  $\varphi(x, y, \theta) = \langle g(x) - y, \theta \rangle$ . Si en outre l'amplitude est constante (prenons  $(2\pi)^{-n}$ ), on obtient un opérateur qui s'écrit dans toute carte locale :

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i\langle g(x) - y, \theta \rangle} u(y) dy d\theta = \mathcal{F}_{g(x)}^{-1} \mathcal{F}_\theta u = u(g(x))$$

Soit  $P = g^*$ .



Revenons à l'exemple du tore ( $X = Y = \mathbb{T}^2$ ); on est maintenant en mesure de définir précisément la construction annoncée dans l'introduction: Soit  $g$  un difféomorphisme de contact du fibré en sphères  $S^*(\mathbb{T}^2)$ . Quitte à le composer par  $(-I_2 \oplus 1)$ , il satisfait à la proposition (3.2), et on le voit naturellement comme une transformation canonique homogène  $g_!$  de  $T^*\mathbb{T}^2 \setminus \{0\}$  par  $g_!(x, \xi) = \rho(x, \xi/|\xi|)|\xi|g(x, \xi/|\xi|)$ . (voir section 3.1) Soit  $\Lambda = \text{Graphe}(g_!)$ .

La classe  $I_g(\mathbb{T}^2)$  d'opérateurs considérée est alors celle des opérateurs intégraux de Fourier portés par  $\Lambda$  et de symbole strictement positif. (ce qui n'a de sens qu'une fois choisie une trivialisatoin de  $\Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L}$  (elle est toujours possible, voir

[Duistermaat, lemme 4.1.3]). Mais bien-sûr, les résultats suivants – et en particulier les problèmes d’indices – ne dépendent pas de la trivialisat on choisie.)

Ainsi par exemple si  $g = \text{Gray}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ , on sait qu’il existe une fonction

de phase globale  $\varphi(x, y, \theta) = (x - y).\theta + h(\theta).\theta$ . Le fibré de Keller-Maslov est donc trivial, et

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i[(x-y).\theta + h(\theta).\theta]} d\theta dx \in I_g(\mathbb{T}^2)$$

## 4.6 composition propre et continuité

On va utiliser le résultat suivant: soient  $X, Y, Z$  des variétés différentielles;  $C_1$  et  $C_2$  les graphes de transformations canoniques de (respectivement)  $T^*Y \setminus \{0\} \rightarrow T^*X \setminus \{0\}$  et  $T^*Z \setminus \{0\} \rightarrow T^*Y \setminus \{0\}$ . On note  $C_1 \circ C_2$  le graphe de la transformation canonique composée.

**Théorème 4.4** *Soient  $A_1 \in I^{m_1}(X, Y; C_1)$  et  $A_2 \in I^{m_2}(Y, Z; C_2)$ . Supposons que la projection  $(\text{Supp } K_{A_1} \times K_{A_2}) \cap (X \times \text{diag } Y \times Z) \rightarrow X \times Z$  soit propre et que  $C_1 \times C_2$  intersecte  $T^*X \setminus \{0\} \times \text{diag}(T^*Y \setminus \{0\}) \times T^*Z \setminus \{0\}$  transversalement.*

*Alors le produit de  $A_1$  et  $A_2$  est bien défini et on a :*

$$A_1 \circ A_2 \in I^{m_1+m_2}(X, Z; C_1 \circ C_2).$$

Enfin si on considère  $\sigma(A_1)$  et  $\sigma(A_2)$  comme éléments de  $I^{m_1}(\tilde{C}_1, \mathbb{L})$  et  $I^{m_2}(\tilde{C}_2, \mathbb{L})$ , alors

$$\sigma(A_1 \circ A_2) = \sigma(A_1)\sigma(A_2) \in S^{m_1+m_2}(C_1 \tilde{\circ} C_2, \mathbb{L})/S^{m_1+m_2-1}(C_1 \tilde{\circ} C_2, \mathbb{L}).$$

L’espace  $C^\infty(X, \Omega_{\frac{1}{2}})$  est muni de sa structure  $L_{loc}^2$  hermitienne. Si on écrit la représentation locale d’un opérateur intégral de Fourier  $A \in I^m(X, Y; C)$ , on obtient immédiatement :

**Théorème 4.5** *Si  $A \in I^m(X, Y; C)$  alors  $A^* \in I^m(Y, X; C^{-1})$  et  $\sigma(A^*)(y, x, \eta, \xi) = \overline{\sigma(A)(x, y, \xi, \eta)}$ .* ◇

Abordons maintenant l’aspect fonctionnel de ces opérateurs.

**Lemme 4.6** *Un opérateur pseudo-différentiel sur  $X$  d’ordre 0 est un opérateur continu*

$$L_c^2(X, \Omega_{\frac{1}{2}}) \rightarrow L_{loc}^2(X, \Omega_{\frac{1}{2}})$$

**Démonstration:** Soit  $P$  un tel opérateur pseudo-différentiel .  $\forall u \in C_0^\infty(X, \Omega_{\frac{1}{2}})$ ,

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \theta} a(x, \theta) \mathcal{F}u(\theta) d\theta,$$

où  $a(x, \theta)$  est bornée quand  $|\theta| \rightarrow \infty$ . Pour toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(X)$ ,  $\int |\varphi Pu|^2 \leq \int |\varphi|^2 |a|^2 \int |\mathcal{F}u|^2 = \int |\varphi|^2 |a|^2 \int |u|^2$  d'après l'égalité de Parseval.  $\diamond$

**Théorème 4.7**  $\forall s \in \mathbb{R}$ , tout opérateur intégral de Fourier  $F \in I^m(X, Y; C)$  définit un opérateur continu des espaces de Sobolev

$$H^s(Y; \Omega_{\frac{1}{2}}) \rightarrow H_{loc}^{s-m}(X; \Omega_{\frac{1}{2}})$$

Ceci justifie l'appellation "d'ordre  $m$ " pour de tels opérateurs.

**Démonstration:** (abrégée) Soient  $P$  et  $Q$  des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques (i.e. de symbole jamais nul) d'ordre respectifs  $s-m$  et  $-s$  sur respectivement  $X$  et  $Y$ . Alors  $PFQ \in I^0(X, Y; C)$  et donc  $Q^*F^*P^*PFQ$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 sur  $Y$ , donc, comme pour le lemme précédent,  $PFQ$  est  $L^2$  - continu.  $P$  et  $Q$  étant inversibles, on en déduit le résultat.  $\diamond$

## 5 Opérateurs avec indices

### 5.1 opérateurs de Fredholm

Soient  $H$  et  $H'$  deux espaces de Hilbert. On note  $\mathcal{B}(H, H')$  l'algèbre de Banach des opérateurs bornés de  $H$  dans  $H'$ . On pourra noter  $\mathcal{B}(H)$  pour  $\mathcal{B}(H, H)$ . Pour une présentation plus détaillée de la théorie des opérateurs de Fredholm, voir [Palais] ou [Booss]. Pour les résultats d'analyse fonctionnelle utilisés ici sans commentaire, voir par exemple [Brezis] ou [Palais].

**Définition 5.1** *On dit que  $F \in \mathcal{B}(H, H')$  est un opérateur de **Fredholm** si son noyau et son conoyau (Coker  $F = H/\text{Im } F$ ) sont de dimensions finies. On note  $\mathcal{F}(H, H')$  l'ensemble des opérateurs de Fredholm de  $H$  dans  $H'$ .*

**Définition 5.2** *On appelle **indice** d'un opérateur de Fredholm  $F$  l'entier:*

$$\text{Ind } F = \dim \ker F - \dim \text{Coker } F$$

Comme  $\text{Im } F$  est de codimension finie donc fermée [voir Booss], on a  $\text{Im } F = (\ker F^*)^\perp$ , où  $F^*$  désigne l'adjoint de  $F$ , défini ici par la structure hilbertienne de  $H$ .  $F^* \in \mathcal{B}(H', H)$  est donc un opérateur de Fredholm, et on a :

$$\text{Ind } F = \dim \ker F - \dim \ker F^*$$

L'indice d'un opérateur auto-adjoint est donc toujours nul. D'autre part si  $F$  est un opérateur de Fredholm et  $G$  est inversible,  $FG$  (ou  $GF$ ) est bien-sûr un opérateur de Fredholm de même indice.

On note  $\mathcal{K}(H, H')$  l'ensemble des opérateurs compacts de  $H$  dans  $H'$ . Rappelons que  $\mathcal{K}(H, H')$  est l'adhérence dans  $\mathcal{B}(H, H')$  des opérateurs de rang fini, et que  $\mathcal{K}(H, H')$  est un  $\mathcal{B}(H, H) - \mathcal{B}(H', H')$ -bimodule, c'est-à-dire que si  $P \in \mathcal{B}(H, H)$ ,  $P' \in \mathcal{B}(H', H')$ ,  $F \in \mathcal{F}(H, H')$ , alors  $FP$  et  $P'F$  sont encore dans  $\mathcal{F}(H, H')$ . Enfin si  $K \in \mathcal{K}(H, H')$ , alors  $K^* \in \mathcal{K}(H', H)$ . En particulier,  $\mathcal{K}(H)$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{B}(H)$ , invariant par conjugaison (i.e passage à l'adjoint). En général, on verra ces opérateurs comme des quantités "négligeables" par rapport aux opérateurs de Fredholm, comme le montrent les théorèmes suivants.

**Théorème 5.1 (Riesz)** *Pour tout opérateur compact  $K \in \mathcal{K}(H)$ ,  $id + K$  est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

**Démonstration:** Soit  $Q$  un opérateur de rang fini tel que  $\|Q - K\| < 1$ . Alors  $id + (K - Q)$  est inversible dans l'algèbre de Banach  $\mathcal{B}(H, H)$ . Enfin

$$id + K = (id + K - Q)(id + (id + K - Q)^{-1}Q)$$

est le produit d'un opérateur inversible par un opérateur de la forme  $id + R$ , où  $R$  est de rang fini. On peut alors vérifier directement [voir Booss] en écrivant

$R = \sum \langle \cdot, u_i \rangle v_i$  que  $id + R$  est un opérateur de Fredholm d'indice nul. Enfin le résultat découle du fait que si  $T$  est inversible, alors  $TF$  et  $F$  ont même indice.  $\diamond$

On appelle **algèbre de Calkin** l'algèbre de Banach  $\mathcal{B}(H, H')/\mathcal{K}(H, H')$ .

**Théorème 5.2 (Atkinson)** *Soit  $\pi_{H, H'}$  la projection*

$$\pi_{H, H'} : \mathcal{B}(H, H') \rightarrow \mathcal{B}(H, H')/\mathcal{K}(H, H').$$

Alors

$$\mathcal{F}(H, H') = \pi_{H, H'}^{-1}(\mathcal{B}(H, H')/\mathcal{K}(H, H'))^\times$$

Autrement dit un opérateur  $T \in \mathcal{B}(H, H')$  est de Fredholm si et seulement si il existe un opérateur  $S \in \mathcal{B}(H', H)$  et des opérateurs compacts  $K_1 \in \mathcal{K}(H, H)$  et  $K_2 \in \mathcal{K}(H', H')$  tels que

$$ST = id + K_1 \text{ et } TS = id + K_2$$

$S$  est alors appelée une **paramétrix** de  $T$  (et on a automatiquement  $S \in \mathcal{F}(H', H)$ ).

(Pour tout anneau  $A$ ,  $A^\times$  désigne le groupe des éléments inversibles de  $A$ .)

**Démonstration:** Soit  $F \in \mathcal{F}(H, H')$ , et soit  $P$  le projecteur orthogonal sur  $\ker F$  dans  $H$ .  $P$  est donc compact. D'autre part on sait que  $\ker F^*F = \ker F$  et  $\text{Im } F^*F = \text{Im } F^*$ , donc l'opérateur  $F^*F + P$  est bijectif, et donc inversible dans  $\mathcal{B}(H, H)$ . Sa classe modulo  $\mathcal{K}(H, H)$ ,  $\pi_{H, H}(F^*F) = \pi_{H', H}(F^*)\pi_{H, H'}(F)$  est donc inversible dans  $\mathcal{B}(H, H)/\mathcal{K}(H, H)$ . De même en introduisant le projecteur sur  $\ker F^*$  dans  $H'$  on montre que  $\pi_{H, H'}(F)\pi_{H', H}(F^*)$  est inversible dans  $\mathcal{B}(H', H')/\mathcal{K}(H', H')$ , ce qui implique que  $\pi_{H, H'}(F)$  est inversible, et on a l'inclusion " $\subset$ ".

Réciproquement, soit  $T \in \mathcal{B}(H, H')$  tel que  $\pi_{H, H'}(T)$  soit inversible: il existe  $S \in \mathcal{B}(H', H)$  tel que  $ST$  et  $TS$  soient de la forme  $id + K$ , où  $K$  est compact. D'après de théorème de Riesz, ce sont donc des opérateurs de Fredholm. Enfin  $\ker T \subset \ker ST$ , et  $\text{Im } T \supset \text{Im } TS$ , ce qui assure que  $T \in \mathcal{F}(H, H')$ .  $\diamond$

**Corollaire 5.3** •  $\mathcal{F}(H, H')$  est ouvert dans  $\mathcal{B}(H, H')$

- Si  $F$  et  $G$  sont des opérateurs de Fredholm, alors  $FG$  aussi.
- $\mathcal{F}(H, H')$  est stable par addition d'opérateurs compacts.

**Démonstration:** Le premier point découle du fait que  $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$  est ouvert dans  $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ . Pour le deuxième, on vérifie immédiatement que si  $S$  et  $T$  sont des paramétrix respectives de  $F$  et  $G$ , alors  $TS$  est une paramétrix de  $FG$ . Enfin pour le dernier, une paramétrix de  $F$  est aussi une paramétrix de  $F + K$  si  $K$  est compact.  $\diamond$

**Théorème 5.4** • Si  $F$  et  $G$  sont de Fredholm, alors  $\text{Ind } FG = \text{Ind } F + \text{Ind } G$

• Si  $F$  est de Fredholm et  $K$  est compact, alors  $\text{Ind } F + K = \text{Ind } K$

**Démonstration:** Soit  $F \in \mathcal{F}(H', H_2)$  et  $G \in \mathcal{F}(H_1, H')$ . On a les suites exactes :

$$0 \rightarrow \ker G \rightarrow \ker FG \xrightarrow{G} \ker F \cap \text{Im } G \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$0 \rightarrow \text{Im } F / \text{Im } FG \rightarrow H_2 / \text{Im } FG \rightarrow H_2 / \text{Im } F \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$0 \rightarrow \text{Im } G + \ker F \rightarrow H' \xrightarrow{\bar{F}} \text{Im } F / \text{Im } FG \rightarrow 0 \quad (3)$$

et enfin :

$$0 \rightarrow \ker F \cap \text{Im } G \rightarrow \ker F \rightarrow (\text{Im } G + \ker F) / \text{Im } G \rightarrow 0 \quad (4)$$

De la première, on tire  $\dim \ker FG = \dim \ker G + \dim(\ker F \cap \text{Im } G)$ , soit

$$\dim \ker FG = \dim \ker G + \dim \ker F - \dim(\ker F / \ker F \cap \text{Im } G).$$

De la deuxième,  $\dim \text{Coker } FG = \dim \text{Coker } F + \dim(\text{Im } F / \text{Im } FG)$ .

Or d'après la troisième,  $\dim(\text{Im } F / \text{Im } FG) = \dim(H' / (\text{Im } G + \ker F)) = \dim(H' / \text{Im } G) / ((\text{Im } G + \ker F) / \text{Im } G)$ , d'où:

$$\dim \text{Coker } FG = \dim \text{Coker } F + \dim \text{Coker } G - \dim((\text{Im } G + \ker F) / \text{Im } G).$$

Or la dernière dit que  $\dim(\ker F / \ker F \cap \text{Im } G) = \dim((\text{Im } G + \ker F) / \text{Im } G)$ , d'où le premier résultat par soustraction des deux formules isolées.

Enfin pour le dernier point, si  $F \in \mathcal{F}(H, H')$ , on a  $S \in \mathcal{F}(H', H)$  tel que  $FS = id + Q$ , donc  $(F + K)S = id + (Q + KS)$  est d'indice nul d'après le théorème de Riesz. Donc d'après le premier point,  $\text{Ind } (F + K) = -\text{Ind } S = \text{Ind } F$ .  $\diamond$

## 5.2 indices et homotopie

On a vu que  $\mathcal{F}(H, H')$  était ouvert. Une des propriétés fondamentales de l'indice reliée à cela est la suivante:

**Théorème 5.5 (Dieudonné)** La fonction d'indice  $\text{Ind} : \mathcal{F}(H, H') \rightarrow \mathbb{Z}$  est localement constante.



**Démonstration:** Soit  $F \in \mathcal{F}(H, H')$ , et soit  $G$  une paramétrix de  $F$ . Pour tous  $T \in \mathcal{B}(H, H')$  tels que  $\|T\| < \|G\|^{-1}$ ,  $id + TG$  et  $id + GT$  sont inversibles dans respectivement  $\mathcal{B}(H', H')$  et  $\mathcal{B}(H, H)$ . Or

$$(id + GT)^{-1}G(F + T) = (id + GT)^{-1}(id + K + GT) = id + (id + GT)^{-1}K,$$

ce qui montre que  $(id + GT)^{-1}G$  est un inverse à gauche de  $(F + T)$  modulo  $\mathcal{K}(H, H)$ . De la même façon,  $G(id + TG)^{-1}$  en est un inverse à droite modulo  $\mathcal{K}(H', H')$ ; donc d'après le théorème (5.2),  $(F + T) \in \mathcal{F}(H, H')$ .

Enfin d'après le théorème de Riesz,  $\text{Ind } (id + GT)^{-1}G(F + T) = 0$ , ce qui assure, puisque  $(id + GT)^{-1}$  est inversible et donc d'indice nul, que  $\text{Ind } (F + T) = -\text{Ind } G = \text{inf } F$ .  $\diamond$

Ainsi si  $X$  est un espace topologique connexe, et si on note  $[X, \mathcal{F}(H, H')]$  l'ensemble des classes d'homotopies des applications continues de  $X$  dans  $\mathcal{F}(H, H')$  (c'est-à-dire des "familles continues d'opérateurs de Fredholm indexés par  $X$ "), on a une application bien définie:

$$\text{Ind} : [X, \mathcal{F}(H, H')] \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Si  $X$  est compact, on note  $K(X)$  le groupe de Grothendieck associé (différences formelles de classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels sur  $X$ ). On peut construire une application

$$\text{Ind} : [X, \mathcal{F}(H)] \rightarrow K(X)$$

qui coïncide avec l'indice déjà défini si  $X$  est un point. Un théorème d'Atiyah-Jänich montre qu'en fait c'est un *isomorphisme*. [voir par exemple Booss]

Sans aller jusque là regardons le cas où  $X$  est un point  $\{x_0\}$ .  $[x_0, \mathcal{F}(H)]$  est alors l'ensemble des composantes connexes de  $\mathcal{F}(H)$ , et  $K(x_0)$  s'identifie à  $\mathbb{Z}$  par l'isomorphisme

$$K(x_0) \ni [E] \rightarrow \dim(E_{x_0}) \in \mathbb{Z}.$$

**Théorème 5.6** *L'application d'indice  $\text{Ind} : [x_0, \mathcal{F}(H)] \rightarrow \mathbb{Z}$  est un isomorphisme de groupes.*

(la loi à gauche est bien sûr la composition des opérateurs)

On va utiliser le résultat suivant:

**Théorème 5.7** *Le groupe  $(\mathcal{B}(H))^\times$  des opérateurs linéaires continus inversibles sur un espace de Hilbert  $H$  est connexe par arc.*

**Démonstration:** On utilise fortement la structure d'espace de Hilbert; soit  $R \in (\mathcal{B}(H))^\times$ . On écrit la décomposition polaire  $R = US$  où  $U$  est unitaire et  $S = \sqrt{R^*R}$  est défini positif. En outre on a pour  $U$  la décomposition spectrale  $U = e^{iA}$ , où  $A$  est auto-adjoint. On note  $\{S_t\}$  pour  $t \in [0, 1]$  le segment de l'identité à  $S$  et  $U_t = e^{itA}$ . Alors  $U_t S_t$  est un chemin dans  $(\mathcal{B}(H))^\times$  reliant  $R$  à

l'identité.  $\diamond$

**Démonstration:** (du théorème (5.6)) On note  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble des opérateurs de Fredholm d'indice  $n \in \mathbb{Z}$ . Soit  $P \in \mathcal{F}_0$ . Alors  $\ker P$  et  $(\operatorname{Im} P)^\perp$  sont deux sous-espaces de dimension finie isomorphes. Soit  $f$  un isomorphisme de  $\ker P$  sur  $(\operatorname{Im} P)^\perp$ , et soit  $R$  l'opérateur  $f$  composé avec la projection orthogonale sur  $\ker P$ , i.e.  $R = \begin{cases} f & \text{sur } \ker P \\ 0 & \text{sur } (\ker P)^\perp \end{cases}$ .  $R$  est de rang fini donc compact, et donc pour tous  $t \in [0, 1]$ ,  $P + tR \in \mathcal{F}_0$ ; donc  $P$  est homotope à  $P + R$  dans  $\mathcal{F}_0$ . Or  $P + R$  est inversible par construction, donc homotope à l'identité dans  $\mathcal{B}^\times \subset \mathcal{F}_0$ , d'après le théorème précédent. Finalement  $P$  est homotope à l'identité dans  $\mathcal{F}_0$ , et donc  $\mathcal{F}_0$  est connexe par arcs.

Soit  $D^+$  l'opérateur de décalage à droite sur une base de Hilbert choisie au préalable. Son indice est bien-sûr  $-1$  et il admet comme paramétrix le décalage à gauche  $D^-$ . En outre pour tout opérateur compact  $R$  et tout  $P \in \mathcal{F}_n$ ,  $P + R$  et  $P$  sont homotopes dans  $\mathcal{F}_n$ , donc  $(D^+, D^-)$  réalisent une équivalence homotopique entre  $\mathcal{F}_0$  et  $\mathcal{F}_{-1}$ , et  $\mathcal{F}_{-1}$  est aussi connexe par arcs. Le même argument avec  $(D^\pm)^n$  montre qu'enfin tous les  $\mathcal{F}_n$  sont connexes par arcs, ce qui prouve – en utilisant bien sûr le théorème (5.5) – que l'indice est bien un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{Z}$ .  $\diamond$

### 5.3 indices des difféomorphismes de contact de $\mathbb{T}^3$

Rappelons qu'à tout difféomorphisme de contact  $g$  on a associé en section (4.5) une classe d'opérateurs intégraux de Fourier  $I_g(\mathbb{T}^2)$ . Installons donc les opérateurs intégraux de Fourier dans le cadre des opérateurs de Fredholm.

Soient  $X, Y$  des variétés différentielles compactes et  $C$  de graphe d'une transformation canonique homogène de  $T^*Y \setminus \{0\}$  dans  $T^*X \setminus \{0\}$ . D'après le théorème (4.7), on sait que pour tout réel  $s$ ,

$$I^m(X, Y; C) \subset \mathcal{B}(H^s(Y, \Omega_{\frac{1}{2}}), H^{s-m}(X, \Omega_{\frac{1}{2}}))$$

**Définition 5.3** On dit que  $A \in I^m(X, Y; C)$  est elliptique (d'ordre  $m$ ) si  $\forall (x_0, \xi_0) \in \tilde{C}$ ,  $\exists \rho > 0$ ,  $K > 0$ ,

$$\left| \frac{\sigma(A)(x, \xi)}{|\xi|^m} \right| > K$$

pour tous  $(x, \xi)$  dans un voisinage conique de  $(x_0, \xi_0)$ ,  $|\xi| > \rho$ .

**Théorème 5.8** Tout opérateur intégral de Fourier  $A \in I^m(X, Y; C)$  elliptique est un opérateur de Fredholm de  $L^2$  dans  $H^{-m}$ .

**Démonstration:**  $A^*A$  est un opérateur pseudo-différentiel elliptique sur  $Y$  donc son symbole principal  $\alpha$  est inversible. Il existe un opérateur pseudo-différentiel  $B$  sur  $Y$  de symbole principal  $\beta = \alpha^{-1}$ . Alors  $BA^*A = I + R$  où  $R$  est un

opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 et de symbole principal nul. D'après le théorème (4.1),  $R$  est d'ordre  $-1$ ; c'est donc un opérateur continu de  $L^2$  dans  $H^1$ . Or l'injection de Sobolev  $H^1(Y) \subset H^0(Y)$  est compacte, donc  $R$  est un opérateur compact de  $L^2$  dans  $L^2$ . On raisonne de même à droite de  $A$ , d'où le résultat, par le théorème (5.2).  $\diamond$



Appliquons ceci au cas du tore.

**Proposition 5.9** *Soit  $g$  un difféomorphisme de contact de  $\mathbb{T}^3$ . Tous les éléments de  $I_g(\mathbb{T}^2)$  sont des opérateurs de Fredholm de même indice.*

**Démonstration:** Ils sont de Fredholm car elliptiques par définition. D'autre part toute fonction strictement positive est isotope à la constante 1, donc tous les éléments de  $I_g(\mathbb{T}^2)$  sont isotopes à celui dont le symbole principal est 1 (dans la trivialisaton de  $\Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L}$  choisie, bien-sûr) et donc ont même indice par le théorème (5.5).  $\diamond$

**Définition 5.4** *Pour tout difféomorphisme de contact  $g$ , on appelle **indice de  $g$**  et on note  $\text{Ind } g$  l'indice commun de tous les éléments de la classe  $I_g(\mathbb{T}^2)$*

**Problème 5.1** *Calculer l'indice de Gray  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , où  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .*

D'après le problème (3.1), il s'agit de calculer l'indice de l'opérateur intégral de Fourier

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i[(x-y).\theta + H(\theta)]} u(y) dy d\theta$$

où  $H(\theta) = h(\theta).\theta$  est homogène de degré 1. Pour tout  $v \in C_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ , on a

$$\langle Pu, v \rangle = \int \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i[(x-y).\theta + H(\theta)]} u(y) \overline{v(x)} dy d\theta dx = \langle u, P^*v \rangle$$

donc

$$\overline{P^*v(x)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i[(y-x).\theta + H(\theta)]} \overline{v(y)} d\theta dy$$

Pour toute fonction  $v$ , on note  $\check{v}$  la fonction  $x \mapsto v(-x)$ . On a alors

$$\overline{\check{P^*v}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i[x.\theta + H(\theta)]} \mathcal{F}(\check{v})(-\theta) d\theta$$

Or  $\mathcal{F}(\check{v}) = (-1)^2 \mathcal{F}(\check{v})$  donc

$$\overline{P^*v} = P(\check{v})$$

Les opérations d'antipodie et de conjugaison complexe étant des isomorphismes de  $L^2(\mathbb{T}^2)$ , on en déduit que  $\ker P$  et  $\ker P^*$  sont isomorphes, et donc que

$$\text{Ind } P = 0. \diamond$$

Que peut-on dire maintenant de l'indice d'un difféomorphisme de contact quelconque ? Notons tout d'abord deux points fondamentaux, qui vont nous permettre (sous réserve d'une hypothèse supplémentaire) de nous restreindre à l'étude des difféomorphismes obtenus comme Gray ( $f$ ),  $f \in GL(3, \mathbb{Z})$ .

1. Si  $g$  et  $g'$  sont des difféomorphismes de contact,  $P \in I_g$  et  $P' \in I_{g'}$ , alors  $PP' \in I_{gg'}$  donc

$$\text{Ind } gg' = \text{Ind } g + \text{Ind } g' \quad (1)$$

2. Si  $g_t$  est une isotopie de difféomorphismes de contact, alors il est relativement clair que  $g_t$  induit une homotopie d'opérateurs  $P_t \in I_{g_t}$ . Donc, d'après le théorème (5.5),

$$\text{Ind } g_0 = \text{Ind } g_1 \quad (2)$$

Réglons maintenant le cas des difféomorphismes de contact de la forme Gray ( $f$ ), où  $f \in SL(3, \mathbb{Z})$  s'écrit  $f = A \oplus 1$ ,  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ . Soit donc  $g = \text{Gray}(f)$ ; d'après le lemme (2.1),  $g$  est de la forme  $g(\theta, \varphi, \lambda) = (A(\theta, \varphi), h(\theta, \varphi, \lambda))$  et donc  $g_t$  est de la forme  $g_t(x, \xi) = (A(x), \dot{h}(x, \xi))$ , ce qui nous assure, d'après le lemme (3.3), que  $g_t$  est la transformation canonique sur  $T^*X$  induite par  $A$ , i.e.  $d^*A$ . On sait alors (voir section 4.5, deuxième exemple) que  $A^* \in I_g$ . Comme  $A^*$  est un opérateur inversible, il est d'indice nul, et donc

$$\text{Ind}(\text{Gray}(A \oplus 1)) = 0. \quad (3)$$

On a vu d'autre part que  $g = f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  est un difféomorphisme de contact; la même méthode s'applique à ce  $g$  et on a:

$$\text{Ind } f_0 = 0 \quad (4)$$

On sait que Gray ( $f$ ) est toujours isotope à  $f$ . En général, étant donné un difféomorphisme  $g$ , peut-on toujours trouver un  $f \in GL(3, \mathbb{Z})$  tel que  $g$  soit isotope à  $f$  ? Remarquons que si  $g$  est isotope à  $f$ , alors leurs actions respectives sur l'homologie de  $\mathbb{T}^3$ :  $H_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3$  sont nécessairement identiques. Le problème est donc de savoir si les classes d'isotopies des difféomorphismes de  $\mathbb{T}^3$  sont exactement données par leur action sur  $H_1(\mathbb{T}^3)$ . La réponse est positive, et peut être formulée ainsi:

**Théorème 5.10** *Soit  $g$  un difféomorphisme de  $S^*\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^3$ . Alors  $g$  est isotope à l'identité si et seulement si son action sur le groupe d'homologie  $H_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3$  est l'identité de  $GL(3, \mathbb{Z})$ .*

On ne va pas démontrer ici ce théorème. Mentionnons malgré tout qu'il y a deux étapes à considérer : la première est que tout difféomorphisme dont l'action sur  $H_1$  est l'identité est *homotope* à l'identité. C'est un résultat qui se généralise assez facilement à une large classe de variétés, pourvu que l'homotopie soit assez simple. [voir par exemple Spanier] La deuxième est bien plus spécifique à la dimension 3 et consiste à montrer que toute *homotopie* de difféomorphismes du tore  $\mathbb{T}^3$  peut être réalisée comme *isotopie*. Le cas du tore est – relativement – simple, mais le résultat est aussi valable pour toute variété de dimension 3 “suffisamment grande” et “ $\mathbb{P}^2$ -irréductible”. (voir [Laudenbach] pour les définitions et la démonstration)

D'autre part on a mentionné à la fin de la section (1.3) que les formes de contact  $\alpha$  et  $f^*\alpha$  pour  $f \in GL(3, \mathbb{Z})$  étaient isotopes dans l'espace des formes de contact si et seulement si  $f \in SL(3, \mathbb{Z})$  et  $f$  stabilisait  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ . Or d'après le théorème de Gray, cela implique l'existence d'une isotopie  $(fg_t)$  de  $f$  à un difféomorphisme de contact  $fg_1$ . Réciproquement toute isotopie  $(g_t)$  de  $f$  à un difféomorphisme de contact  $g$  définit une isotopie de formes de contact  $(g_t^*\alpha)$  de  $f^*\alpha$  à  $u\alpha$  ( $u \in \mathbb{R}^*$ ). Mais  $u\alpha$  est toujours isotope comme forme de contact à  $\alpha$  (si  $u > 0$  c'est évident sinon on utilise

**Lemme 5.11**  *$\alpha$  et  $-\alpha$  sont isotopes comme formes de contact.*

**Démonstration:**  $-\alpha = ((-I_2) \oplus 1)^*\alpha$ ; il suffit donc d'appliquer la proposition (1.8). Ou encore, plus directement, pour tous  $t \in [0, 1]$ , la translation  $\tau_t : (\theta, \varphi, \lambda) \mapsto (\theta, \varphi, \lambda + \pi t)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^3$ , et  $\tau_t^*\alpha$  est une isotopie qui convient, puisque  $\tau_1^*\alpha = -\alpha$ .  $\diamond$

On peut donc formuler le théorème suivant [voir Eliashberg]

**Théorème 5.12**  *$f \in GL(3, \mathbb{Z})$  est isotope à un difféomorphisme de contact de  $\mathbb{T}^3$  si et seulement si  $f \in SL(3, \mathbb{Z})$  et  $f$  stabilise  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ .*

En combinant les théorèmes (5.10) et (5.12) on a ainsi classifié tous les difféomorphismes de contact de  $\mathbb{T}^3$  à isotopie près : une classe d'isotopie est exactement

donnée par un élément du stabilisateur de  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$  dans  $SL(3, \mathbb{Z})$ . Pour toute telle matrice  $f$ , mais qui ne satisfait pas aux conditions de la proposition (1.7), on note Gray  $f$  un difféomorphisme de contact quelconque isotope à  $f$  (qui n'est donc maintenant défini qu'à isotopie près).

Pour pouvoir conclure notre problème d'indice, une hypothèse supplémentaire est néanmoins nécessaire. En effet il n'est pas certain qu'une isotopie entre deux difféomorphismes de contact donne lieu à une homotopie des opérateurs intégraux de Fourier correspondants (et donc à un indice constant pour tous ces opérateurs). Pour que tel soit le cas on va *supposer* le théorème suivant :

**Théorème 5.13** (supposé) *Soit  $g$  un difféomorphisme de contact de  $\mathbb{T}^3$  isotope à l'identité. Alors cette isotopie peut être réalisée comme isotopie de difféomorphismes de contacts.*

Modulo ce résultat, notre problème initial se trouve entièrement résolu :

**Théorème 5.14** (admettant le théorème (5.13))

*Tous les difféomorphismes de contact de  $\mathbb{T}^3$  ont un indice nul.*

**Démonstration:** Soit  $g$  un difféomorphisme de contact de  $\mathbb{T}^3$ , et soit  $[g]$  son action sur l'homologie. D'après le théorème (5.12),  $[g]$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$ , où  $\epsilon = \pm 1$ . Supposons d'abord que  $\epsilon = 1$ . Soit  $g_A = \text{Gray}(A \oplus 1)$ , et  $g_X = \text{Gray}\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $g_X^{-1}g_A^{-1}g$  est isotope à l'identité, et donc, d'après le théorème (5.13), il existe une isotopie de difféomorphismes de contact  $(g_t)$  le reliant à l'identité. D'après (2),  $\text{Ind } g_X^{-1}g_A^{-1}g = 0$ . D'où, d'après (1),

$$\text{Ind } g = \text{Ind } g_X + \text{Ind } g_A.$$

Or selon le problème (5.1),  $\text{Ind } g_X = 0$  et d'après (3),  $\text{Ind } g_A = 0$ .  $g$  est donc bien d'indice nul.

Supposons maintenant que  $\epsilon = -1$ . Soit  $g' = f_0g$ . Comme, d'après (4),  $\text{Ind } f_0 = 0$ , les mêmes arguments montrent que  $\text{Ind } g' = \text{Ind } f_0 + \text{Ind } g = \text{Ind } g$ . Or  $g'$  est de la forme du cas précédent (son  $\epsilon$  est 1), donc  $\text{Ind } g' = 0$ .  $\diamond$

## References

- [MOSER, J.] *On the volume elements on a manifold*, trans. AMS 120 (1965) p286-294.
- [BATES, S. & WEINSTEIN, A.] *Lectures on Geometric Quantization*, notes des cours donnés à l'IHP, Paris (1994), à paraître.
- [ELIASBERG, Y. & POLTEROVICH, L.] *New applications of Luttinger Surgery*, Stanford (1994 ?) prépublication donnée par l'auteur. (publié ?)
- [ARNOLD, V.I.] *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Éditions Mir, Moscou (1976)
- [LEBEAU, G.] *Analyse microlocale analytique*, cours donné à l'ENS, Paris (1994). Non publié.
- [DUISTERMAAT, J.J.] *Fourier Integral Operators*, Courant Institute, NYU, New-York (1973).
- [TREVES, F. 1,2] *Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators*, volumes I et II, Plenum Press, New-York (1980).
- [HÖRMANDER, L. 0] *Fourier integral operators, I*, Acta Math. 127 (1971), p.79-183.
- [HÖRMANDER, L. 1,2,3,4] *The analysis of linear partial differential operators*, volumes 1-4, Springer-Verlag, New-York (1983-90).
- [PALAIS, R.S., ATIYAH, M.F., & al.] *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Annals of math. studies 57, Princeton University Press (1965)
- [BOOSS, B. & BLEECKER, D.D.] *the Atiyah-Singer index formula and gauge-theoretic physics*, Universitext, Springer (1985)
- [BREZIS, H.] *Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications*, Masson, Paris (1983).
- [SPANIER, E.H.] *Algebraic topology*, McGraw-Hill series in higher mathematics (1966).
- [LAUDENBACH, F.] *Topologie de la dimension trois : homotopie et isotopie*, Astérisque 12, SMF, Paris (1974)