

Aide à la décision multicritère : introduction aux méthodes d'analyse multicritère de type ELECTRE

Amir NAFI

Maître de conférences, Unité Mixte de Recherche Cemagref-Engées en Gestion des Services Publics, 1 quai Koch 67070 Strasbourg, anafi@engees.u-strasbg.fr. 03.88.24.82.93.

Caty WEREY

Chercheur

Unité Mixte de Recherche Cemagref-Engées en Gestion des Services Publics, 1 quai Koch 67070 Strasbourg, cwerey@engees.u-strasbg.fr, 03.88.24.82.53.

Mots clés : Aide à la décision, critères, pseudo-critère, poids, seuils, acteurs, sur-classement, rangement, affectation, classement.

Sommaire

1	Introduction	1
2	L'aide à la décision et les méthodes multicritère	2
2.1	Définition du problème et objet de la décision, l'action	3
2.2	L'analyse des conséquences et détermination des critères	4
2.3	Choix d'une méthode d'aide à la décision multicritère	6
2.4	Performance des actions	7
3	L'agrégation des critères et l'analyse multicritère	7
4	Illustration des méthodes multicritères	8
4.1	La méthode Electre I	8
4.2	Electre-Tri	11
4.3	Electre-III	15

1 Introduction

L'aide à la décision multicritère se présente comme une alternative aux méthodes d'optimisation classiques basées sur la définition d'une fonction unique, souvent exprimée en terme économique (monétaire) et qui reflète la prise en compte de plusieurs critères, souvent incommensurables. L'intérêt des méthodes multicritères est de considérer un ensemble de critères de différentes nature (exprimés en unité différentes), sans nécessairement les transformer en critères économiques, ni en une fonction unique. Il ne s'agit pas de rechercher un optimum, mais une solution compromis qui peut prendre diverses formes : choix, affectation ou classement. Plusieurs méthodes existent dans la littérature, dans le cadre de ce cours nous allons définir le cadre théorique et les aspects méthodologies des méthodes multicritères, ensuite nous allons illustrer leurs approches en étudiant 3 types de méthodes multicritère : Electre I, Electre-tri et Electre III.

2 L'aide à la décision et les méthodes multicritère

D'après (ROY, 1985) « **L'aide à la décision** est l'activité de celui qui, prenant appui sur des **modèles** clairement explicités mais non nécessairement complètement formalisés, aide à obtenir des **éléments de réponses** aux questions que se pose un intervenant dans le processus de décision, éléments concourant à **éclairer la décision** et normalement à prescrire, ou simplement à favoriser un comportement de nature à **accroître la cohérence** entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé d'autre part. ». L'aide à la décision est donc un processus qui utilise un ensemble d'informations disponibles à un instant donné, afin de formuler un problème et aboutir à une décision sur un objet précis. Dans le cadre de la décision multicritère, l'objet de la décision est formé par un ensemble d'actions ou alternatives. Pour (Roy, 1996) les problèmes réels peuvent être formulés à l'aide des méthodes d'analyse multicritère, selon trois formulations de bases : problématique de choix, notée P_α , la problématique de tri ou d'affectation notée P_β et la problématique de rangement noté P_γ . Voir Tableau 1.

Tableau 1. Identification des types de problématique

Problématique	Objectif	Résultat
P_α	Eclairer la décision par le choix d'un sous-ensemble aussi restreint que possible en vue d'un choix final d'une seule action. (optimums et satisfecums)	Un choix ou une procédure de sélection.
P_β	Eclairer la décision par un tri résultant d'une affectation de chaque action à une catégorie, les catégories étant définies a priori en fonction des normes ayant trait à la suite à donner aux actions qu'elles sont destinées à recevoir	Un tri ou une procédure d'affectation
P_γ	Eclairer la décision par un rangement obtenu en regroupant tout ou partie (les « plus satisfaisantes ») des actions en classes d'équivalence, ces classes étant ordonnées, de façon complète ou partielle, conformément aux préférences	Un rangement ou procédure de classement
P_δ	Eclairer la décision par une description, dans un langage approprié, des actions et de leurs conséquences	Une description ou une procédure cognitive

Le processus de décision multicritère peut être décrit par la **Figure 1**. Il est caractérisé par 4 étapes essentielles :

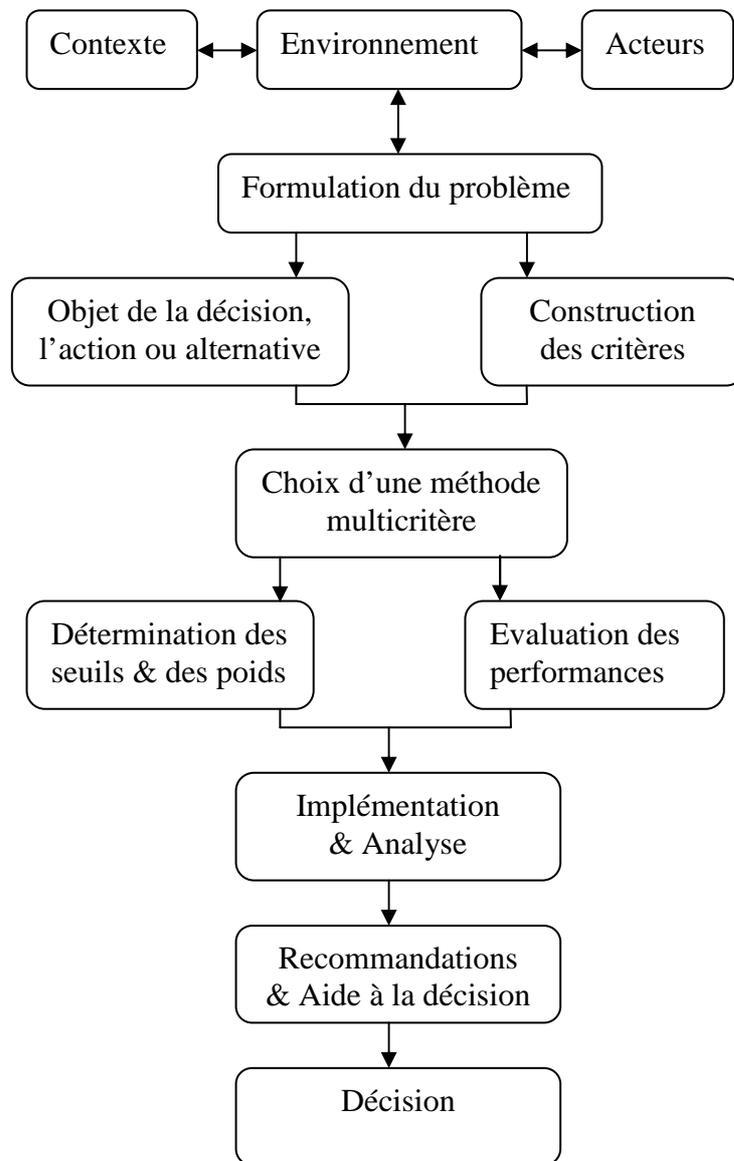


Figure 1. Le processus de décision multicritère

2.1 Définition du problème et l'objet de la décision, l'action

La définition du problème requiert une compréhension de la situation étudiée, du contexte et des acteurs impliqués dans la prise de décision. L'interaction avec les différents acteurs permet de comprendre le processus de décision, les enjeux, l'objet de la décision et la nature de la décision à prendre. Il s'agit donc de définir la nature du problème posé en le formulant soit en une problématique de choix, de tri ou de rangement. La détermination de l'objet de la décision consiste à identifier l'ensemble des actions ou alternatives sur lesquelles va porter la décision.

« Une action a est la représentation d'une éventuelle contribution à la décision globale susceptible, eu égard à l'état d'avancement du processus de décision, d'être envisagée de façon autonome et de servir de point d'application à l'aide à la décision ». C'est l'objet de la décision.

Une action est dite *globale*, si, dans sa mise en exécution, elle est exclusive de toute action introduite dans le modèle ; dans le cas contraire, elle est dite fragmentaire. Une action *potentielle* est une action réelle ou fictive provisoirement jugée réaliste par un acteur au moins. On note par A est l'ensemble des actions potentielles.

2.2 L'analyse des conséquences et détermination des critères

Il s'agit en effet d'identifier et mesurer les conséquences des actions sur lesquelles va porter la décision. Les critères découlent des conséquences des actions. Souvent, une action a plusieurs conséquences, ainsi la conséquence d'une action selon un critère donné est évaluée par une fonction g (à valeurs réelles) définies sur l'ensemble A des actions potentielles de telle sorte qu'il soit possible de raisonner ou de décrire le résultat de la comparaison de deux actions a et b relativement à partir des nombres $g(a)$ et $g(b)$. L'évaluation de l'action sera donc effectuer sur un ensemble de critères. On distingue le *vrai-critère* et le *pseudo-critère*.

Pour le vrai critère, en considérant deux actions a et b à comparer, deux situations sont possibles :

$$g(b) = g(a) \Leftrightarrow b I_g a \text{ (indifférence)}$$

et

$$g(b) > g(a) \Leftrightarrow b P_g a \text{ (préférence stricte)}$$

C'est une vision peu réaliste car une simple différence $g(b) - g(a)$ n'est pas significative d'une préférence stricte.

Pour le pseudo-critère on associe à la fonction critère g deux fonctions seuils $q_g(g(a))$ exprimant un *seuil d'indifférence* et $p_g(g(a))$ exprimant un *seuil de préférence*.

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow b S_b a$$

S_b : « *aussi bon que* » ou, S est une relation de sur-classement, c'est à dire que b est au moins aussi bon que a sur une majorité de critères sans être vraiment plus mauvais relativement sur les autres critères. On dira dans ce cas que b surclasse a , on notera $b S_b a$. On introduit des seuils (constants ou fonction de g) tels que :

$$g(b) - g(a) \leq q_g(g(a)) \Leftrightarrow b I_g a$$

$$p_g(g(a)) < g(b) - g(a) \Leftrightarrow b P_g a$$

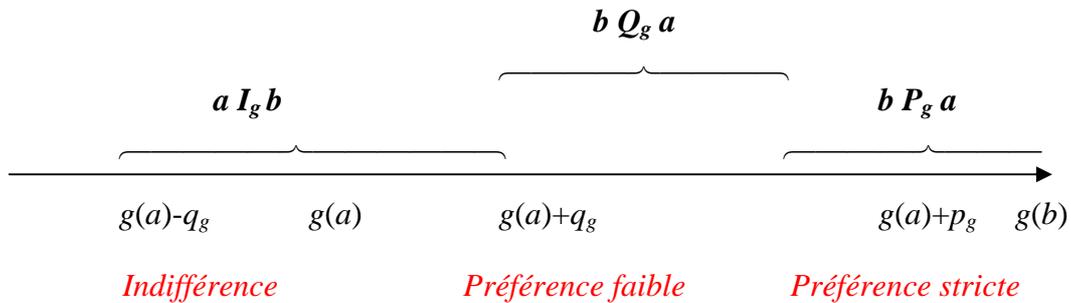
Où q_g est un seuil dit d'indifférence et p_g un seuil dit de préférence.

La situation non couverte par ces deux éventualités, à savoir :

$$q_g(g(a)) < g(b) - g(a) \leq q_g(g(a))$$

correspond à une situation d'hésitation (indétermination) entre l'indifférence et la préférence stricte appelée préférence faible et notée Q_g .

Ce qui peut se traduire ainsi :



Ces différentes situations sont reprises dans le Tableau 2.

Tableau 2. Situations possibles lors de la comparaison de deux actions

Situation	Définition	Relation binaire (propriétés)
<i>Indifférence</i>	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une équivalence entre deux actions.	I : relation symétrique réflexive
<i>Préférence stricte</i>	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence significative en faveur de l'une (identifiée) des deux actions.	P : relation asymétrique (irréflexive)
<i>Préférence faible</i>	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui infirment une préférence stricte en faveur de l'une (identifiée) des deux actions. Mais ces raisons sont insuffisantes pour en déduire soit une préférence stricte en faveur de l'autre, soit une indifférence entre ces deux actions.	Q : relation asymétrique (irréflexive)
<i>Incomparabilité</i>	Elle correspond à l'absence de raisons claires et positives justifiant l'une des trois situations précédentes	R : relation symétrique irréflexive

La construction des critères est une étape délicate qui nécessite une compréhension du problème posé et une interaction avec les acteurs impliqués dans la prise de décision. Il s'agit d'identifier les enjeux et la nature des conséquences possibles sur l'objet de la décision, c'est à dire les actions considérées. La définition des critères nécessite par la suite une évaluation de la contribution et l'influence de chaque critère dans la décision finale. Ceci se traduit par des pondérations qui sont définies par les acteurs impliqués ou bien obtenus par un processus itératif suite à l'interaction avec les acteurs concernés.

Les critères à retenir pour juger quelle est l'action préférée, doivent présenter les conditions suivantes :

- ❑ L'aide multicritère à la décision doit permettre de juger de l'intérêt économique des différentes actions entre elles. Il s'agit donc de construire une famille de critères qui puissent représenter, d'une façon aussi proche que possible, les coûts et les avantages des actions, bénéfiques.
- ❑ Les critères doivent être d'une part, suffisamment nombreux et précis pour bien discriminer entre elles les différentes actions ; d'autre part, ne pas être redondant pour éviter de majorer l'importance attribuée à une dimension d'analyse.
- ❑ Les critères peuvent être de nature différente. On définit des familles de critères : économiques, sociaux, environnementaux, techniques. Chaque famille de critères peut contenir un ou plusieurs critères.

Les critères doivent également vérifier des axiomes :

- ❑ Axiome d'exhaustivité : si deux actions ont les mêmes vecteurs performances (mêmes conséquences pour tous les critères) alors il faut être sûr que les acteurs sont bien indifférents entre les deux actions.
- ❑ Axiome de cohésion : En partant de deux actions qui sont jugées équivalentes, si l'on accroît la performance de la première sur un critère quelconque, alors elle apparaît « *comme au moins aussi bonne* » que la seconde action inchangée.
- ❑ Axiome de non-redondance : un critère est redondant si son retrait de la famille laisse une nouvelle famille vérifiant les deux axiomes précédents.

2.3 Choix d'une méthode d'aide à la décision multicritère

Cette étape dépend de la nature du problème posé. Plusieurs méthodes ont été développées, le Tableau 3 identifie certaines méthodes en fonction de la nature du problème étudié.

Tableau 3. Choix de la méthode multicritère (Roger et al., 2000)

Critères	Nature du problème		
	α (sélection)	β (affectation)	γ (classement)
Vrai critère	I	-	II
Pseudo-critère	IS	Tri	III, IV

2.4 Performance des actions

Lorsque l'analyse des actions a conduit à la construction d'un seul critère, on peut réaliser une optimisation sur ce critère, ce qui peut être simple lorsque le nombre d'action est faible, sinon il faut avoir recours à des outils plus ou moins compliqués.

Dans le cas fréquent, où l'analyse des conséquences des actions potentielles a conduit à construire plusieurs critères, c'est l'analyse multicritère qui permet de donner des réponses au problème posé. Pour chaque action considérée, et pour chaque critère un seuil de préférence p , d'indifférence q et un seuil de veto v sont estimés. Chaque critère se voit attribué un poids k traduisant sa contribution dans la décision finale. Le résultat de l'analyse des conséquences est présenté dans **un tableau de performances**. Voir Tableau 4.

Tableau 4. Tableau de performances

Critères	g_1	g_2	...	g_j	...	g_n
Poids	k_1	k_2		k_j		k_n
Seuils	p_1	p_2	...	p_j	...	p_n
	q_1	q_2	...	q_j	...	q_n
	v_1	v_2	...	v_3	...	v_n
Actions						
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$...	$g_j(a_1)$...	$g_n(a_1)$
a_2
.
.
a_i	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$...	$g_j(a_i)$...	$g_n(a_i)$
.						
.						
a_m	$g_1(a_m)$	$g_2(a_m)$...	$g_j(a_m)$...	$g_n(a_m)$

3 L'agrégation des critères et l'analyse multicritère

Dans le cadre de ce cours, on distingue entre l'approche d'agrégation classique et les approches dites de *sur-classement* proposées par les méthodes ELECTRE. L'approche classique se base sur l'agrégation des critères de décision en un critère unique. Elle consiste à bâtir un critère unique de synthèse en utilisant une fonction d'agrégation V en posant : $g(a) = V(g_1(a), g_2(a), g_3(a), \dots, g_n(a))$. Deux actions quelconques deviennent ainsi comparables grâce à l'utilisation des différents critères présentés plus haut. Une fois obtenu le critère de synthèse, on peut simplement élaborer une prescription dans une des trois problématiques : α , β , γ . La fonction d'agrégation V prend généralement une des deux formes :

1. agrégation par somme pondérée : $g(a) = \sum_{j=1}^n k_j \cdot g_j(a)$

2. agrégation additive : $g(a) = \sum_{j=1}^n k_j \cdot v_j [g_j(a)]$

Les poids k_j sont des coefficients strictement positifs et les v_j des fonctions monotones strictement croissantes. Il n'est pas restrictif d'imposer $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ et $0 \leq v_j \leq 1$.

Par opposition à l'approche classique, l'approche dite de *sur-classement* vise à construire sur l'ensemble A une relation de sur-classement globale S enrichissant la relation de dominance.

Elle vise à modéliser la part des préférences globales que l'on est en mesure d'asseoir de façon suffisamment probante.

La relation S est généralement construite à l'aide d'un test de sur-classement appliqué à toutes les paires d'actions de A . Les méthodes ELECTRE utilisent une relation de sur-classement pour l'agrégation des critères de décision.

4 Illustration des méthodes multicritère

Nous présentons dans ce qui suit trois méthodes multicritères, en fonction de la problématique considérée. La première méthode Electre I, est préconisée pour répondre à une problématique de *choix*. La méthode Electre-Tri est préconisée pour les problématiques de *tri ou d'affectation*. La méthode Electre III est utilisée pour répondre à des problématiques de *rangement ou de classement*.

4.1 La méthode Electre I

Cette méthode proposée par (Roy,1968) permet de résoudre les problèmes multicritère de *choix*. Cette méthode permet d'identifier le sous-ensemble d'actions offrant le meilleur compromis possible. Souvent utilisée dans le choix de projets concurrents, afin d'identifier le sous-ensemble de projets le plus performant sur la base des critères considérés. Dans le cas de la méthode Electre I, on définit de vrai-critères, on retrouve également une notion de concours dans cette méthode; retenir les meilleurs.

On considère un ensemble A de m actions, qui représentent l'objet de la décision, dont le but est d'identifier un sous-ensemble d'actions offrant un meilleur compromis parmi l'ensemble de départ. On définit pour chaque critère une fonction d'évaluation g_j (où $j=1$ à n , n est le nombre de critères), pour chaque critère, on évalue un poids k_j qui augmente avec l'importance du critère. L'indice de concordance pour deux actions a et b est noté par $C(a,b)$, compris entre 1 et 0, il mesure la pertinence de l'assertion « a surclasse b », comme suit :

$$C(a,b) = \frac{\sum_{j: g_j(a) \geq g_j(b)} k_j}{K} \text{ avec } K = \sum_{j=1}^n k_j$$

L'indice de discordance $D(a,b)$ est défini par :

$$D(a,b) = 0 \quad \text{si } \forall j, g_j(a) \geq g_j(b)$$

Sinon

$D(a,b) = \frac{1}{\delta} \max_j [g_j(b) - g_j(a)]$ avec δ est la différence maximale entre le même critère pour deux actions donnée.

La relation de sur-classement pour Electre I est construite par la comparaison des indices de concordance et de discordance à des seuils limites de concordance \hat{c} et de discordance \hat{d} .

Ainsi, a surclasse b , si :

$$a S b \Leftrightarrow C(a,b) \geq \hat{c} \text{ et } D(a,b) \leq \hat{d}.$$

Exemple 1 adapté de (Roger et al, 1999)

L'exemple traite du choix d'un projet, parmi 6 projets concurrents pour la réalisation d'une raffinerie. Chaque projet est évalué sur la base de 5 critères environnementaux

- C_{r1} : Nuisance sonore
- C_{r2} : Séparation du territoire
- C_{r3} : Pollution de l'air
- C_{r4} : Impact sur l'aménagement du territoire
- C_{r5} : Impact sur les activités récréatives

L'importance de chaque critère dans la prise de décision est traduite par un poids k_j tel que

Tableau 5. Poids des critères

Critères	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}
Poids (k_j)	3	2	3	1	1

Chaque projet est évalué en fonction des critères retenus à l'aide d'une échelle qualitative et des scores. Plus le score est élevé, plus les impacts du projet sur l'environnement sont moindres. Le tableau de performance est donné dans le tableau suivant :

Tableau 6. Tableau de performances

Projets	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}
P_1	10	20	5	10	16
P_2	0	5	5	16	10
P_3	0	10	0	16	7
P_4	20	5	10	10	13
P_5	20	10	15	10	13
P_6	20	10	20	13	13

La problématique à résoudre est de choisir le sous-ensemble de projets avec le moins d'impacts sur l'environnement. On propose d'utiliser ELECTRE I. Nous présentons un exemple de calcul de l'indice de concordance :

$$C(P_1, P_2) = \frac{3+2+3+0+1}{10} = 0.9 \quad , \quad C(P_1, P_3) = \frac{3+2+3+0+1}{10} = 0.9$$

$$C(P_2, P_1) = \frac{0+0+3+0+1}{10} = 0.4 \quad , \quad C(P_3, P_1) = \frac{0+0+0+1+0}{10} = 0.1$$

La matrice des indices de concordance est donnée par :

Tableau 7. Matrice de concordance

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	-	0.9	0.9	0.4	0.4	0.3
P_2	0.4	-	0.8	0.4	0.1	0.1
P_3	0.1	0.6	-	0.3	0.3	0.3
P_4	0.7	0.9	0.7	-	0.5	0.4
P_5	0.7	0.9	0.9	1.0	-	0.6
P_6	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	-

L'indice de discordance est calculé pour une valeur de $\delta = 20 - 0 = 20$

$$D(P_1, P_2) = \frac{6}{20} = 0.30 \quad , \quad D(P_1, P_3) = \frac{6}{20} = 0.30$$

$$D(P_2, P_1) = \frac{15}{20} = 0.75 \quad , \quad D(P_3, P_1) = \frac{10}{20} = 0.50$$

La matrice de discordance est obtenue comme suit :

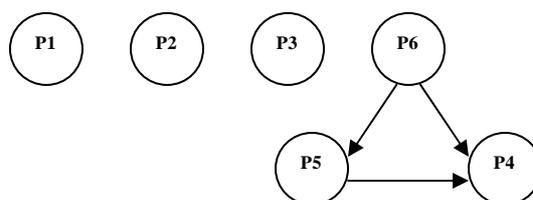
Tableau 8. Matrice de discordance

Projets	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	-	0.30	0.30	0.50	0.50	0.75
P_2	0.75	-	0.25	1.00	1.00	1.00
P_3	0.50	0.25	-	1.00	1.00	1.00
P_4	0.75	0.30	0.30	-	0.25	0.50
P_5	0.50	0.30	0.30	0.0	-	0.25
P_6	0.50	0.15	0.15	0.0	0.0	-

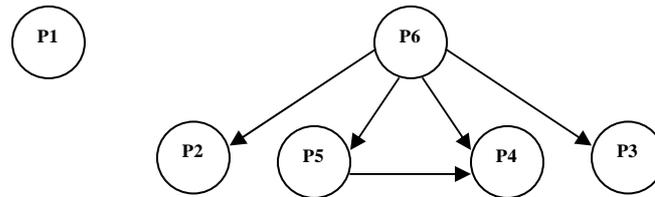
L'intérêt de la méthode Electre I est d'isoler un sous ensemble de solutions, dans notre cas

identifier les projets avec le moins d'impacts sur l'environnement. En considérant $\hat{c} = 1$ et

$\hat{d} = 0$, P_1, P_2, P_3 et P_6 sont incomparables, par contre $P_6 S P_4$, $P_6 S P_5$ et $P_5 S P_4$. On obtient le graphe de sur-classement suivant.



Le résultat obtenu est sensible aux valeurs des seuils \hat{c} et \hat{d} . A titre d'exemple, en posant $\hat{c} = 0.9$ et $\hat{d} = 0.15$, on obtient les résultats suivants : $P_6 S P_2$, $P_6 S P_3$, $P_6 S P_4$ et $P_6 S P_5$. Dans ce cas les projets à retenir seraient les projets P_1 et P_6 .



4.2 Electre-Tri

Electre-tri est une méthode qui permet de résoudre des problèmes d'affectation, le principe de la méthode est d'assigner un ensemble de m d'alternatives ou d'actions noté $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ sur lesquelles se base la décision à des catégories ou classes bien définies. On note l'ensemble $F = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des critères. Chaque action de l'ensemble A sera évaluée par une fonction réelle, exprimant l'évaluation de l'action pour un critère donné, on note $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ l'évaluation de l'action pour les critères considérés.

L'importance des critères dans la prise de décision est évaluée par un ensemble de poids $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Par opposition aux autres approches, les alternatives qui constituent l'objet de la décision ne sont pas comparées entre elles, mais à des seuils traduisant la frontière entre les h classes prédéfinies, noté $C = \{C_1, C_2, \dots, C_h\}$. Chaque alternative sera comparée aux frontières de chaque catégorie, formant un profil $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_h\}$. La Figure 2 illustre la problématique de tri ou d'affectation.

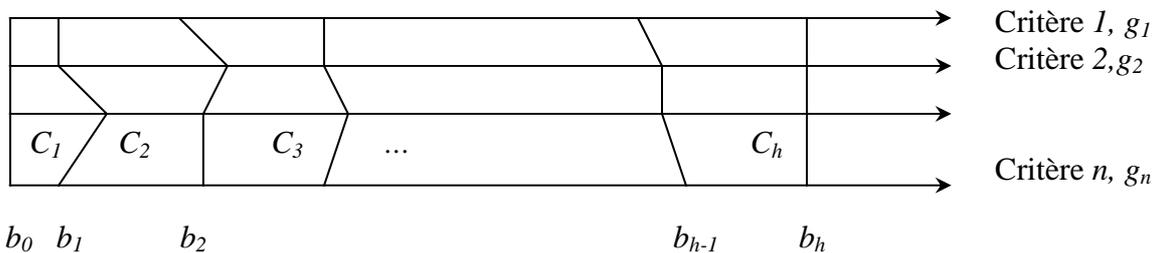


Figure 2. Illustration de la problématique de tri

L'affectation des actions dans les catégories se base sur le concept de sur-classement. Une action a de l'ensemble A surclasse b_h , noté $a S b_h$, si a est aussi bonne que b_h sur tous les critères et a n'est pas mauvaise que b_h sur la majorité des critères (a_h peut être mauvaise que b_h sur certains critères).

L'approche ELECTRE-TRI s'appuie sur les étapes suivantes :

1. Evaluation des indices de concordance

$$c_j(a, b_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b_h) - g_j(a) \geq p_j(b_h) \\ 1 & \text{si } g_j(b_h) - g_j(a) \leq q_j(b_h) \\ \frac{p_j(b_h) + g_j(a) - g_j(b_h)}{p_j(b_h) - q_j(b_h)} & \text{sinon} \end{cases}$$

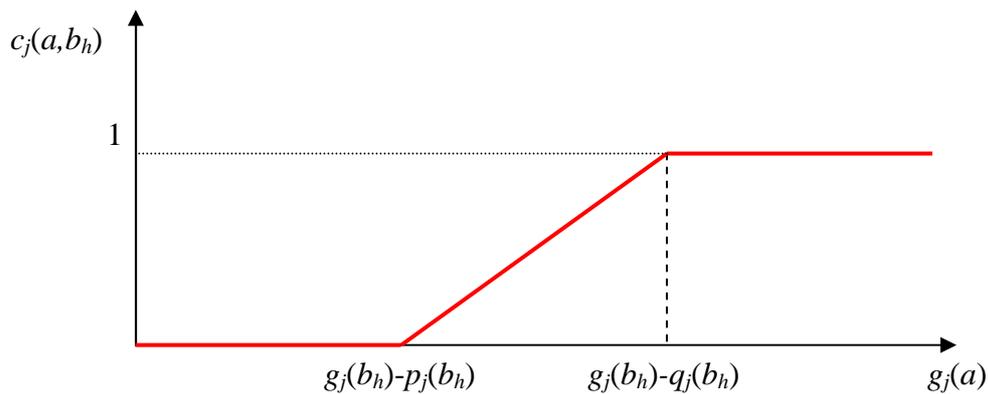


Figure 3. Détermination de l'indice de concordance

2. Calcul de l'indice de concordance global :

$$C(a_h, b_h) = \frac{\sum_{j \in F} k_j c_j(a, b_h)}{\sum_{j \in F} k_j}$$

3. Calcul de l'indice de discordance :

$$d_j(a, b_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_h) \leq g_j(b_h) + p_j(b_h) \\ 1 & \text{si } g_j(a_h) > g_j(b_h) + v_j(b_h) \\ \in [0,1] & \text{sinon} \end{cases}$$

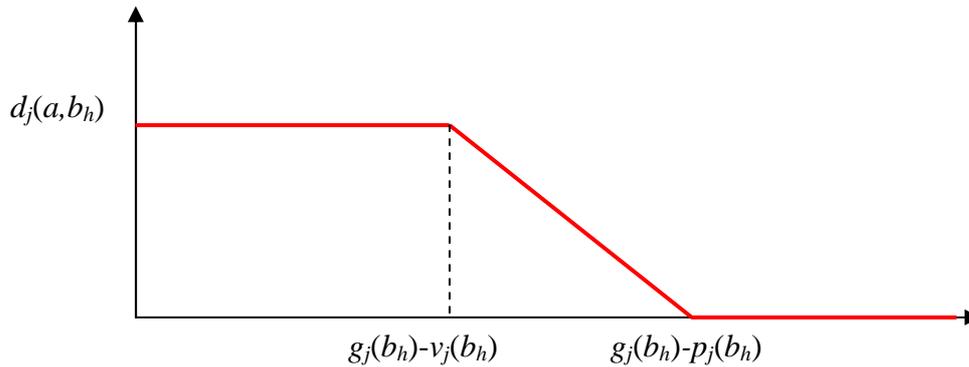


Figure 4. Détermination de l'indice de discordance

4. Calcul de l'indice de crédibilité et définition de la relation de sur-classement floue :

$$\sigma(a, b_h) = C(a, b_h) \prod_{j \in \bar{F}} \frac{1 - d_j(a, b_h)}{1 - C(a, b_h)}$$

Avec $\bar{F} = \{j \in F : d_j(a, b_h) > C(a, b_h)\}$

On définit l'indice de coupe λ comme le paramètre qui détermine la situation de préférence entre a et b_h .

La relation de sur-classement définie se base sur l'indice de crédibilité $\sigma(a, b_h)$ et l'indice de coupe λ tel que :

- $\sigma(a, b_h) \geq \lambda$ et $\sigma(b_h, a) \geq \lambda \Rightarrow a S b_h$ et $b_h S a \Rightarrow a I b_h$, a est indifférent à b_h .
- $\sigma(a, b_h) \geq \lambda$ et $\sigma(b_h, a) < \lambda \Rightarrow a S b_h$ et b_h ne surclasse pas $a \Rightarrow a$ surclasse b_h
- $\sigma(a, b_h) < \lambda$ et $\sigma(b_h, a) \geq \lambda \Rightarrow a$ ne surclasse pas b_h et $b_h S a \Rightarrow b_h$ surclasse a .
- $\sigma(a, b_h) < \lambda$ et $\sigma(b_h, a) < \lambda \Rightarrow a$ ne surclasse pas b_h et b_h ne surclasse pas a , dans ce cas a et b sont incomparables.

Deux procédures d'affectation sont possibles :

1. Procédure pessimiste

- a) Comparer successivement a à b_i , tel que $i=p, p-1, \dots, 0$
- b) Si $a S b_h$, a est assigné à la catégorie C_{h+1} .

2. Procédure optimiste

- a) Comparer successivement a à b_i , tel que $i=1, 2, \dots, p$
- b) Si $b_h S a$, a est assigné à la catégorie C_h .

Exemple 2

L'exemple traite de la mise en place d'une démarche de gestion patrimoniale des réseaux d'assainissement. A partir d'inspections caméra des tronçons d'assainissement, on définit un ensemble de critères pour décrire l'état des tronçons, 5 critères¹ sont considérés comme suit :

- ❑ C_{r1} : Bouchage du tronçon
- ❑ C_{r2} : Effondrement de la paroi du tronçon
- ❑ C_{r3} : Ensablement du tronçon
- ❑ C_{r4} : Détérioration de la capacité hydraulique
- ❑ C_{r5} : Présence d'infiltrations

L'analyse multicritère vise à définir des classes homogènes de tronçons en fonction de leur état. En concertation avec le gestionnaire du réseau, trois classes sont définies état : « Bon », « Moyen » et « Mauvais ». La problématique posée étant une problématique d'affectation, on utilise Electre-tri pour affecter les tronçons aux catégories définies. On considère un ensemble de tronçon à classer, les performances de chaque tronçon sont contenues dans le Tableau 9.

Tableau 9. Evaluation des critères, tableau de performances

Tronçons	Critères				
	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}
T_1	2.63	5.26	52.63	84.21	26.32
T_2	0	0	492.31	492.31	0
T_3	0	10.13	20.25	20.25	405.06
T_4	0	0	0	0	0
T_5	0	210.53	280.7	280.7	1171.93

Comme l'affectation se fait dans 3 catégories distinctes, deux profils b_1 et b_2 sont définis, où b_1 représente la frontière entre la classe état « Bon » et état « Moyen », et b_2 la frontière entre la catégorie état « Moyen » et état « Mauvais ». La valeur des seuils et poids des critères sont définis dans le Tableau 10.

Tableau 10. Définition des seuils et poids des critères

	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}
$g(b_1)$	0.5	2.23	37.53	37.96	40.67
$q_j(b_1)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$p_j(b_1)$	1	1	1	1	1
$g(b_2)$	7	29	126.7	128	300
$q_j(b_2)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$p_j(b_2)$	1	1	1	1	1
k_j	0.1	0.35	0.1	0.1	0.35

L'implémentation du cas d'étude sur le Logiciel ELECTRE-TRI® permet d'obtenir une affectation des tronçons selon deux procédures : pessimiste et optimiste, le résultat de l'affectation est présenté dans le Tableau 11.

Tableau 11. Résultat de l'affectation, indice de coupe $\lambda=0.76$.

¹ . Les critères représentent des dysfonctionnements définis dans le cadre d'une méthodologie pour la réhabilitation des réseaux d'assainissement urbain, RERAU.

Procédure d'affectation		
Tronçons	Procédure pessimiste	Procédure optimiste
T_1	Moyen	Bon
T_2	Bon	Bon
T_3	Mauvais	Moyen
T_4	Bon	Bon
T_5	Mauvais	Mauvais

4.3 Electre-III

La méthode Electre-III est une méthode d'analyse multicritère qui permet de résoudre des problèmes de classement, la méthode s'appuie sur la définition d'une relation de sur-classement S permettant de comparer deux actions a et b distinctes.

En considérant un ensemble d'actions $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$, il s'agit de classer les actions en les comparant par paires. Chaque action est donc comparée aux autres sur la base des critères considérés. L'évaluation des actions est effectuée par une fonction réelle, pour chaque critère on définit l'ensemble $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ contenant l'évaluation de l'action sur l'ensemble des critères.

L'importance des critères dans la prise de décision est évaluée par un ensemble de poids $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Pour cette méthode, les seuils d'indifférence, de préférence et de veto sont fonction de l'évaluation de l'action pour chaque critère. Pour une action a , évaluée par $g_j(a)$ pour le critère j , dans ce cas le seuil d'indifférence est noté $q_j(g_j(a))$, le seuil de préférence par $p_j(g_j(a))$ et le seuil de veto par $v_j(g_j(a))$. La méthode Electre III s'appuie sur les étapes suivantes :

1. Evaluation des indices de concordance :

Dans ce cas on considère le sens de préférence des critères considérés, on distingue un sens de préférence croissant et décroissant.

A titre d'exemple l'indice de concordance dans le cas de préférence croissante est obtenu comme suit :

$$C_j(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) \geq p_j(g_j(a)) \\ 1 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) \leq q_j(g_j(a)) \\ \frac{p_j(g_j(a)) + g_j(b) - g_j(a)}{p_j(g_j(a)) - q_j(g_j(a))} & \text{sinon} \end{cases}$$

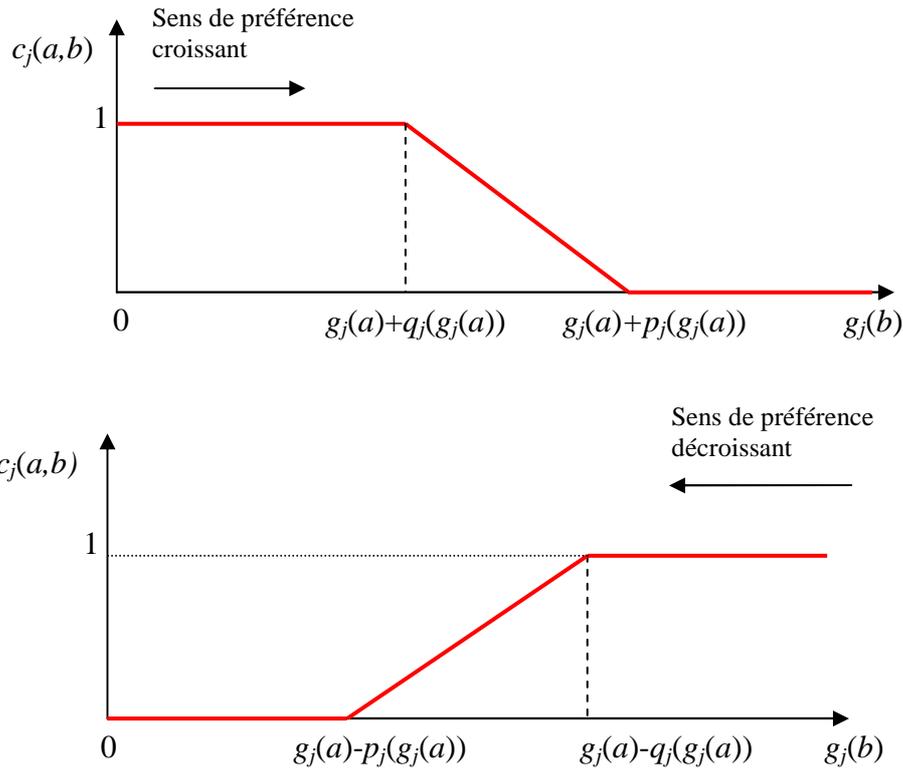


Figure 5. Détermination de l'indice de concordance

2. Calcul de l'indice de concordance global :

$$C(a,b) = \frac{\sum_{j \in F} k_j c_j(a,b)}{\sum_{j \in F} k_j}$$

3. Evaluation des indices de discordance :

Dans ce cas on considère le sens de préférence des critères considérés, on distingue un sens de préférence croissant et décroissant.

A titre d'exemple l'indice de discordance dans le cas de préférence croissante est obtenu comme suit :

$$D_j(a,b_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) \leq p_j(g_j(a)) \\ 1 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) \leq v_j(g_j(a)) \\ \in [0,1] & \text{sin on} \end{cases}$$

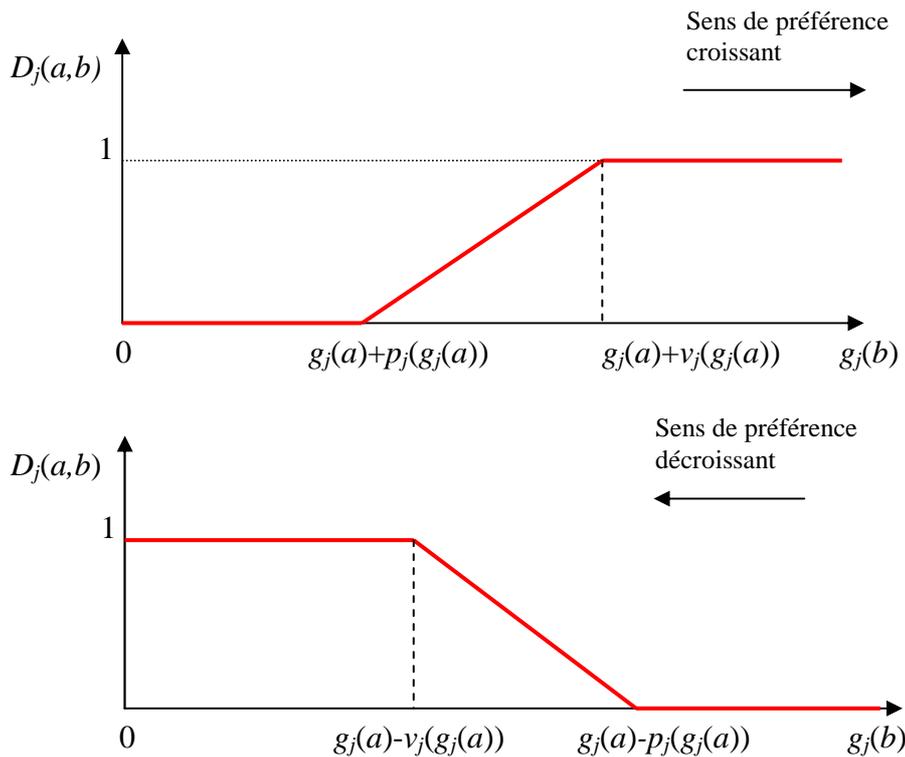


Figure 6. Détermination de l'indice de discordance

5. Calcul de l'indice de crédibilité et définition de la relation de sur-classement floue :

$$d(a,b) = C(a,b) \prod_{j \in \bar{F}} \frac{1 - D_j(a,b)}{1 - C(a,b)}$$

Avec $\bar{F} = \{j \in F : d_j(a,b) > C(a,b)\}$

Cette relation de sur-classement est utilisée pour classer les actions à l'aide de pré-ordre. La première relation est obtenue de manière descendante, en sélectionnant la meilleure action et en classant les autres actions de la meilleure à la moins bonne, on parle alors de **distillation descendante**. La seconde se fait de manière ascendante, en choisissant d'abord la mauvaise action, et en classant de la plus mauvais à la meilleure action, on parle alors de **distillation ascendante**. La construction des deux pré-ordres se base dans un premier temps sur la définition d'un niveau de coupe $\lambda_l \in [0,1[$, on préconise $\lambda_l = \max_{a,b \in A} \{d(a,b)\}$. On sélection les

actions vérifiant la condition $d(a,b) > \lambda_l$. On obtient ainsi une relation de sur-classement nette notée $S_A^{\lambda_l}$ définie par : $a S_A^{\lambda_l} b$ ssi $d(a,b) > \lambda_l$ et $d(a,b) > d(b,a) + s(d(a,b))$

Avec $s(d(a,b)) = -0.5 \cdot d(a,b) + 0.30$, valeurs préconisées.

Remarque

On utilise le logiciel ELECTRE III® développé par le LAMSADE² pour l'implémentation de la méthode, le logiciel requiert une définition des seuils d'indifférence, de performance et de veto sous forme d'une fonction affine de type :

$$q_j(g_j(a)) = \alpha_j \cdot g_j(a) + \beta_j$$

$$p_j(g_j(a)) = \alpha_j \cdot g_j(a) + \beta_j$$

$$v_j(g_j(a)) = \alpha_j \cdot g_j(a) + \beta_j$$

avec $\alpha > -1$ si la préférence est croissante et $\alpha < 1$ si la préférence est décroissante.

Exemple 3

Afin de réaliser une extension d'une zone d'activité commerciale (ZAC), 4 scénarios ont été proposés. Chaque scénario est évalué à l'aide de 5 critères mesurant l'impact du projet sur l'activité économique et l'environnement par une mesure des émissions de CO₂ liées à l'augmentation de la fréquentation. Les critères pris en compte sont les suivants :

- C_{r1} : Le coût du projet d'extension en milliers €
- C_{r2} : La durée de réalisation du projet en semaines
- C_{r3} : Surface de la ZAC commerciale (en milliers m²)
- C_{r4} : Nombre de Places de parking
- C_{r5} : Emissions en CO₂, en kg par jours

L'évaluation de chaque critère est contenue dans le Tableau 12.

Tableau 12. Tableau de performance

	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}
Scénario 1	103	7.65	17.13	352	880
Scénario 2	101.3	7.9	20.53	203	783
Scénario 3	156.4	7.9	22.17	391	815
Scénario 4	267.4	10.5	23.07	419	647
Sens de préférence					
indifférence	6%	1	2%	50	0
Préférence	10%	2	5%	100	50
Veto	15%	4			150
Poids	0.3	0.25	0.15	0.1	0.2

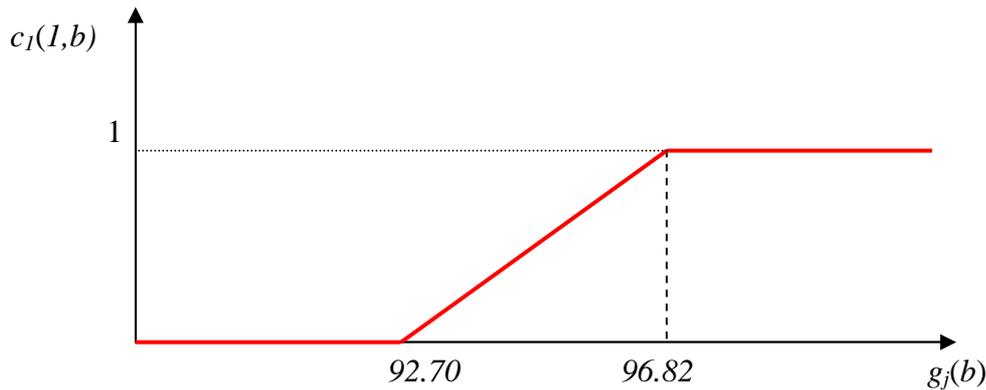
On utilise pour la résolution du problème posé, le logiciel ELECTRE III. A cet effet on définit les valeurs des coefficients α et β pour chaque critère, ainsi qu'un jeu de poids. Ces paramètres sont présentés dans le Tableau 13.

² LAMSADE : Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision.

Tableau 13. Paramètre α/β pour les seuils d'indifférence, de préférence et de veto

Indifférence	0.08/-2	0/1	0.02/0	0/50	0/0
Préférence	0.13/-3	0/2	0.05/0	0/100	0/50
Veto	0.9/50	0/4			0/150

La Figure 7 illustre la détermination de l'indice de concordance pour le premier critère et entre les deux scénarios Sc_1 et Sc_2 , avec : $q_1(Sc_1)= 6.18$, $p_1(Sc_1)= 10.3$, $v_1(Sc_1)= 15.45$ et $c_j(Sc_1,Sc_2)=1$.



L'utilisation du logiciel ELECTRE III permet d'obtenir les deux préordres suivants:



Figure 8. Classement des scénarios

A partir du classement obtenu et le tableau de performance (Tableau 12), le scénario 2 (Sc_2) semble être la meilleure solution pour l'extension de la ZAC, suivie du scénario Sc_4 , puis Sc_3 et enfin Sc_1 .

Exercice

Afin de réaliser une extension d'une zone d'activité commerciale (ZAC), 4 scénarios ont été proposés. Chaque scénario est évalué à l'aide de 5 critères mesurant l'impact du projet sur l'activité économique et l'environnement par une mesure des émissions de CO₂ liées à l'augmentation de la fréquentation. Les critères pris en compte sont les suivants :

- C_{r1} : Le coût du projet d'extension en milliers €
- C_{r2} : La durée de réalisation du projet en semaines
- C_{r3} : Surface de la ZAC commerciale (en milliers m²)
- C_{r4} : Nombre de Places de parking
- C_{r5} : Emissions en CO₂, en kg par jours

L'évaluation de chaque critère est contenue dans le Tableau 15.

Tableau 14. Tableau de performance

	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}
Scénario 1	103	7.65	17.13	352	880
Scénario 2	101.3	7.9	20.53	203	783
Scénario 3	156.4	7.9	22.17	391	815
Scénario 4	267.4	10.5	23.07	419	647
Sens de préférence	↘	↘	↗	↗	↘
indifférence	6%	1	2%	50	0
Préférence	10%	2	5%	100	50
Veto	15%	4			150
Poids	0.3	0.25	0.15	0.1	0.2

Travail à faire

1. Déterminez la nature du problème posé et la méthode d'analyse multicritère à mobiliser pour résoudre le cas d'étude.
2. Déterminer manuellement les indices de concordance $c_1(Sc_1, Sc_2)$, $c_2(Sc_1, Sc_2)$, $c_3(Sc_1, Sc_2)$, $c_4(Sc_1, Sc_2)$, $c_5(Sc_1, Sc_2)$ puis en déduire l'indice de concordance global $C(Sc_1, Sc_2)$
3. Implémenter le cas d'étude en utilisant le logiciel requis et déterminer la matrice de concordance
4. Classez les scénarios proposés et identifier le ou les scénarios les plus appropriés.
5. Etudiez la sensibilité du classement obtenu en modifiant : le poids des critères, les seuils de préférence, d'indifférence et de veto.

Bibliographie

- Ben Mena,S. 2000. Introduction aux méthodes multicritères d'aide à la décision. *Biotechnol.Agron.Soc.Environ.*2000. 4 (2), 83-93.
- Bouyssou D., Roy B. 1992. Aide à la décision, *Encyclopédie du management*, Vuibert, pp. 447-457.
- Dias, L.C and Mousseau, V.2003. IRIS: A DSS for Multiple Criteria Sorting Problems. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, (12):285-298.
- Lambert G., Mousseau V., 1994, Aide multicritère à la décision, cours de DEA « Sciences de gestion », ULP Strasbourg.
- Le Coz C., 1991. Aide à la décision en incertitude complexe – utilisation du modèle « E.S.I.C. » pour l'évaluation économique d'un projet de sécurité sur un réseau de distribution d'eau potable, mémoire de DEA « Sciences de la décision et micro-économie », ENS Cachan, 87 p.
- Maystre L.Y., Pictet J., Simos J., 1996. Méthodes multicritères ELECTRE, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- Maystre,L.Y and Bollinger,D. 1999. Aide à la négociation multicritère, pratiques et conseils. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, ISBN 2-88074, 188p.
- Mousseau, V. and Slowinski, R. 1998. Inferring an ELECTRE TRI model from assignment examples. *Journal of Global Optimization*, 12(2):157-174, 1998.
- Rogers,M., Bruen,M. and Maystre,L-Y. 2000. ELECTRE and decision support, method and applications in engineering and infrastructure investment. Kluwer Academic Publisher, ISBN 0-7923-8647-7, USA.
- Roy, B., 1996.*Multicriteria Methodology for Decision Aiding* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Roy B., 1985, *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris,.
- Roy B., Bouyssou D., 1993. Aide multicritère à la décision : méthodes et cas, Economica, 695 p.
- Vallée, D. and Zielniewicz,P. 1994. ELECTRE III-IV, version 3.x, guide d'utilisation, tome1, document du LAMSADE n°85, Université de Paris Dauphine, 146p.
- Vallée, D. and Zielniewicz,P. 1994. ELECTRE III-IV, version 3.x, guide d'utilisation, tome2, document du LAMSADE n°85 bis, Université de Paris Dauphine, 52p.
- Vincke Ph. , 1989. *L'aide multicritère à la décision*, Editions de l'Université de Bruxelles - Editions Ellipses, Bruxelles.