Quelques calculs explicites de la Série de Poincaré de l'Espace des Germes d'Arcs Réels tracés sur un Ensemble Semi-Algébrique

Ronan Quarez

IMR (CNRS, URA 305), Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu

35042 Rennes Cedex, France

e-mail : quarez@maths.univ-rennes1.fr

21 décembre 1999

Résumé

Dans [Qz], on a défini l'espace des germes d'arcs réels tracés sur un semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$, analogue réel de la théorie développée par Denef et Loeser concernant l'espace des germes d'arcs tracés sur une variété algébrique complexe. Nous savons que la série de Poincaré associée à un semi-algébrique est une fraction rationnelle. L'objet de ce travail est d'en donner un calcul explicite dans quelques cas particuliers.

Classification mathématique : 14Gxx (14Pxx)

Introduction

Dans [DL], Denef et Loeser considèrent l'anneau de Grothendieck $\mathcal{M}$ des variétés algébriques sur un corps k de caractéristique nulle (que nous prendrons égal à $\mathbb{C}$ pour fixer les idées). L'anneau $\mathcal{M}$ est engendré par les symboles $[V]$ où S est une variété algébrique sur $\mathbb{C}$; il vérifie les relations $[V]=[V']$ si V est isomorphe à V', $[V]=[V\setminus V']+[V']$ si V' est une sous-variété fermée de V, et $[V\times V']=[V]\times[V']$.

Ils définissent ensuite $\mathfrak{L}(V)$, l'espace des arcs tracés sur la variété algébrique V. Si V est affine, un élément de $\mathfrak{L}(V)$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[V]\to\mathbb{C}[[t]]$ avec $\mathbb{C}[V]$ l'anneau de coordonnées de V. De même, est définit $\mathfrak{L}_n(V)$, l'espace des arcs tronqués à l'ordre n tracés sur V, par l'ensemble des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[V]\to\mathbb{C}[[t]]/t^{n+1}\mathbb{C}[[t]]$. On dispose alors d'un morphisme de troncation canonique $\pi_n:\mathfrak{L}(V)\to\mathfrak{L}_n(V)$.

Ce fut J. Nash ([Na]) qui, le premier, étudia les ensembles constructibles $\pi_n(\mathfrak{L}(V))$ en relation avec la résolution des singularités d'Hironaka. Citons aussi sur le sujet, les travaux de [LJ] et [Hi].

Le résultat fondamental de [DL] donne que $P_V(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\pi_n(\mathfrak{L}(V))]T^n$ est une fraction rationelle dans l'anneau $\mathcal{M}[[T]]$ où l'on a inversé $[\mathbb{C}[X]]$. La démonstration utilise deux outils essentiels : l'élimination des quantificateurs pour les ensembles semi-algébriques définis au dessus des séries formelles, résultat du à [Pa] ; ainsi que l'intégration motivique sur l'espace des arcs, s'inspirant d'une idée due à Kontsevitch.

Dans [Qz], nous définissons l'analogue *réel* de cette théorie. On peut remarquer que si on prend pour $\mathcal{M}$ l'anneau de Grothendieck engendré par les symboles $[S]$ de semi-algébriques S sur $\mathbb{R}$, alors les relations précédentes impliquent que $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$ et $[.]$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré (en prenant la bonne définition !).

Dans la section 1, on donne la définition de $\mathfrak{L}(S)$, l'espace des arcs réels tracés sur un semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$. Puis, en sections 2 et 3, on introduit l'analogue réel du langage de Pas, rappelant les propriétés de base ainsi que leur démonstration pour le confort du lecteur.

Puis, dans la section 4, nous nous intéressons à la série de Poincaré $P_S(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\pi_n(\mathfrak{L}(S))]T^n$ d'un ensemble semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$. Dans [Qz] il est montré que cette série est toujours une fraction rationelle, la méthode reprenant celle de [DL, Th. 5.1]. Cependant comme on utilise l'outil de désingularisation, sa détermination n'est pas vraiment explicite.

C'est pourquoi, dans cet article, nous étudions, "à la main", la rationalité de la série de Poincaré pour certaines classes de semi-algébriques S. Nous montrons comment la calculer lorsque S est une courbe algébrique réelle, un ensemble semi-linéaire ou encore lorsque S est donné par une équation binomiale.

Je remercie Michel Coste pour m'avoir suggéré ce travail et aussi pour ses conseils lors de sa réalisation.

Ce travail a fait l'objet d'un exposé lors de l'université d'été de Mathématiques de Safi, 6-9 Juillet 1999, Maroc.

Préliminaires

Soit A un anneau commutatif contenant $\mathbb{Q}$. Un sous ensemble α de A est un appelé un ordre s'il satisfait les propriétés suivantes : $\alpha + \alpha \subset P$, $\alpha\alpha \subset \alpha$, $-1 \notin \alpha$, $\{a^2 \mid a \in A\} \subset \alpha$, $\alpha \cup -\alpha = A$ et si de plus $\alpha \cap -\alpha$ est un idéal premier de A.

L'ensemble des ordres de A peut être muni d'une structure d'espace topologique appelé spectre réel de A et noté $\operatorname{Spec}_r A$ (pour la définition et les propriétés du spectre réel, on pourra se référer à [BCR]). Citons, entre autre chose, qu'un morphisme d'anneau $A \to B$ induit une application continue $\operatorname{Spec}_r B \to \operatorname{Spec}_r A$. De plus, à un semi algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$ on peut associer canoniquement un ensemble constructible $\widetilde{S}$ de $\operatorname{Spec}_r \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]$ (confer [BCR, 7.2.2]).

Pour tout ordre α, on note l'ensemble de ses éléments strictement positifs $\alpha^+ = \alpha \setminus (-\alpha)$. Dans toute la suite, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels usuels. On considère aussi l'anneau des séries de Laurent en une indéterminée $\mathbb{R}((t))$. On note ord la valuation habituelle, et $\overline{\mathrm{ac}}\,(x)$ est le coefficient de plus petit degré de $x \in \mathbb{R}((t))$ (on pose par convention $\overline{\mathrm{ac}}\,(0) = 0$).

Le spectre réel de l'anneau des séries formelle $\mathbb{R}[[t]]$ est composé de 3 éléments : $\{f \in \mathbb{R}[[t]] \mid f(0) \geq 0\}$, $0_+ = \{f \in \mathbb{R}[[t]] \mid \overline{\mathrm{ac}}\,(f) \geq 0\}$, $0_- = \{f \in \mathbb{R}[[t]] \mid -1^{\mathrm{ord}(f)}\overline{\mathrm{ac}}\,(f) \geq 0\}$.

1 Espace des germes d'arcs tracés sur un semi-algébrique

Définition 1.1 *Soit S un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$. Un germe d'arc réel tracé sur S est la donnée d'un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\gamma : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \mathbb{R}[[t]]$, avec $\gamma^{-1}(0_+) \in \widetilde{S}$ où $\widetilde{S}$ est le constructible de* $\mathrm{Spec}_r\, \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]$ *associé au semi-algébrique S.*

On note $\mathfrak{L}(S)$ l'ensemble des germes d'arc tracés sur S. Du fait que le morphisme γ est caractérisé par les images $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ des indéterminées $X_1, \ldots, X_m$ dans $\mathbb{R}[[t]]$, on peut voir $\mathfrak{L}(S)$ comme un sous ensemble de $\mathbb{R}[[t]]^m$. On notera aussi, si T est un sous ensemble de S, $\mathfrak{L}(S_T)$ pour l'ensemble des germes d'arc tracés sur S dont l'origine est dans T, i.e. $\gamma \in \mathfrak{L}(S_T)$ si $\gamma \in \mathfrak{L}(S)$ et $\gamma(0) \in T$.

De la même manière, on peut définir $\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$, l'ensemble des germes d'arcs tracés sur $\mathbb{R}^m$ tronqués à l'ordre n, i.e. les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres $\gamma : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \mathbb{R}[[t]]/t^{n+1}\mathbb{R}[[t]]$.

Si on représente les images $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ des indéterminées $X_1, \ldots, X_m$ par des polynômes de $\mathbb{R}[t]$ de degré $\leq n$, $\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$ peut être interprété comme $\mathbb{R}^{(n+1)m}$

Du morphisme de troncation à l'ordre n, $\mathbb{R}[[t]] \to \mathbb{R}[[t]]/t^{n+1}\mathbb{R}[[t]]$, on déduit un morphisme $\pi_n : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$. On dispose aussi des morphismes naturels de projection pour $m \geq n$, $\pi_{m,n} : \mathfrak{L}_m(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$.

Soit $\alpha \in \mathrm{Spec}_r\, \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m] = \widetilde{\mathbb{R}^m}$. On a l'équivalence $F \in \gamma^{-1}(0_+) \iff \forall t \in]0, \epsilon[\quad F(\gamma) \geq 0 \iff \overline{\mathrm{ac}}\,(F(\gamma)) \geq 0$. Donc $\alpha = \gamma^{-1}(0_+)$ se traduit par $F \in \alpha \iff \overline{\mathrm{ac}}\,(F(\gamma)) \geq 0$.

Supposons le semi-algébrique S donné par les équations $S = \cup_{i=1}^{r} \cap_{j=1}^{s_i} \{f_{ij} = 0, g_{ij} > 0\}$. Alors $\widetilde{S} = \cup_{i=1}^{r} \cap_{j=1}^{s_i} \{\alpha \in \widetilde{\mathbb{R}^m} \mid f_{ij} \in \alpha \cap -\alpha, g_{ij} \in \alpha^+\}$. Alors $\gamma^{-1}(0_+) = \alpha \in \widetilde{S}$ signifie qu'il existe i tel que pour tout $j = 1, \ldots, l_i$ $f_{ij}(\gamma) = 0$ et $\overline{\mathrm{ac}}\,(g_{ij}(\gamma)) > 0$.

Proposition 1.2 *Soit S un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$.*

- *Alors $\pi_0(\mathfrak{L}(S))$ est la clôture $\bar{S}$ de S pour la topologie euclidienne. On a même $\pi_n(\mathfrak{L}(S)) = \pi_n(\mathfrak{L}(\bar{S}))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

- *Soit S un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$. Alors $\pi_n(\mathfrak{L}(S))$ est un sous ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{(n+1)m}$.*

Pour la démonstration, confer [Qz].

On a une trivialisation de l'espace des arcs dans le cas d'un ensemble algébrique non singulier :

Proposition 1.3 *Supposons que le semi-algébrique* $S \subset \mathbb{R}^m$ *est une sous variété* C^∞ *de dimension* d. *Alors il existe des semi-algébriques* $(S_i)_{i \in I}$ *ouverts dans* S *tels que* $S = \cup_{i \in I} S_i$, *et pour tout* $i \in I$ *on a* $\pi_n(\mathfrak{L}(S_{S_i})) \simeq S_i \times \mathbb{R}^{(n+1)d}$ *(rappelons que* $\mathfrak{L}(S_{S_i})$ *est l'ensembles des arcs tracés sur* S *et d'origine dans* S_i*). Et même, pour tout semi-algébrique* $T \subset S_i$, $\pi_n(\mathfrak{L}(S_T)) \simeq T \times \mathbb{R}^{(n+1)d}$.

Démonstration: Soit $a \in S$. Il existe un voisinage ouvert semi-algébrique S_a de a dans S tel que la projection orthogonale p de S sur l'espace tangent T_a à S en a induise un difféomorphisme analytique de S_a sur son image. De plus, la projection orthogonale ne "change pas l'ordre d'un arc" donc $\pi_n(\mathfrak{L}(S_a, S)) \simeq \pi_n(\mathfrak{L}(p(S_a), p(S)))$. A un changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que l'équation du plan tangent est $X_{d+1} = \ldots = X_m = 0$. Par 1.4, on déduit que $\pi_n(\mathfrak{L}(S_a, S)) \simeq S_a \times \mathbb{R}^{(n+1)d}$ d'où le résultat souhaité. $\square$

Un changement *affine* de coordonnées ne change pas l'espace des arcs :

Lemme 1.4 *Soient* $X = (X_1, \ldots, X_m)$, A *une matrice inversible* $m \times m$ *à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{R}^m$. *Alors l'application* $h : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $X \mapsto AX + B$ *induit un isomorphisme* $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ *et mieux, des isomorphismes* $\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m) \simeq \mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$ *pour tout* n.

Démonstration: Il suffit de remarquer que $A(\gamma) \equiv B \bmod t^n$ équivaut à $\gamma \equiv A^{-1}B \bmod t^n$. $\square$

2 Ensembles simples

Par convention, les variables décrivant $\mathbb{R}((t))$ sont notées $x_1, \ldots, x_m$ et les variables décrivant $\mathbb{Z}$ sont notées $l_1, \ldots, l_r$.

Définition 2.1

- *Une condition simple de* $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$, *notée* $\theta(x_1, \ldots, x_m, l_1, \ldots, l_r)$, *est une combinaison booléenne de conditions de la forme :*

  (i) $\operatorname{ord}_t f_1(x_1, \ldots, x_m) \geq \operatorname{ord}_t f_2(x_1, \ldots, x_m) + L(l_1, \ldots, l_r)$

  (ii) $\operatorname{ord}_t f_1(x_1, \ldots, x_m) \equiv L(l_1, \ldots, l_r) \bmod d$

  (iii) $h(\overline{\mathrm{ac}}\,(f_1(x_1, \ldots, x_m)), \ldots, \overline{\mathrm{ac}}\,(f_p(x_1, \ldots, x_m))) \geq 0$

  où $f_1, \ldots, f_p, h$ *sont des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}$, L *est un polynôme de degré au plus un à coefficients dans* $\mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$.

- *Un sous ensemble de* $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$ *est dit simple lorsqu'il est donné par une condition simple. Une fonction* $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ *est dite simple lorsque sont graphe est un ensemble simple.*

- *Les sous ensembles simples de $\mathbb{Z}^r$ (donnés par une combinaison booléenne de conditions de type (i) ou (ii), avec m=0) sont appelés des ensembles de Presburger et seront étudiés dans la section suivante.*

Les ensembles simples admettent l'élimination des quantificateurs qui portent sur les variables entières. C'est un résultat élémentaire dû à Presburger [Pr] dont la preuve peut se faire par un argument similaire à celui de la preuve de 3.2 :

Proposition 2.2 *Soit θ une condition simple de $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$. Alors la formule $\exists l_1 \in \mathbb{Z} \quad \theta(x_1, \ldots, x_m, l_1, \ldots, l_r)$ est simple.*

Le résultat fondamental suivant est la version réelle du résultat de Pas [Pa, Th 4.1], ainsi que du théorème de Tarski-Seidenberg [BCR, 1.4.6] :

Théorème 2.3 *Soit θ une condition simple. Alors la condition*

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}((t)) \quad \theta(x_1, \ldots, x_m, l_1, \ldots, l_r)$$

est simple.

Confer [Qz] pour la démonstration.

Définition 2.4 *Un sous ensemble A de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}[[t]]^m$ est dit simple s'il existe une condition simple θ de $\mathbb{R}((t))^m$ telle que*

$$A = \{\gamma \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \mid \theta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)\}$$

Notons que pour tout ensemble semi-algébrique S de $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{L}(S)$ est un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$.

Une famille d'ensembles simples $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^r}$ de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ est dite simple s'il existe une condition simple θ de $\mathbb{R}((t))^m \times \mathbb{Z}^r$ telle que

$$A_n = \{\gamma \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \mid \theta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, n)\}$$

Proposition 2.5 *Soit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $h : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_p] \to \mathbb{R}[Y_1, \ldots, Y_m]$, $X_i \mapsto F_i$. Considérons un ensemble simple A de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^p)$ et B un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$. Alors h induit un morphisme $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^p)$. De plus, $h^{-1}(A)$ est un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ et $h(B)$ est un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^p)$.*

Démonstration: Un élément γ de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ est donné par un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{R}[Y_1, \ldots, Y_m] \to \mathbb{R}[[t]]$. On définit naturellement $h(\gamma)$ par le composé $\gamma \circ h$.

Si A est donné par la formule simple $\theta(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ alors on a $h^{-1}(A) = \{\delta \in \mathbb{R}[[t]]^m \mid \theta(F_1(\delta), \ldots, F_p(\delta))\}$, qui est un ensemble simple.

Si B est donné par la formule simple $\Gamma(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ alors on a $h(B) = \{\gamma \in \mathbb{R}[[t]]^d \mid \exists \delta \in B, F_1(\delta) = \gamma_1, \ldots, F_p(\delta) = \gamma_p\}$, qui est un ensemble simple d'après 2.3. □

Le résultat suivant est une généralisation de la Proposition 1.2.

Proposition 2.6 *Soit A un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$. Alors $\pi_n(A)$ est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{(n+1)m}$.*

Démonstration: On considère une section s de $\pi_n : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$.

Supposons que A est donné par la formule simple $\theta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Alors $(\pi_n^{-1}\pi_n(A)) = \{\delta \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) \mid \exists \gamma \in R[[t]]^m \quad \theta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \equiv \delta \mod (t^{n+1})\}$ est un ensemble simple d'après 2.3.

Notons que $\gamma \in \pi_n(A) \iff s(\gamma) \in \pi_n^{-1}\pi_n(A)$. Sur chaque cas de la disjonction $\operatorname{ord}(f(\gamma)) = 0, \ldots, n+1$ où f décrit l'ensemble des polynômes qui interviennent dans la formule de l'ensemble simple $\pi_n^{-1}\pi_n(A)$, les coefficients de γ satisfont une condition semi-algébrique. Ce qui achève la démonstration. $\square$

3 Ensembles de Presburger

Définition 3.1 *Une condition simple de $\mathbb{Z}^r$, notée $\theta(l_1, \ldots, l_r)$, est une combinaison booléenne de conditions de la forme*
(i) $L(l_1, \ldots, l_r) \geq 0$ et celles de la forme (ii) $L(l_1, \ldots, l_r) \equiv 0 \mod d$,
où L est un polynôme de degré au plus un à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$.

Un sous ensemble de $\mathbb{Z}^r$ est dit simple ou de Presburger lorsqu'il est donné par une condition simple. Une fonction $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ est dite simple lorsque sont graphe est un ensemble simple.

Les fonctions affines sur un Presburger de $\mathbb{Z}^r$ sont des exemples de fonctions simples de $\mathbb{Z}^r$. La proposition qui suit affirme que ce sont essentiellement les seules.

Proposition 3.2 *Une fonction $\alpha : \mathbb{Z}^{r-1} \to \mathbb{Z}$ est simple si et seulement s'il existe une partition de $\mathbb{Z}^r$ en un nombre fini d'ensembles de Presburger P sur lesquels α est une fonction affine: $\alpha(l_1, \ldots, l_{r-1}) = c_1 l_1 + \ldots + c_{r-1} l_{r-1} + c$, avec $c_i, c \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration: Notons P le graphe de α dans $\mathbb{Z}^r$; c'est un ensemble de Presburger en les variables $(l_1, \ldots, l_{r-1}, l_r)$. Posons $l' = (l_1, \ldots, l_{r-1})$. On appelle μ le ppcm des entiers d qui apparaissent dans les congruences des relations de type (ii) dans la description de P. Si on fixe w_r, la classe de congruence de l_r modulo μ, on peut remplacer dans les équations qui décrivent P, l_r par $\mu l_r + w_r$. Aussi, en distinguant un nombre fini de cas, on peut supposer que l_r n'apparait dans aucune congruence de type (ii) de la description de P.

P s'écrit alors comme l'ensemble des r-uplets $l = (l_1, \ldots, l_r) \in P' \subset \mathbb{Z}^r$ qui satisfont une disjonction de conditions (que l'on peut supposer disjointes en effectuant l'opération booléenne $P_1 \cup P_2 = P_1 \setminus (P_1 \cap P_2) \cup P_2 \setminus (P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap P_2))$ du genre:

(1) $\nu l_r \leq A_i(l')$, $i = 1, \ldots, u$, (2) $\nu l_r \geq B_j(l')$, $j = 1, \ldots, v$, où P' est un ensemble de Presburger de $\mathbb{Z}^r$ (la projection canonique de P relativement aux $r-1$ premières coordonnées est un ensemble de Presburger par 2.2), $A_i, B_j \in \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_{r-1}]$ sont des polynômes de degré au plus 1, et $\nu \in \mathbb{N}$ (le coefficient commun ν s'obtient en multipliant chaque polynôme par un entier convenable).

En incluant à P' des inégalités du type $A_i \leq A_s$ et $B_t \leq B_j$, on peut supposer que $u = 1$ et $v = 1$. Si on fixe $w_1, \ldots, w_{r-1}$, la classe de congruence de $l_1, \ldots, l_{r-1}$ modulo ν, on peut remplacer dans les nouvelles équations qui décrivent P, $l_1, \ldots, l_{r-1}$ par $\nu l_1 + w_1, \ldots, \nu l_{r-1} + w_{r-1}$. Aussi, en distinguant un nombre fini de cas, on peut supposer que les coefficients des polynômes A et B, hormis éventuellement les coefficients constants, sont divisibles par ν.

Après simplification des inégalités précédentes (1) et (2), il résulte une partition de P par des ensembles du type : $l \in \mathbb{Z}^r$ tels que $l' \in P'$ et $B(l') \leq l_r \leq A(l')$, où P' est un ensemble de Presbuger de $\mathbb{Z}^{r-1}$, et A, B sont des fonctions affines en l'.

Du fait que α est une fonction, on a alors nécessairement $l_r = A(l') = B(l')$ pour $l' \in P'$. □

Venons en a la proposition clé suivante, contenue dans [De, Lemma 3.2], dont on recopie la preuve ci contre pour le confort du lecteur.

Proposition 3.3 *Soit P un ensemble de Presburger de $\mathbb{Z}^{d+r}$ et soit $\alpha : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ une fonction simple. Supposons que les séries*

$$J(l,T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, (k,l) \in P} T^{\alpha(k)}$$

convergent dans $\mathbb{Z}[[T]]$ pour tout $l \in \mathbb{Z}^r$. Alors, $J(l,T)$ peut s'écrire sous la forme suivante pour tout $l \in \mathbb{Z}^r$

$$(1) \qquad J(l,T) = \sum_{i=1}^{e} c_i \beta_i(l) T^{\alpha_i(l)} / \prod_{j=1}^{h} (1 - T^{a_j})$$

avec $c_i \in \mathbb{Q}$, $e \in \mathbb{N}$, $\beta_i : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{N}$ produit d'au plus d fonctions simples, $\alpha_i : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{N}$ des fonctions simples et $a_j \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration: On fait la preuve par récurrence sur d. Par la proposition 3.2, on peut supposer que α est une fonction affine. Posons $k' = (k_1, \ldots, k_{d-1})$. Le début de la démonstration se fait exactement de la même manière que dans la preuve de 3.2. De la sorte, on peut supposer que P est l'ensemble des $(k,l) \in \mathbb{Z}^{d+r}$ tels que $(k',l) \in P'$ et

(2) $B(k') + D(l) \leq k_d \leq A(k') + C(l)$, où P' est un Presburger de $\mathbb{Z}^{d-1+r}$, A et B sont des polynômes linéaires homogènes en k' avec éventuellement $A = +\infty$ (Quitte à se restreindre à un nombre fini de cas, on peut supposer que $l_1, \ldots, l_r \geq 0$ si $l \in G$. En conséquence, on ne pas avoir $B = -\infty$ car on a toujours au moins $k_d \geq 0$), C et D sont des fonctions affines en la variable l. On peut supposer de plus que $B(k') + D(l) \leq A(k') + C(l)$ pour tout $(k', l) \in P'$.

A ce stade, nous devons distinguer deux cas :

Supposons que α n'est pas une fonction constante. Alors, après réindexation des k_i, on peut écrire $\alpha(k) = \alpha'(k') + ak_d$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$ et α' une fonction affine de k'. On a alors,

$$\begin{aligned} J(l,T) &= \sum_{k' \in \mathbb{Z}^{d-1}, (k',l) \in P'} T^{\alpha'(k')} \sum_{k_d \in \mathbb{Z}, (2)} T^{ak_d}) \\ &= [(\sum_{k' \in \mathbb{Z}^{d-1}, (k',l) \in P'} T^{\alpha'(k') + B(k')a}) T^{D(l)a} \\ &\quad -(\sum_{k' \in \mathbb{Z}^{d-1}, (k',l) \in P'} T^{\alpha'(k') + A(k')a}) T^{(C(l)+1)a}] 1/(1 - T^a) \end{aligned}$$

Notons que si $A = +\infty$, alors la deuxième série qui apparait dans la différence est nulle. Remarquons aussi que nécessairement ces deux séries sont convergentes pour tout $l \in \mathbb{Z}^r$. Si on avait une infinité de facteurs en un degré T^n dans une des deux séries précédente, alors cela serait aussi le cas dans la série initiale $J(l,T)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence.

Reste à traiter le cas où α est une fonction constante. En fait, on montre le résultat plus général suivant :

Lemme 3.4 *Soit P un ensemble de Presburger de $\mathbb{Z}^{d+r}$. Supposons que pour tout $l \in \mathbb{Z}^r$ l'ensemble $\{k \mid (k,l) \in P\}$ est fini. Soit $R(k,l)$ un polynôme de $\mathbb{Q}[k,l]$ de degré $\leq m$. Soit $I(l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d,(k,l)\in P} R(k,l)$. Alors $I(l)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$, de degré $\leq m+d$ en des fonctions simples $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ de la variable l.*

Démonstration: On raisonne par récurrence sur d, le cas $d=0$ étant trivial. Avec $k' = (k_1,\ldots,k_{d-1})$, on peut écrire $R(k,l) = k_d^q S(k',l)$ où $q \in \mathbb{N}$, $q \leq m$, $S \in \mathbb{Q}[k',l]$ de degré $\leq m-q$. On peut supposer que P est comme décrit en (2) avec $A \neq +\infty$. Alors $I(l) = \sum_{k'\in\mathbb{Z}^{d-1},(k',l)\in P'} S(k',l) \sum_{k_d\in\mathbb{N},(2)} k_d^q$. Comme $\sum_{i=0}^{l} i^q$ est un polynôme de degré $\leq q+1$ en la variable l, il en est de même pour $\sum_{k_d\in\mathbb{N},(3)} k_d^q$ car (3) s'exprime comme une fonction affine de l'.

Pour conclure, reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à $\sum_{k'\in\mathbb{Z}^{d-1},(k',l)\in P'} S(k',l)$. $\square$

Le lemme s'applique à notre situation avec $R=1$ du fait qu'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$, de degré $\leq d$ en des fonctions simples de la variable l, est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de produits d'au plus d fonctions simples de la variable l, à un facteur multiplicatif rationnel près.

Notons également que le Lemme précédent fournit aussi le cas de base de la récurrence, $d=0$. $\square$

Remarque 3.5 *Soient des fonctions simples $\alpha_i : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$, $i = 1,\ldots,d$ de la variable $l \in \mathbb{Z}^r$. Alors le produit $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_d$ est une fonction qui peut s'écrire comme une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de fonctions de la forme $\sum_{k\in\mathbb{Z}^{d+1}(k,l)\in P} \mathbf{1}$ où P est un ensemble Presburger de $\mathbb{Z}^{d+1+r}$.*

Le Lemme 3.4 est une sorte de "réciproque" de cette propriété.

4 La série de Poincaré

Pour tout semi-algébrique S de $\mathbb{R}^m$, on note $[S]$ sa caractéristique d'Euler, calculée par exemple par l'homologie de Borel-Moore à support compact ([BCR, 11]). En particulier, elle est multiplicative, $[S \times T] = [S][T]$; additive $[S \cup T] = [S] + [T] - [S \cap T]$; et $[\mathbb{R}^0] = 1$.

Soit A un ensemble simple de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$. On considère la série formelle suivante $P_A(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\pi_n(A)] T^n$. Elle a un sens par 2.6, on l'appelle série de Poincaré associée à A. On s'intéresse plus particulièrement aux séries $P_S(T) = P_{\mathfrak{L}(S)}(T)$, où S est un semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$. Notons que l'on peut supposer que S est fermé d'après 1.2. On notera dans toute la suite $\pi_n(S) = \pi_n(\mathfrak{L}(S))$.

On sait d'après [Qz] que $P_S(T)$ est une fraction rationnelle, i.e. un élément de $\mathbb{Q}(T)$.

Néanmoins, on va calculer de manière plus explicite la série de Poincaré de certaines classes spéciales de semi-algébriques. Tout d'abord, si S est un ensemble algébrique non singulier, il suffit d'appliquer 1.3 pour obtenir :

Proposition 4.1 *Supposons que le semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^m$ est une sous variété C^∞ fermée de dimension d (ce qui revient essentiellement au même de supposer que S est une composante connexe d'un ensemble algébrique non singulier). Alors on a* $P_S(T) = \frac{(-1)^d[S]}{(1+(-1)^{d+1}T)}$.

Hormis pour ce cas trivial, une des difficultés qui se présente réside dans le fait que si S et T sont disjoints, alors $\mathfrak{L}(S)$ et $\mathfrak{L}(T)$ sont disjoints, mais en général on a $[\pi_n(S \cup T)] \neq [\pi_n(S)] + [\pi_n(T)] - [\pi_n(S \cap T)]$ du fait que $[\pi_n(S \cap T)] \neq [\pi_n(S)] \cap [\pi_n(T)]$.

Il apparait naturel de commencer par étudier les germes d'arcs tracés sur les courbes !

4.1 Courbes algébriques rélles

On considère une courbe algébrique réelle réduite C de $\mathbb{R}^m$ et on note A son anneau de coordonnées. La courbe C admet un nombre fini de points singuliers $A_1, \ldots, A_e$. Un germe d'arc tracé sur C avec pour origine un point singulier A_i est en fait tracé sur une des branches de C en A_i. Aussi, on est ramené au cas d'une courbe algébrique irréductible.

On peut donc écrire $\mathfrak{L}(C) = \cup_{i=1}^{e} \mathfrak{L}(C_{A_i}) \cup \mathfrak{L}(C_{\mathrm{Reg}})$ où Reg est le lieu régulier de C. Du fait que les origines des arcs de l'union précédente sont disjointes, la série de Poincaré de C est la somme des séries de Poincaré des différentes composantes de l'union. On sait évaluer $P_{\mathfrak{L}(C_{\mathrm{Reg}})}(T)$ d'après 1.3. Reste à évaluer $P_{\mathfrak{L}(C_{A_i})}$ où A_i est un point singulier quelconque. On peut supposer que A_i est l'origine.

Si on note $\mathfrak{m}_O$ l'idéal maximal des fonctions de A qui s'annule en O, un arc $\gamma \in \mathfrak{L}(C_O)$ est en fait la donnée d'un morphisme d'anneau locaux $A_{\mathfrak{m}_O} \to \mathbb{R}[[t]]$, morphisme qui factorise par la complétion de A relativement à $\mathfrak{m}_O$, $\widehat{A} \to \mathbb{R}[[t]]$. L'anneau $\widehat{A}$ est une courbe algébroide réelle irréductible, donc $\widehat{A} \simeq \mathbb{R}[[\phi_{m_1}, \ldots, \phi_{m_r}]] \hookrightarrow \mathbb{R}[[u]]$, où les $\phi_{m_i}(u)$ sont les générateurs canoniques qui vérifient $\mathrm{ord}_u(\phi_{m_i}(u)) = m_i$ et $\mathbb{R}[[u]]$ est la clôture intégrale de $\widehat{A}$. La fonction $\mathrm{E}\,[k]$ désignera la partie entière de k.

En conséquence, $\mathfrak{L}(C_O) \simeq \{(\phi_{m_1}(\sigma(t)), \ldots, \phi_{m_r}(\sigma(t))) \mid \sigma \in \mathbb{R}[[t]], \mathrm{ord}\,(\sigma(t)) \geq 1\}$. Donc on a l'union disjointe $\pi_n(\mathfrak{L}(C_O)) \simeq \bigcup_{1 \leq \mu \leq \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_1}]+1} \pi_n(\mathfrak{L}(\mu))$ avec

$$\mathfrak{L}(\mu) = \{(\phi_{m_1}(\sigma(t)), \ldots, \phi_{m_r}(\sigma(t))) \mid \mathrm{ord}\,(\sigma(t)) = \mu\}$$

Si m_1 est impair on a une fibration de l'espace $\pi_n(\mathfrak{L}(\mu))$ donnée par les coefficients de $\phi_{m_1}(\sigma(t)) \mod t^{n+1}$, i.e. on a un isomorphisme semi-algébrique $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n-m_1\mu} \simeq \{(\phi_{m_1}(\sigma(t)) \bmod t^{n+1}, \ldots, \phi_{m_r}(\sigma(t)) \bmod t^{n+1}) \mid \mathrm{ord}\,(\sigma(t)) = \mu\}$. Donc

$$[\pi_n(\mathfrak{L}(C_O))] = 1 + (-2) \sum_{1 \leq \mu \leq \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_1}]} (-1)^{n-m_1\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_1}] \text{ est pair} \\ 1 + 2(-1)^n & \text{si } \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_1}] \text{ est impair} \end{cases}$$

Le calcul de la série de Poincaré donne alors $P_{C_0}(T) = \dfrac{1}{1-T} + 2\dfrac{T^{m_1}}{(1+T)(1+T^{m_1})}$

Si m_1 est pair, considérons m_s le premier entier impair dans la liste ordonnée des m_i (il en existe toujours un sinon le semi groupe engendré par les m_i ne serait pas un semi-groupe d'entiers). Lorsque $\mu > \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_s}]$, on a une fibration semi-algébrique de l'ensemble $\pi_n(\mathfrak{L}(\mu))$ donnée par les coefficients de $\phi_{m_1}(\sigma(t))$ mod t^{n+1} sauf le coefficient dominant dont on fixe le signe. D'où $\pi_n(\mathfrak{L}(\mu)) \simeq \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n-m_1\mu}$ et la contribution à $[\pi_n(\mathfrak{L}(C_O))]$ de ce cas est :

$$1 + \sum_{\mathrm{E}\,[\frac{n}{m_s}] < \mu \leq \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_1}]} (-1)^{1+n-m_1\mu} = 1 + (-1)^n(\mathrm{E}\,[\frac{n}{m_1}] - \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_s}])$$

Lorsque $\mu \leq \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_s}]$, on a une fibration semi-algébrique de l'ensemble $\pi_n(\mathfrak{L}(\mu))$ donnée par le coefficient dominant de ϕ_{m_s} mod t^{n+1} ainsi que des coefficients de $\phi_{m_1}(\sigma(t))$ mod t^{n+1} auxquels on a enlevé le coefficient dominant. D'où $\pi_n(\mathfrak{L}(\mu)) \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n-m_1\mu}$ et la contribution à $[\pi_n(\mathfrak{L}(C_O))]$ de ce cas est :

$$(-2) \sum_{1 \leq \mu \leq \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_1}]} (-1)^{n-m_1\mu} = (-1)^n(-2)\mathrm{E}\,[\frac{n}{m_s}]$$

Donc, lorsque m_1 est pair, $[\pi_n(\mathfrak{L}(C_O))] = 1 + (-1)^{n+1}(\mathrm{E}\,[\frac{n}{m_1}] + \mathrm{E}\,[\frac{n}{m_s}])$ et on a la série de Poincaré $P_{C_0}(T) = \dfrac{1}{1-T} - \dfrac{T^{m_1}}{(1+T)(1-T^{m_1})} + \dfrac{T^{m_s}}{(1+T)(1+T^{m_s})}$

Finalement, le premier terme de la série de Poincaré globale de C est toujours $\dfrac{[C]}{1-T}$, que l'on peut interpréter comme la contribution du lieu régulier. Le degré du second terme donne alors la plus petite multiplicité des singularités.

4.2 Ensembles semi-linéaires

Soit S un semi-linéaire non vide de $\mathbb{R}^m$ donné par $S = \cap_{i=1}^r \{f_i \rhd 0\}$ avec $f_i = a_{i0} + a_{i1}X_1 + \ldots + a_{id}X_m$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $\rhd \in \{>, \geq\}$.

On a alors

$$\pi_n(S) = \bigcup_{0 \leq u_1, \ldots, u_r \leq n+1} \{\gamma \bmod (t^{n+1}) \mid \gamma \in \mathbb{R}[[t]],\ \forall i = 1 \ldots r,\ \overline{\mathrm{ac}}\,(f_i(\gamma)) > 0,\ \mathrm{ord}\,(f_i(\gamma) = u_i\}$$

En toute rigueur l'union est indexée par $(u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{N}^r$, mais si on se donne $\gamma \in \mathbb{R}[[t]]$ tel que $u_{i_1}, \ldots, u_{i_k} > n$ et $u_i \leq n$ pour $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, alors on peut considérer $\delta \in \mathbb{R}[[t]]$ tel que $\delta_i = \gamma_i$ si $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ et $\delta_{i_j} = \overline{\mathrm{ac}}\,(\gamma_{i_j} \bmod (t)^{n+2})t^{n+1}$ pour $j \in \{1, \ldots, k\}$. En conséquence, $\delta \in \mathfrak{L}(S)$ et vérifie $\delta \equiv \gamma \bmod t^{n+2}$, $\mathrm{ord}\,\delta_i \leq n+1$.

On peut transformer alors la condition $\overline{\mathrm{ac}}\,(f_i(\gamma)) \rhd 0$ en $\overline{\mathrm{ac}}\,(f_i(\gamma)) > 0$ sans modifier l'union. Remarquons aussi que l'union considérée est disjointe. De plus, quitte à distinguer un nombre fini de cas, on peut supposer que $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_r$.

On note $\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]) = \mathbb{R}^{m(n+1)} = \mathbb{R}_0^m \times \ldots \times \mathbb{R}_n^m$ où $\mathbb{R}_i^m$ désigne l'espace des coefficients des termes t^i des m composantes $\mathbb{R}[[t]]/t^{m+1}$ ordonnées dans l'ordre

des variables d'indices croissant, $X_1,\ldots,X_m$. Plus précisemment, si $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)\in\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_m]$, avec $\gamma_j=\sum_{i=0}^m a_{ij}t^i$ alors on a $(a_{1,i},\ldots,a_{m,i})\in\mathbb{R}_i^m$.
Intéressons nous à la contribution fournie par les u_i satisfaisant la condition $\theta(k_1,k_2,\ldots,k_s)$ et

$0\leq u_1=\ldots=u_{k_1-1}<u_{k_1}=\ldots=u_{k_2-1}<\ldots<u_{k_{s-1}}=\ldots=u_{k_s-1}<n+1=u_{k_s}=\ldots=u_r$.

On introduit les ensembles semi-linéaires suivants :

$$S(s_1,s_2,t_1,t_2)=\{\forall i=s_1,\ldots,s_2\ f_i>0,\ \forall j=t_1,\ldots,t_2\ f_j=0\}$$

Alors la contribution à $\pi_n(S)$ est :

$$S(0,0,1,r)^{u_1}\times S(1,k_1-1,k_1,r)\times S(0,0,k_1,r)^{u_{k_2}-u_{k_1}}\times\ldots\times S(k_{s-1},k_s-1,k_s,r)\times S(0,0,k_s,r)^{u_{k_s}-u_{k_{s-1}}}$$

Mais la caractéristique d'Euler des polytopes convexes $S(s_1,s_2,t_1,t_2)$ vaut 1 ou -1. Donc, dans l'évaluation de $[\pi_n(S)]$, seule importe la parité des u_{k_i}. On peut alors écrire $[\pi_n(S)]$ sous la forme d'une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de fonctions de la forme $\sum\mathbf{1}$ où la somme est indexée par l'ensemble $s\in\{1,\ldots,r\}$, $(k_1,\ldots,k_s)\in\mathbb{N}^s$, $(u_1,\ldots,u_r)\in\mathbb{N}^r$, $\epsilon\in\{0,1\}^r$ qui décrit la condition $1\leq k_1<k_2<\ldots<k_s\leq n$, $u\equiv\epsilon\mod 2$, $\theta(k_1,\ldots,k_s)$. Cette condition est simple d'après 3.3. Dans les conditions d'application de 3.5, nous obtenons :

Lemme 4.2 *Soit $S\subset\mathbb{R}^m$ une intersection de demi-hyperplans, alors $P_S(T)\in\mathbb{Q}(T)$.*

Pour traiter le cas des disjonctions, nous énoncons au préalable une proposition, valable dans la catégorie des semi-linéaires.

Lemme 4.3 *Soient S et T deux semi-linéaires fermés. Alors on a $\pi_n(S\cap T)=\pi_n(S)\cap\pi_n(T)$. Par conséquence, pour tout semi-linéaires U et V, on a la formule $[\pi_n(U\cap V)]=[\pi_n(U)]+[\pi_n(V)]-[\pi_n(\bar U\cap\bar V)]$.*

Démonstration: Il suffit de prouver la première assertion pour deux polytopes convexes fermés S et T. Notons $\operatorname{int}(X)$ et $\operatorname{fr}(X)$ respectivement l'intérieur et la frontière d'un ensemble $X\subset\mathbb{R}^m$.

Soit $\gamma\in\mathfrak{L}(S)$ et $\delta\in\cap\mathfrak{L}(T)$ tel que $\pi_n(\gamma)=\pi_n(\delta)$. Si $\gamma(0)=\delta(0)\in\operatorname{int}(S\cap T)$ alors nécéssairement on a $\gamma\in\mathfrak{L}(S\cap T)$.

Soit le cas $\gamma(0)\notin\operatorname{int}(S\cap T)$. Posons $S'=S\setminus\operatorname{int}(S\cap T)$ et $T'=T\setminus\operatorname{int}(S\cap T)$. Alors $\gamma(0)\in\operatorname{fr}(S'\cap T')$. A une transformation continue et affine par morceaux près, on peut se ramener *localement* à l'une des situations génériques suivantes :

- $S'=[0,1]^{m_1}$, $T'=[-1,0]\times[0,1]^{m_2}$ et $\gamma(0)=0$, ou
- $S'=[0,1]^{m_1}$, $T'=[-1,0]^{m_2}$ et $\gamma(0)=0$, ou
- $S'=[0,1]\times[-1,1]^{m_1}$, $T'=[-1,0]\times[0,1]^{m_2}$ et $\gamma(0)=0$, ou
- $S'=[0,1]\times[-1,1]^{m_1}$, $T'=[-1,0]\times[-1,1]^{m_2}$ et $\gamma(0)=0$.

En effet, cela résulte de la version améliorée de 1.4 suivante. Soit P un polytope convexe fermé et A une application continue, affine par morceaux, telle que A est affine en restriction à chaque face de P ainsi qu'en restriction à l'intérieur et à l'extérieur de P. Alors A induit un isomorphisme semi-algébrique de $\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^m)$.

Ce qui achève la démonstration. $\square$

Soit alors un semi-linéaire $S = \cup_{i=1}^r \cap_{j=1}^{l_i} \{f_{ij} \geq 0, g_{ij} > 0\}$. Du fait que $\bar{S} = \cup_{i=1}^r \cap_{j=1}^{l_i} \{f_{ij} \geq 0, g_{ij} \geq 0\}$, une simple récurrence sur le nombre de disjonctions r permet de conclure à la rationalité de la série de Poincaré de S.

Proposition 4.4 *Pour tout semi-linéaire $S \subset \mathbb{R}^m$, la série $P_S(T)$ est une fraction rationelle.*

4.3 Ensembles donnés par une équation binomiale

Soit $S \subset \mathbb{R}^m$ donné par $S = \{f \geq 0\}$ où f est une différence de deux monômes. Nous traitons dans un premier temps le cas où $f = \prod_{i=1}^r X_i^{a_i} - \mu \prod_{j=1}^s Y_j^{b_j}$ avec $X_i \neq Y_j$ pour tout i et j, et $\mu \in \mathbb{R}$.

Pour $\gamma \in \mathfrak{L}(S)$, on note $\gamma = (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ et on pose $\operatorname{ord}(x_i) = u_i$, $\operatorname{ord}(y_j) = v_j$.

Remarquons que si on se donne $\gamma \in \mathfrak{L}(S)$ alors on a, soit $\overline{\mathrm{ac}}\,(\prod_{i=1}^r x_i^{a_i}) \geq 0$, soit $\overline{\mathrm{ac}}\,(-\mu \prod_{j=1}^s y_j^{b_j}) \geq 0$. Supposons que l'on se trouve dans le premier cas. Considérons alors $\beta = (z_i, t_j)$ tel que $t_j = y_j$ si $v_j \leq n$ et $t_j = 0$ si $v_j > n$ et $z_i = x_i$ si $u_i \leq n+1$ ou $z_i = \sup(1, \overline{\mathrm{ac}}\,(x_i)) t^{n+1}$ si $u_i > n+1$. Alors $\beta \in \mathfrak{L}(S)$ tel que $\beta \equiv \alpha \bmod t^{n+1}$.

On peut alors écrire $\pi_n(S) = \cup_{\theta(u_i,v_j)} \{\gamma \bmod t^{n+1} \mid \overline{\mathrm{ac}}\,(f(\gamma)) \geq 0\}$, où θ est la condition simple : Pour tout i, j, $0 \leq u_i \leq n+1$ ou $u_i = +\infty$, $0 \leq v_j \leq n+1$ ou $v_j = +\infty$; s'il existe i_o tel que $u_{i_0} = +\infty$ alors pour tout i, $u_i \neq n+1$ et pour tout j, $v_j \neq +\infty$; s'il existe j_o tel que $j_{j_0} = +\infty$ alors pour tout j, $v_j \neq n+1$ et pour tout i, $u_i \neq +\infty$.

Sous cette condition, la réunion est disjointe. Une fois posé $\operatorname{ord}(f(x,y)) = l$, On peut la décomposer en les 4 sous unions disjointes suivantes :

- Si $\sum r_i u_i < \sum s_j v_j$ alors $\overline{\mathrm{ac}}\,(f(x_i, y_j)) = \overline{\mathrm{ac}}\,(\prod_{i=1}^r x_i^{a_i})$, et $\overline{\mathrm{ac}}\,(f(x_i, y_j)) \geq 0$ équivaut à ce que l'ensemble $\{i \mid u_i \equiv 1 \bmod 2,\ \overline{\mathrm{ac}}\,(x_i) < 0\}$ soit de cardinal pair. Une fois le nombre d'indices impairs u_i fixé égal à q, ce cas apporte à $\pi_n(S)$ la contribution $W \times (\mathbb{R}^*)^{r-q} \times \mathbb{R}^{nr - \sum_{i=1}^r u_i} \times \prod_{v_j \neq +\infty} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n-v_j} \times \prod_{v_j = +\infty} \mathbb{R}^0$ où W est le semi-algébrique $W = \{z \in \mathbb{R}^q \mid z_1 z_2 \ldots z_q > 0\}$.

- Si $\sum r_i u_i > \sum s_j v_j$ alors $\overline{\mathrm{ac}}\,(f(x_i, y_j)) = \overline{\mathrm{ac}}\,(-\mu \prod_{j=1}^s x_j^{b_j})$, et $\overline{\mathrm{ac}}\,(f(x_i, y_j)) \geq 0$ équivaut à ce que l'ensemble $\{j \mid v_j \equiv 1 \bmod 2,\ \overline{\mathrm{ac}}\,(y_j) < 0\}$ soit de cardinal pair si $\mu > 0$, impair si $\mu < 0$. Ce cas apporte à $\pi_n(S)$ une contribution d'expression similaire à celle du cas précédent.

- Soit désormais le cas où $\bar{r} = \sum r_i u_i = \sum s_j v_j$. Remarquons qu'on a nécessairement $\bar{r} \neq +\infty$. On pose $\operatorname{ord}(f(x,y)) = l$. Alors $\bar{r} \leq l$. Supposons qu'il existe un entier a_i ou b_j qui soit impair, par exemple a_1. On pose $x_1 = \lambda_{u_1} t^{u_1} + \ldots + \lambda_{n+1} t^{n+1} + \ldots$. Pour chaque choix de $x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s$ et de $l \in \{\bar{r}, \dots, \bar{r}+n-u_1\}$, les coefficients $\lambda_{u_1}, \dots, \lambda_{u_1+l-\bar{r}}$ sont uniquement déterminés, le coefficient $\lambda_{u_1+l-\bar{r}+1}$ décrit une demi-droite ouverte et les coefficients suivants de x_1 sont quelconques.

Ce cas apporte à $\pi_n(S)$ la contribution

$$(\mathbb{R}^*)^{r+s-1} \times \mathbb{R}^{n(r+s-1)-(\sum_{i=1}^r u_i + \sum_{j=1}^r v_j)} \times (\mathbb{R}^0 + (\mathbb{R}_+^*) + (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) + \dots + (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n-u_1}))$$

On traite le cas où tous les entiers a_i et b_j sont pairs en reprenant exactement les mêmes arguments.

D'après 3.5, on déduit la rationalité de la série de Poincaré associée à S.

Proposition 4.5 *Soit $S \subset \mathbb{R}^m$ donné par l'équation $S = \{f \geq 0\}$ où $f = \prod_{i=1}^r X_i^{a_i} - \mu \prod_{j=1}^s Y_j^{b_j}$ avec $X_i \neq Y_j$ pour tout i et j, et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors $P_S(T)$ est une fraction rationnelle.*

Venons en au cas où $f = \prod_{i=1}^m X_i^{a_i} - \mu \prod_{i=1}^m X_i^{b_i}$. On pose $c_i = \inf(a_i, b_i)$, $g = \prod_{i=1}^m X_i^{a_i-c_i} - \mu \prod_{i=1}^m X_i^{b_i-c_i}$ et $h = \prod_{i=1}^m X_i^{c_i}$. Alors, si on pose $T_1 = \{x \mid g(x) \geq 0,\ h(x) \geq 0\}$ et $T_2 = \{x \mid g(x) \leq 0,\ h(x) \leq 0\}$), on obtient $\pi_n(S) = \pi_n(T_1) \cup \pi_n(T_2)$.

Soit $V_1 = \{x \mid g(x) \geq 0\}$, $V_2 = \{x \mid g(x) \leq 0\}$, $W_1 = \{x \mid h(x) \geq 0\}$ et $W_2 = \{x \mid h(x) \leq 0\}$. On note aussi $u_i = \operatorname{ord} \gamma_i$, $\bar{r} = \sum a_i u_i$, $\bar{s} = \sum b_i u_i$ et $l = \operatorname{ord}(g(\gamma)$.

Soit $\gamma \in \mathfrak{L}(T_1)$. Alors il existe $\delta \in \mathfrak{L}(W_2)$ tel que $\pi_n(\gamma) = \pi_n(\delta)$ si et seulement si

(1) il existe i tel que c_i est impair et $u_i > n$ ou il existe i tel que $u_i = +\infty$ et $c_i \neq 0$.

En effet, il suffit alors de changer γ_i en $-\gamma_i$.

- Supposons que $\bar{r} < \bar{s}$. La condition il existe $\delta \in \mathfrak{L}(T_2)$ tel que $\pi_n(\gamma) = \pi_n(\delta)$ est équivalente à (2) : il existe i_0 tel que ($u_{i_0} = +\infty$ et $c_{i_0} \neq 0$) ou (c_{i_0} impair $u_{i_0} > n$), et i_1 avec a_{i_1} impair et $u_{i_1} > n$. En effet,
  - Soit il existe i_0 tel que c_{i_0} et a_{i_0} sont impairs et $u_{i_0} > n$ alors il suffit de changer γ_{i_0} en $-\gamma_{i_0}$,
  - Soit il existe i_0 et i_1 tels que $u_{i_0} = +\infty$ avec $c_{i_0} \neq 0$ et $u_{i_1} > n$ avec a_{i_1} impair. Alors il suffit de changer γ_{i_1} en $-\gamma_{i_1}$,
  - Soit il existe i_0 et i_1 tels que $u_{i_0} > n$, $u_{i_1} > n$, c_{i_0} et a_{i_1} sont impairs et c_{i_1}, a_{i_0} sont pairs. Alors changer γ_{i_0} en $-\gamma_{i_0}$ (resp. γ_{i_1} en $-\gamma_{i_0}$) ne modifie pas le signe de $\overline{\mathrm{ac}}\,(g(\gamma))$ (resp. le signe de $\overline{\mathrm{ac}}\,(h(\gamma))$).
- Le cas où $\bar{r} > \bar{s}$ est complètement analogue au précédent. On obtient une condition analogue (3).
- Supposons que $\bar{r} = \bar{s} < l$. On a la condition (4') Il existe $\delta \in \mathfrak{L}(V_2)$ tel que $\pi_n(\gamma) = \pi_n(\delta)$ si et seulement s'il existe i tel que $u_i + l - \bar{r} > n$. En effet, il suffit alors de changer le convenablement le coefficient en $t^{u_i+l-\bar{r}}$ de γ_i. Remarquons que ce changement ne modifie pas le signe de $\overline{\mathrm{ac}}\,(h(\gamma))$. La conjonction des deux conditions (1) et (4') donne (4).

– Supposons que $\bar{r} = \bar{s} = l \neq +\infty$. Il existe $\delta \in \mathfrak{L}(V_2)$ tel que $\pi_n(\gamma) = \pi_n(\delta)$ si et seulement si (5') :

  – il existe i tel que a_i ou b_i est impair et $u_i > n$, ou
  – il existe i tel que $u_i > n$ et $\prod \overline{\mathrm{ac}}\,(\gamma_i)^{a_i}$ et $-\mu \prod \overline{\mathrm{ac}}\,(\gamma_i)^{b_i}$ sont de signes opposés.

  Encore une fois, on en déduit aisément qu'il existe $\delta \in \mathfrak{L}(V_2)$ tel que $\pi_n(\gamma) = \pi_n(\delta)$ si et seulement si les conditions (1) et (5') sont satisfaites (avec possiblement des indices i différents), d'où (5).

– Enfin, si $\bar{r} = \bar{s} = l = +\infty$ alors on a clairement que $\gamma \in \mathfrak{L}(V_1) \cap \mathfrak{L}(V_2)$.

On peut aménager la preuve de 4.5 en ajoutant des conditions simples, de sorte que l'on obtient l'évaluation de $[\pi_n(T_1)]$ et $[\pi_n(T_2)]$ comme une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de fonctions de la forme $\sum_{\theta(k,n)} \mathbf{1}$ où θ est une condition simple. De même, en rajoutant encore les conditions simples (1), (2), (3), (4) ou (5), selon le cas, on peut écrire $[\pi_n(T_1) \cap \pi_n(T_2)]$ sous une forme encore analogue.

D'où on peut évaluer $[\pi_n(S)] = [\pi_n(T_1)] + [\pi_n(T_2)] - [\pi_n(T_1) \cap \pi_n(T_2)]$ sous cette même forme et il s'ensuit la rationalité de $P_S(T)$.

Proposition 4.6 *Soit $S \subset \mathbb{R}^m$ donné par l'équation $S = \{f \geq 0\}$ où f est une différence de deux monômes de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]$. Alors $P_S(T)$ est une fraction rationnelle.*

Références

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Ergeb. Math. 12, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1987

North-Holland, 1973

[De] J. Denef, *On the evaluation of certain p-adic integrals*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1983-1984, Progress in Math. 59, Birkhauser (1985), 25-47.

[DL] J. Denef, F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. 135 (1999), no. 1, 201–232

31, (1966) 59-64

[LJ] M. Lejeune-Jalabert, *Courbes tracées sur un germe d'hypersurface*, Amer. J. Math. 112 (1990), 525-568

[Hi] M. Hickel, *Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique*, Amer. J. Math. 115 (1993), 1299-1334

[Na] J.F. Nash Jr., *Arc structure of singularities*, Duke Math. Journ. 81 (1995), 31-38

[Pa] J. Pas, *Uniform p-adic cell decomposition and local zeta function*, J. reine angew. Math. 399 (1989), 137-172

[Pr] M. Presburger, *Uber die Vollstandigkeit eines gewissen Systems des Arithmetik...*, Comptes-rendus du I congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warsaw (1929), 92-101

[Qz] R. Quarez, *Espace des Germes d'Arcs Réels et Série de Poincaré d'un Ensemble Semi-Algébrique*, soumis aux Ann. Inst. Fourier