Algèbre Linéaire

Applications de la réduction

Ronan Quarez

6 octobre 2016

Puissances d'une matrice donnée

Des situations variées

Le calcul des puissances d'une matrice carrée apparait naturellement dans plusieurs domaines des mathématiques. Par exemple :

- résolution d'un système de suites récurrentes linéaires,
- résolution d'une équation de récurrence linéaire,
- détermination du nombre de chemins de longueur n d'un graphe simple non-étiqueté,
- étude de l'état stable d'une marche aléatoire,
- résolution d'un système différentiel linéaire.

Clé pour la modélisation

- Caractère discret : on étudie un phénomène tous les n secondes/minutes/heures/années...
- L'évolution des paramètres d'état entre l'instant n et l'instant $n+1$ est linéaire.

Bibliographie pour les exemples : TermS maths repères

Limite d'une suite de matrices

Pour $A \in M_p(\mathbb{R})$ donnée, nous serons amenés à considérer l'existence de la limite de A^n lorsque n tend vers $+\infty$. Quel sens donner à cette notion ?

Définition de la limite d'une suite de matrices

Nous dirons que la suite de matrices $A_n = (a_{i,j;n})$ de $M_p(\mathbb{R})$ est convergente si, pour tous i et j, la suite de nombres réels $(a_{i,j;n})$ converge vers un réel $a_{i,j}$. Nous noterons alors $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ avec $A = (a_{i,j}) \in M_p(\mathbb{R})$.

Méthode : calcul des itérés d'une matrice ou d'un endomorphisme

Soient A une matrice de $M_p(\mathbb{K})$ et f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.
Comment calculer explicitement A^n (resp. f^n) pour tout $n \in \mathbb{N}$?

(i) Par diagonalisation de A

Si A peut s'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale alors $A^n = PD^nP^{-1}$.

(ii) Par division euclidienne

Il existe deux polynômes Q_n et R_n tels que $X^n = P_A(X)Q_n(X) + R_n(X)$ avec $\deg R_n < \deg P_A$. Dans le cas où A possède n valeurs propres distinctes, l'évaluation de cette identité polynômiale en toute les valeurs propres donne un système de n équations linéaires en les n inconnues que sont les coefficients de $R_n(X)$. On en tire $R_n(X)$.
Par le théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit
$A^n = P_A(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A)$.

Méthode : calcul des itérés d'une matrice ou d'un endomorphisme

Si on parvient à écrire $A = B + C$ avec B et C qui commutent, on peut aussi penser à utiliser la formule de binôme de Newton.

(iii) Formule du binôme de Newton

Soient deux matrices $B, C \in M_p(\mathbb{K})$ telles que $C \cdot B = B \cdot C$. On a, pour tout entier $n \geq 0$:

$$(B + C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \cdot C^{n-k}$$

Exemple

Si $A = \alpha \mathrm{Id} + B$, alors $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k B^{n-k}$.
Si de plus B est nilpotente comme par exemple dans le cas où $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors le calcul devient très simple.

Exemple

On considère les suites (u_n) et (v_n) données par le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccl} u_{n+1} & = & \frac{1}{2}u_n - \frac{5}{2}v_n \\ v_{n+1} & = & \frac{-5}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{array} \right.$$

On peut réécrire la relation en

$$U_{n+1} = A \cdot U_n$$

avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $U_n = A^n \cdot U_0$.

Diagonalisation de A

- On calcule $P_A(X) = X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3)$. Donc A a pour valeurs propres -2 et 3.
- $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-2} \iff \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  $$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} 5x & -5y & = 0 \\ -5x & 5y & = 0 \end{array} \right.$$
  D'où $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
- D'une manière analogue,
  $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Calcul de A^n

- En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient la relation

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et, après calcul, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- D'où

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-2)^n + 3^n & (-2)^n - 3^n \\ (-2)^n - 3^n & (-2)^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

1) Suites récurrentes linéaires : deuxième exemple

Contexte

En 1990, un conflit opposait les environnementalistes aux représentants de l'industrie du bois au sujet de la population des chouettes. Un modèle mathématique fût basé sur les observations environnementales suivantes où les trois stades de croissance *bébé*, *jeune* et *adulte* sont notés respectivement x, y, z.

- Le nombre de nouveaux nés à l'année $n+1$ vaut le tiers du nombre d'adultes vivants l'année n,
- 20% des bébés nés l'année n deviennent jeunes l'année $n+1$,
- 75% des jeunes et 90% des adultes l'année n survivent et sont adultes l'année $n+1$.

Question

Qui a raison ? Les chouettes sont-elles en danger ?

1) Suites récurrentes linéaires : deuxième exemple

Modélisation matricielle

$$X_{n+1} = A \cdot X_n \quad \text{avec } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 9/10 \end{pmatrix}$$

- **Question** : Est-ce que $\lim_{n\to\infty} A^n X_0$ existe ? Si oui, comment interpréter sa valeur ?

Modélisation matricielle

$$X_{n+1} = A \cdot X_n \quad \text{avec } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 9/10 \end{pmatrix}$$

- **Question** : Est-ce que $\lim_{n\to\infty} A^n X_0$ existe ? Si oui, comment interpréter sa valeur ?
- **Réponse** : Les valeurs propres de A sont approximativement $\{0.95, -0.03 - 0.23i, -0.03 + 0.23i\}$, donc $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$.

2)Élément de cours : équation de récurrence linéaire

Théorème

Notons r_1 et r_2 les racines (dans $\mathbb{C}$) de l'équation du second degré

$$r^2 + br + c = 0$$

où b, c sont des réels. Alors, les solutions de l'équation de récurrence linéaire

$$u_{n+2} = -bu_{n+1} - cu_n$$

sont les suites de la forme :

- $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ si r_1 et r_2 sont deux réels distincts.
- $u_n = \alpha r^n + \beta n r^n$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ si $r_1 = r_2 = r$.
- $u_n = \rho^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ si $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$, avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$.

2) Equation de récurrence linéaire : exemple

Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ s'exprime sous la forme

$$F_n = \alpha\phi^n + \beta\bar{\phi}^n$$

où α, β sont deux réels à déterminer et $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les deux racines de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$.
Les valeurs initiales F_0 et F_1 conduisent à la détermination de α et β et on obtient

$$F_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\phi^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\bar{\phi}^n$$

2) Equation de récurrence linéaire : version matricielle

L'équation de récurrence linéaire $u_{n+2} = -bu_{n+1} - cu_n$ se traduit matriciellement par $U_{n+1} = AU_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} -b & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

Le polynôme caractéristique de A est exactement donné par l'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$. Ainsi, les racines de l'équation caractéristique sont exactement les valeurs propres de A. D'où le calcul de A^n qui donne la valeur de U_n puis de u_n.

Démonstration du théorème lorsque les racines sont réelles distinctes

- Division euclidienne.
  Il existe deux polynômes Q_n et R_n tels que
  $X^n = P_A(X)Q_n(X) + R_n(X)$ avec $\deg R_n < \deg P_A$ ou encore
  $R_n(X) = \alpha_n X + \beta_n$ avec $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$.
- Substitution en les valeurs propres.
  Dans le cas où la matrice A possède deux valeurs propres réelles distinctes r_1 et r_2, on a :

  $$\begin{cases} r_1^n = \alpha_n r_1 + \beta_n \\ r_2^n = \alpha_n r_2 + \beta_n \end{cases}$$

  D'où les valeurs de α_n et β_n.
- Cayley-Hamilton.
  On en déduit $A^n = P_A(A)Q_n(A) + R_n(A) = \alpha_n A + \beta_n \mathrm{Id}$.

2) Equation de récurrence linéaire : autres démonstrations

Diagonalisation

La matrice A est diagonalisable de valeurs propres r_1 et r_2 donc il existe une matrice inversible P telle que $A = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

D'où $A^n = P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vue en exercice : “sans recours” à la réduction

- L'application qui à (u_n) suite récurrente linéaire associe ses deux premiers termes (u_0, u_1) est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. En particulier l'espace des solutions est de dimension 2.
- On vérifie que $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre, donc une base, de l'espace des solutions.

3) Matrice d'adjacence d'un graphe

Matrice d'adjacence

La matrice $A = (a_{i,j})$ est telle que $a_{i,j} = 1$ s'il existe une arrête reliant le sommet i au sommet j ; sinon $a_{i,j} = 0$.

Propriété

Le coefficient $a_{i,j}^{(n)}$ de A^n donne le nombre de chemin de longueur k reliant le sommet i au sommet j.
Si le calcul de A^n explicite en fonction de n à la main est délicat pour une "grande" matrice A, on peut toujours faire appel aux TICE pour les premières valeurs de n.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple (suite)

Le graphe simple orienté non étiquetté est de la forme

$$\begin{array}{cccc}
3 & \longrightarrow & 5 & \\
\uparrow & \nearrow & \downarrow & \\
\underset{\circlearrowleft}{2} & \longleftarrow & \underset{\circlearrowleft}{1} & \underset{\circlearrowleft}{4}
\end{array}$$

Et on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Processus aléatoire : un exemple

Contexte

Une entreprise de location de voitures à la journée propose à ses clients de rendre le véhicule loué indifféremment à ses agences A ou B. On constate que

- 70% des voitures louées en A sont rendues en A, les 30% restant l'étant en B,
- 85% des voitures louées en B sont rendues en B, les 15% restant l'étant en A.

Question

Comment prévoir l'évolution du stock de voitures entre les agences ?

4) Processus aléatoire : un exemple

Modélisation matricielle

La variable aléatoire modélisant la position des véhicules au soir de la n-ième journée est noté $U_n = (a_n, b_n)$ où a_n désigne la probabilité d'être en A et b_n celle d'être en B. La loi de probabilité de la variable U_0 modélise la répartition initiale des véhicules entre les deux agences.

$$U_{n+1} = U_n \cdot T \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Question

Est-ce que $\lim_{n\to\infty} U_0 \cdot T^n$ existe ?

Attention notation !

Changement de notation en usage chez les probabilistes : U_n est un vecteur *ligne*.

Solution

- On peut diagonaliser T sous la forme

$$T = PDP^{-1}$$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et, après calcul, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- D'où

$$T^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(0,55)^n & 2-2(0,55)^n \\ 1-(0,55)^n & 2+(0,55)^n \end{pmatrix}.$$

- Donc $\lim_{n\to\infty} T^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et, quel que soit l'état initial U_0, on a $\lim_{n\to\infty} U_0 \cdot T^n = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4) Élément de cours : matrice de transition

Sur un espace probabilisé Ω, on considère un système complet d'événements $A_{1,n}, A_{2,n} \ldots, A_{p,n}$ qui modélise les états possibles d'un processus aléatoire à l'instant $n \in \mathbb{N}$. On introduit la variable aléatoire $U_n = (P(A_{1,n}), P(A_{2,n}), \ldots, P(A_{p,n}))$.

Définition

Pour $1 \leq i, j \leq p$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que le processus se retrouve dans l'état $A_{j,n+1}$ à l'instant $n+1$ sachant qu'il était dans l'état $A_{i,n}$ à l'instant précédent. Cette probabilité, indépendante de n dans les processus aléatoires que nous considérons, s'appelle probabilité de transition de l'état i vers l'état j. La matrice $A = (a_{i,j})$ est la matrice de transition du processus.

Théorème

Pour tout entier n, on a $U_{n+1} = U_n \cdot A$.

Démonstration

C'est une reformulation de la formule des probabilités totales.

4)Élément de cours : formule des probabilités totales

Proposition

Dans un espace probabilisé Ω, soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événements tels que $P(A_i) \neq 0$ pour tout i. Alors, pour tout événement A, on a :

$$P(A) = P_{A_1}(A) \times P(A_1) + \ldots + P_{A_n}(A) \times P(A_n)$$

Remarque

La quantité $P_{A_i}(B)$ n'a de sens que si $P(A_i) \neq 0$ ce qui explique les hypothèses. On peut cependant étendre la formule des probabilités totales même si $P(A_i) = 0$; il suffit de poser une valeur arbitraire pour $P_{A_i}(B)$ et la formule reste valable.

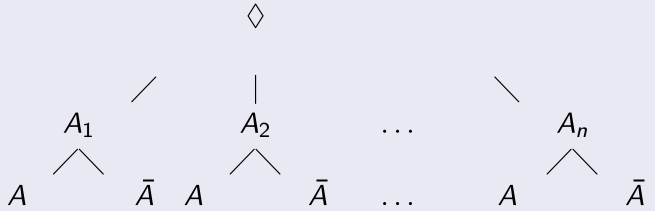
4)Élément de cours : formule des probabilités totales

Proposition

Dans un espace probabilisé Ω, soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événements tels que $P(A_i) \neq 0$ pour tout i. Alors, pour tout événement A, on a :

$$P(A) = P_{A_1}(A) \times P(A_1) + \ldots + P_{A_n}(A) \times P(A_n)$$

Représentation sous forme d'un arbre



4) Élément de cours : matrice stochastique

Définition

On dit que $A \in M_p(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et la somme de chaque ligne est égale à 1.

Théorème

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et $U_0 = (a_1, \dots, a_p)$ un état initial tel que $\sum_{i=1}^{p} a_i = 1$. Alors,

1. toutes les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C}$ de A sont de module $|\lambda| \leq 1$,
2. 1 est val. propre et $(1, 1, \dots, 1)$ est un vect. propre associé,
3. si 1 est valeur propre simple et si toutes les valeurs propres complexes $\lambda \neq 1$ sont de module $|\lambda| < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} A^n$ existe et $\lim_{n\to\infty} U_0 \cdot A^n$ ne dépend pas de l'état initial U_0.

En dimension 2

Une matrice stochastique $A \in M_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \mathrm{Tr}\,(A) - 1$.

Élément de cours : matrice stochastique

Démonstration du théorème

1. Pour v vecteur propre associé à la valeur propre λ, on considère i_0 un indice tel que $|v_{i_0}|$ est maximal. Alors $|\lambda||v_{i_0}| = |\sum_j a_{i_0,j} v_j| \leq |\sum_j a_{i_0,j}||v_{i_0}| = |v_{i_0}|$, d'où $|\lambda| \leq 1$.
2. On vérifie immédiatement que $(1, 1, \ldots, 1)$ est vect. propre associé à la valeur propre 1.
3. On considère, pour simplifier, le cas où A est diagonalisable. On écrit alors $A = PDP^{-1}$ avec la matrice D diagonale de diagonale $(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ telle que $|\lambda_i| < 1$ pour tout i et P ayant comme première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Donc D^n a pour limite la matrice diagonale de diagonale $(1, 0, \ldots, 0)$, d'où $U_0 \cdot P \cdot D^n$ a pour limite le vecteur ligne $(1, 0, \ldots, 0)$ car la somme des coefficients de U_0 vaut 1. D'où $\lim_{n \to \infty} U_0 \cdot A^n$ coïncide avec la première ligne de P^{-1}.

5) Système différentiel linéaire : un exemple

Exemple

On cherche les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ solutions du système différentiel linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) & = & x(t) + y(t) \end{array} \right.$$

On peut réécrire le système sous la forme $X'(t) = A \cdot X(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, les solutions sont données, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$X(t) = \exp(A \cdot t) \cdot X(0),$$

avec $\exp(A \cdot t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 2e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$.

Calcul de l'exponentielle d'une matrice : voir calcul des puissances !