

TP5 : Transformée en ondelettes

pierre.maurel@irisa.fr

https://perso.univ-rennes1.fr/pierre.maurel/Prepa_Agreg/

1 Ondelettes

Une base d'ondelettes est obtenue en traduisant et dilatant une fonction de carré sommable et de moyenne nulle, appelée *ondelette mère* et notée ψ . Chaque atome d'ondelette est ainsi défini à partir de ψ :

$$\psi_{j,n}(x) = \frac{1}{2^j} \psi \left(\frac{x - 2^j n}{2^j} \right).$$

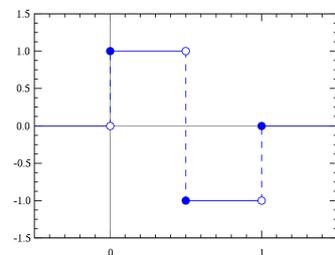
L'échelle est donnée par 2^j et la position par $2^j n$. Et, de la même manière que la transformée de Fourier discrète d'une fonction f calcule les produits scalaires de f et des $e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}$, la transformée en ondelettes consiste à calculer les produits scalaires : $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$.

Pour afficher les transformées en ondelettes (1D ou 2D), utilisez la fonction `plot_wavelet` fournie. Elle permet d'afficher les séparations entre les différentes échelles et effectue une renormalisation des coefficients 2D pour faciliter la visualisation.

2 Ondelettes de Haar 1D

L'ondelette de Haar est la plus simple (et historiquement la première) des ondelettes. C'est une fonction dilatée et/ou traduite de la fonction mère ψ qui vaut :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



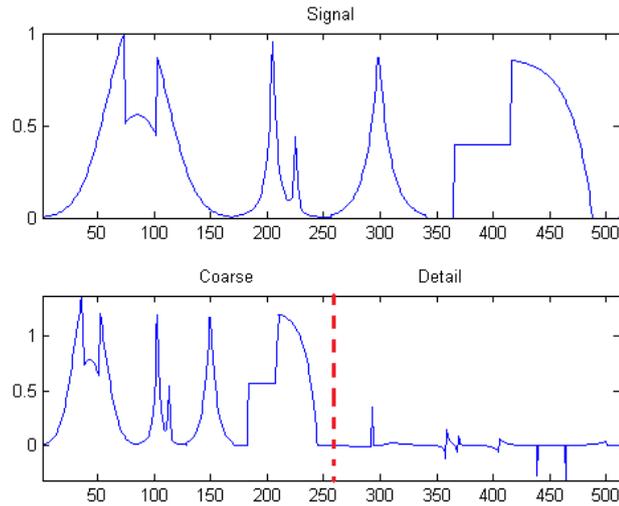
la transformée en ondelettes de Haar présente l'avantage d'être très simple à implémenter. On peut en effet la calculer en itérant soustraction et moyennage des échantillons pairs et impairs du signal.

— Chargez et affichez le signal 1D, de taille n , contenu dans le fichier `Signal1D.mat`.

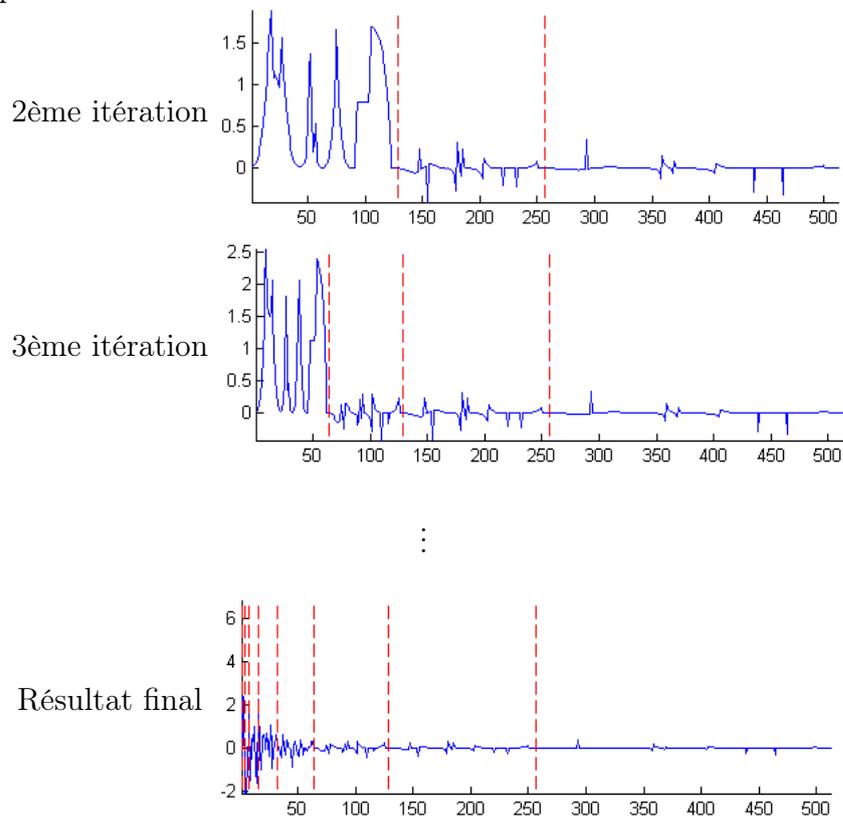
— Calculez (sans boucle `for`) les 2 vecteurs de taille $\frac{n}{2}$ suivants :

$$\text{Coarse}(i) = \frac{\text{Signal1D}(2i - 1) + \text{Signal1D}(2i)}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\text{Detail}(i) = \frac{\text{Signal1D}(2i - 1) - \text{Signal1D}(2i)}{\sqrt{2}} \quad (2)$$



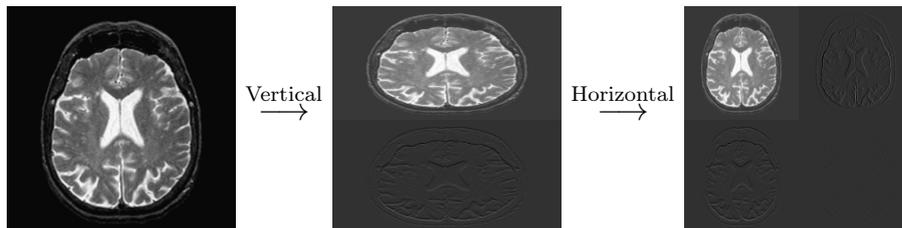
— Le vecteur `Detail` contient maintenant les coefficients correspondant aux ondelettes de Haar de niveau 1. Pour obtenir les coefficients suivants, on itère les étapes précédentes sur le vecteur `Coarse` et on concatène les différents vecteurs `Detail` obtenus. Complétez la fonction `transfo_haar` pour effectuer cette opération.



- Vérifiez l'orthogonalité de la base d'ondelettes (ainsi que la qualité de votre implémentation), en vérifiant la conservation de l'énergie (égalité de Parseval) : $\text{sum}(f.^2)$ doit être égal à $\text{sum}(fw.^2)$ avec $fw = \text{transfo_haar}(f)$.
- À partir des vecteurs Coarse et Detail défini par (1) et (2), comment pouvez reconstruire le signal Signal1D ?
- Complétez la fonction `transfo_inverse_haar` pour reconstruire, à partir des coefficients `fw` le signal `f`.
- Vérifiez que l'erreur de reconstruction $\text{norm}(f - \text{transfo_inverse_haar}(\text{transfo_haar}(f))) / \text{norm}(f)$ est faible.
- Comme indiqué dans la partie 1, la famille d'ondelettes de Haar 1D est obtenue par translation et dilatation/compression de la fonction mère $\psi(t)$. Affichez les différents atomes de cette famille en vous servant de `transfo_inverse_haar` : la transformée inverse de Haar d'un signal qui vaut zéro partout sauf au point k fournit le k -ième atome de la famille. Prenez par exemple un signal de taille 64.
- Pour compresser le signal on peut décider de ne conserver que les coefficients significatifs, c'est à dire qui dépassent un certain seuil. Testez différents seuils, calculez à chaque fois le taux de compression obtenu et affichez le signal reconstruit.

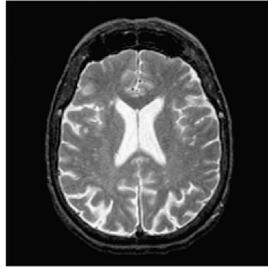
3 Ondelettes de Haar 2D

En 2D, la transformée de Haar fonctionne de la même manière en itérant sous-traction et moyennage des échantillons pairs et impairs du signal. Il faut simplement le faire successivement horizontalement puis verticalement (ou inversement).

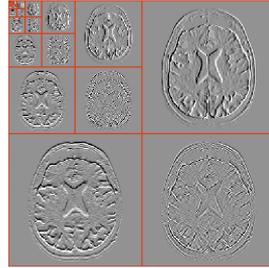


- Complétez la fonction `transfo_haar_2D` qui implémente la transformée de Haar 2D (pour les images carrées).

Image originale



Transformée



- De la même manière qu'en 1D, vérifiez la conservation de l'énergie.
- Complétez la fonction `transfo_inverse_haar_2D` qui implémente la transformée inverse de Haar 2D (pour les images carrées).
- De la même manière qu'en 1D, affichez les différents atomes de la famille d'ondelettes. Prenez par exemple une image de taille 8×8 .
- De la même manière qu'en 1D, on peut étudier le potentiel de compression d'une telle représentation.
 1. *Approximation linéaire de Haar* : Commencez par mettre à zéro les coefficients au dessus d'une certaine échelle j :

```
fw1 = zeros(size(fw));  
fw1(1:2^j, 1:2^j) = fw(1:2^j, 1:2^j);
```

et affichez les reconstructions correspondantes aux différents j possibles.

2. *Approximation non-linéaire de Haar* : Seuillez les coefficients pour ne conserver que les coefficients les plus significatifs (en valeur absolue) et observez l'image reconstruite. Faites de même pour différents seuils et déterminez à partir de quel pourcentage on n'observe plus de différences visuelles notables.
- Comparez avec les résultats obtenus par Fourier au TP précédent , à niveaux de compression égaux.

4 Pour aller plus loin

Des exemples/exercices matlab sur les ondelettes en particulier et sur le traitement d'images en général :

<http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour/tours/>

voir par exemple :

http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour/tours/coding_5_watermarking/