N° d'Ordre : 2645

# T H È S E

*Présentée*

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

*pour obtenir*

**le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I**

Mention : Mathématiques et Applications

*par*


**Philippe ROUX**

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques


TITRE DE LA THÈSE :

*La matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel électromagnétique à longue portée*

Soutenue le 21 Décembre 2001 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

| | | |
|---|---|---|
| Mr | Jean Ginibre | rapporteur |
| Mr | François Nicoleau | examinateur |
| Mr | Francis Nier | examinateur |
| Mr | Jean Nourrigat | rapporteur |
| Mr | Didier Robert | examinateur |
| Mr | Dimitri Yafaev | Directeur de thèse |

"- *Qu'est-ce que vous faites dans la vie, vous ?*
demanda le professeur.
- *J'apprend des choses,* dit Colin*, et j'aime Chloé.*"

Boris Vian, *L'écume des jours.*

*A Armelle et Sterenn ...*

# Table des matières

# Liste des figures

# Remerciements

Tout au long de ces années j'ai pu bénéficier de l'attention, de l'aide ou du soutient de nombreuses personnes auxquelles je tiens à exprimer ma sympathie.

Je voudrais tout d'abord remercier Dimitri Yafaev de m'avoir donné la chance de faire cette thèse. Tout au long de ces quatre années il a su à la fois me laisser une grande liberté dans mon travail de recherche tout en veillant aux exigences de rigueur nécessaires à la concrétisation de mes efforts. Son encadrement et ses conseils m'ont beaucoup apporté bien au delà du simple point de vue mathématique.

Je tiens ensuite à remercier les membres du jury pour leur participation. En premier lieu Jean Ginibre et Jean Nourrigat qui ont accepté la lourde tache d'être les rapporteurs de cette thèse. En plus de leur participation je remercie vivement Didier Robert et Francis Nier pour l'attention qu'ils ont portée sur mon travail. Mais je tiens à remercier tout particulièrement François Nicoleau ; les échanges d'idées que nous avons eu ont largement contribué à développer la dernière partie de cette thèse.

Durant ces quelques années j'ai pu bénéficier de l'expérience des membres de l'équipe EDP de l'IRMAR. Je pense en particulier à Nicolas Lerner qui n'a jamais été avare de son temps lorsque je frappais à son bureau pour lui poser mes nombreuses questions. Je leur adresse à tous ma profonde gratitude.

Je n'aurais pas pu finir cette thèse sans l'aide et le dynamisme des personnels de l'IRMAR depuis les bibliothécaires en passant par la reprographie, les secrétaires (Danielle Lanneau, Claude Boscher et Anita Texier) sans oublier les femmes de ménage qui n'ont jamais effacé le résultat d'un laborieux calcul entouré en rouge sur le tableau noir.

Je me dois de remercier Thierry Brault, Mouhamadou Seck et Paul Dirkx ainsi que tous mes collèges Lannionais pour le soutient chaleureux qu'ils m'ont apporté lors de ces derniers mois.

Je pense aussi à tous les autres enseignants, chercheurs ou thésards que j'ai côtoyés dans la "tour des maths", et plus globalement à tous mes amis. Les discussions que nous avons eu, scientifiques ou non, m'ont beaucoup appri. Je pense aux membres de l'association Jacques Binet et à ceux qui sont passés par le bureau 234 (pour y boire le fameux café qu'on y faisait) : Éric, Claude et Maël, Yannick, Rémi, Fred, Marc, Gilles, David, Yasine, Ghislaine, François, Patricia, ... , quelques (ex-)membres de la SAR : Olivier (les deux !), Franck, Yves, ... , et tant d'autres ...

Enfin j'ai une pensée émue pour ma famille et pour Charles mon grand père.

# Introduction

D'un point de vue mathématique on peut dire que, grossièrement, la théorie de la diffusion est une branche de la théorie des perturbations des opérateurs auto-adjoints pour le spectre (absolument) continu. Cette théorie trouve ses origines en physique théorique, aussi bien dans le cadre de la mécanique classique que dans celui de la mécanique quantique, et plus particulièrement dans la description des collisions élastiques. Les principales problématiques étudiées ainsi qu'une grande partie du vocabulaire de la théorie de la diffusion sont en fait issus de la physique c'est pourquoi il convient de commencer cette thèse en décrivant, brièvement, une expérience de diffusion pour fixer quelques concepts importants.

## 1 Une expérience de diffusion

Un faisceau de particules d'énergie $\lambda$ arrive de l'infini dans la direction $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ sur une cible fixe (le centre diffuseur) à raison de $N$ particules par unité de temps et de surface (orthogonale à $\omega_0$). Le flux de particules $d\phi$ passant dans l'élément de surface $|\mathbb{S}^{d-2}|bdbd\varphi$, correspondant à un paramètre d'impact $b$, se trouve diffusé après interaction avec le centre diffuseur dans l'angle solide $d\omega = d\theta d\varphi$ dans la direction $\omega$. Si le faisceau de particules est homogène et suffisamment peu dense (pour qu'on puisse négliger les interactions entre particules du faisceau) le flux sortant au travers de l'élément $d\omega$, mesuré par un détecteur, sera directement proportionnel à la densité du flux entrant $N$

$$d\phi = N\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda)d\omega. \tag{1}$$

En mécanique classique le facteur de proportionnalité vaut (voir Figure 1)

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = |\mathbb{S}^{d-2}|\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|, \tag{2}$$

et est appelé section efficace différentielle. C'est la principale grandeur mesurable dans une telle expérience et elle est homogène à une surface†. On parle aussi parfois de la

†Dans le cas où le centre diffuseur est une sphère “dure” $\Sigma(\omega, \omega_0; \lambda)d\omega$ est égal à la surface que présente cette sphère face à la partie du flux entrant $d\phi$ qui repart dans la direction $\omega$ [LL64].

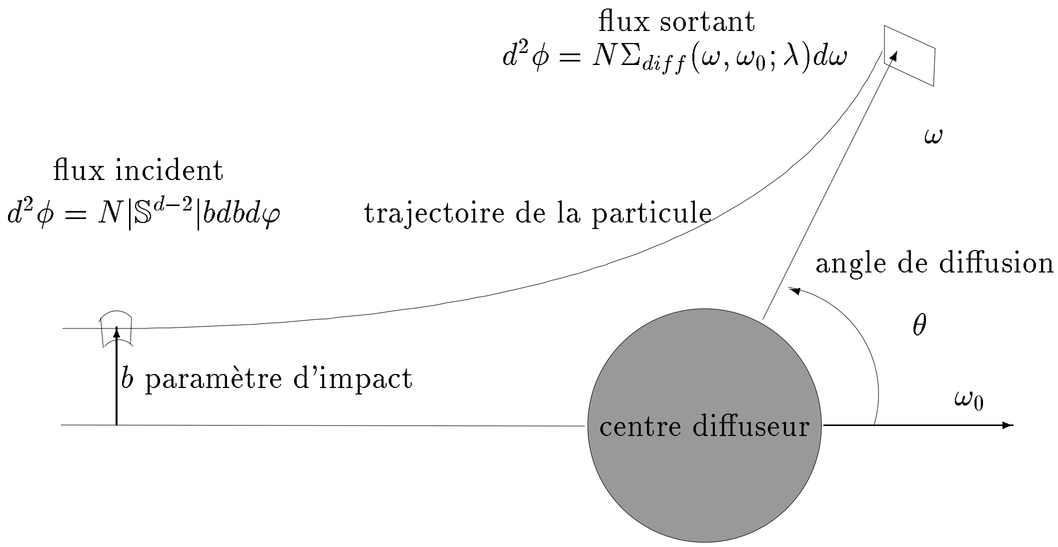


FIG. 1: Une expérience de diffusion

section efficace totale

$$\Sigma_{tot}(\omega;\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Sigma_{diff}(\omega,\omega';\lambda)d\omega', \tag{3}$$

qui mesure le champ d'action du centre diffuseur. Dans les cas “physique” (particules élémentaires) la zone où la particule subit la part la plus importante de sa déviation est très petite comparée aux échelles de temps et de distance auxquelles on a affaire. La trajectoire de la particule semble donc formée de deux branches (l'une pour $t \to -\infty$ l'autre pour $t \to +\infty$) pour lesquelles le mouvement semble asymptotiquement libre . Le flux dans la direction $\omega$ est relié au flux incident par la section efficace différentielle (2).

# 2 La théorie de la diffusion quantique

Dans la théorie quantique l'évolution d'un système physique au cours du temps est décrite par une fonction $\Psi(t)$ à valeur dans un espace de Hilbert, $\mathcal{H}$, vérifiant une équation, appelée équation de Schrödinger, du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t\Psi(t) & = & H\Psi(t) \\ \Psi(0) & = & f \end{array} \right. \tag{4}$$

où $H$ est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ appelé Hamiltonien et $f$ est l'état initial du système. Bien souvent on a envie de comparer la solution de (4) à celle d'un système du même type où $H$ est remplacé par un opérateur $H_0$ plus "simple" que $H$ mais proche, dans un certain sens, de $H$. C'est le principe de base de la théorie de la diffusion qui de ce point de vue est une théorie perturbative.

Dans le cas où $f$ dans (4) est un vecteur propre de $H$ associé à la valeur propre $\lambda$ (i.e. $Hf = \lambda f$) la solution de (4) s'écrit $\Psi(t) = \exp(it\lambda)f$. Comme les valeurs propres de $H$ sont déplacées même par de petites perturbations il n'est en général pas possible de comparer les solutions de (4) à celles du même système pour $H_0$. C'est pourquoi en théorie de la diffusion on se restreint à la partie absolument continue de l'opérateur $H$ qui est plus stable†. Rappelons que pour tout opérateur auto-adjoint $H$ il correspond (d'après le théorème spectral) une fonction $E(\lambda)$ à valeur projecteur auto-adjoint sur l'espace $\mathcal{H}$ telle que pour tout $\varphi, \psi$

$$(H\varphi, \psi)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E(\lambda)\varphi, \psi)_{\mathcal{H}}. \tag{5}$$

Un vecteur $\psi \in \mathcal{H}$ appartient au sous-espace absolument continu de $H$, noté $\mathcal{H}^{ac}$, si la mesure $m_\psi(\cdot) = (E(\cdot)\psi, \psi)_{\mathcal{H}}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Une solution de (4) s'écrit alors $\Psi(t) = \exp(-itH)f$ où l'opérateur $\exp(-itH)$ est défini par la forme quadratique

$$(\exp(-itH)\varphi, \psi)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \exp(-it\lambda) d(E(\lambda)\varphi, \psi)_{\mathcal{H}}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}. \tag{6}$$

Par analogie avec le problème classique, présenté au début de cette introduction, il est intéressant de comparer les solutions $\Psi(t)$ et $\Psi_0(t)$ du système (4) pour $H$ et $H_0$, respectivement, pour de grands temps $t \to \pm\infty$. On est donc amené à se poser la question suivante :

$$\forall f \in \mathcal{H}^{ac} \quad \exists ? f_\pm \in \mathcal{H}_0^{ac} \quad \text{tel que} \quad \lim_{t\to\pm\infty} \|\Psi(t) - \Psi_{0,\pm}(t)\| = 0 \tag{7}$$

avec $\Psi_{0,\pm}(t) = \exp(-itH_0)f_\pm$. Si (7) admet une réponse positive alors

$$f = \lim_{t\to\pm\infty} \exp(itH)\exp(-itH_0)f_\pm.$$

Ceci nous amène à décomposer le problème en deux étapes :

- d'abord le problème de l'existence des opérateurs d'onde

$$W_\pm(H, H_0) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}, \tag{8}$$

- ensuite celui de l'existence d'un inverse de $\mathcal{H}^{ac}$ dans $\mathcal{H}_0^{ac}$ pour les opérateurs d'onde, c'est le problème de la complétude asymptotique

$$\mathrm{Ran} W_\pm(H, H_0) = \mathcal{H}^{ac}. \tag{9}$$

†Par exemple le spectre absolument continu d'un opérateur est contenu dans son spectre essentiel qui lui est stable pour toute perturbation $H$-compacte d'après le théorème de Weyl.

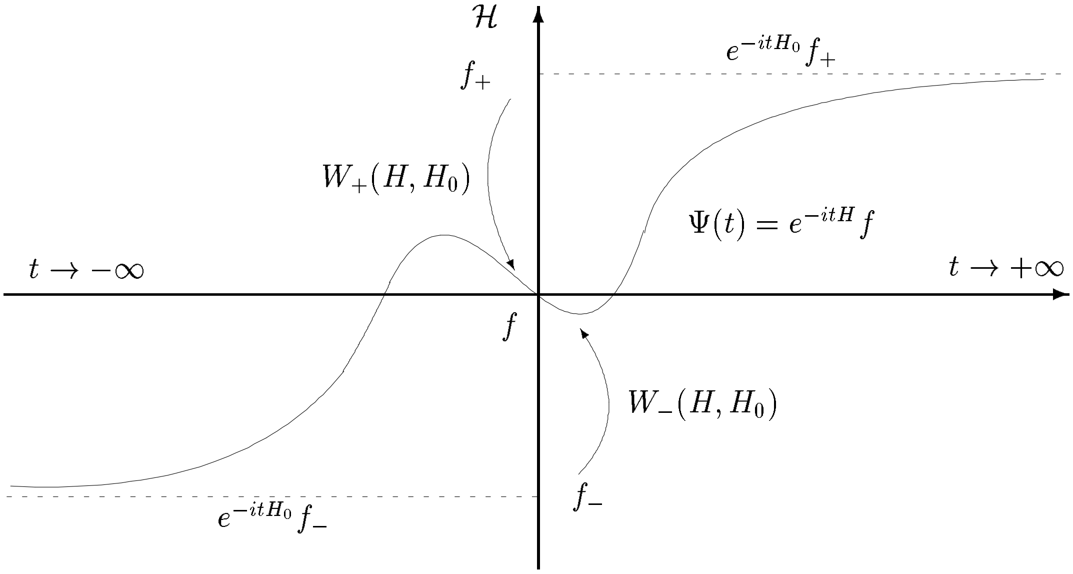


FIG. 2: Vision dynamique de la théorie de la diffusion

On peut remarquer que si les opérateurs d'onde $W_\pm(H,H_0)$ sont unitaires sur $\mathcal{H}_0^{ac}$ leur complétude est équivalente à l'existence des opérateurs d'onde $W_\pm(H_0,H)$ unitaires sur $\mathcal{H}^{ac}$. Les opérateurs d'onde $W_\pm(H,H_0)$ réalisent alors l'équivalence unitaire entre les parties absolument continues des opérateurs $H$ et $H_0$, ce qui se traduit mathématiquement par la relation d'entrelacement

$$HW_\pm(H,H_0) = W_\pm(H,H_0)H_0. \tag{10}$$

Lorsque l'on peut répondre positivement à la première des deux questions précédentes on peut former l'opérateur de diffusion

$$\mathbf{S} = W_+^*(H,H_0)W_-(H,H_0) : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{ac} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{ac} \\ f_- & \longrightarrow & f_+ \end{array} \tag{11}$$

qui relie directement les traces passées $f_-$ aux traces futures $f_+$ sans considération en temps fini. Si les opérateurs d'onde (8) sont complets $\mathbf{S}$ est un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}_0^{ac}$ et grâce à la propriété d'entrelacement (10) l'opérateur $\mathbf{S}$ commute avec $H_0$. Il est donc naturel d'étudier $\mathbf{S}$ dans une représentation où $H_0$ est diagonal. Dans le cas le plus simple (où le spectre de $H_0$ est absolument continu et de multiplicité constante) une telle représentation de $\mathcal{H}$ consiste en la donnée d'un espace de Hilbert $\mathfrak{N}$ (de dimension infini) et d'un opérateur unitaire

$$F_0 : \mathcal{H}^{ac} \longrightarrow \mathbb{L}^2(\sigma_{ac}(H), \mathfrak{N})$$

vérifiant pour tout $f \in \mathcal{D}(H_0)$ $(F_0H_0f)(\lambda) = \lambda(F_0f)(\lambda)$. Si on note $(F_0f)(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)f \in \mathfrak{N}$ alors l'action de $\mathbf{S}$ se ramène, dans cette représentation, à la multiplication par la fonction à valeur opérateur

$$S(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)\mathbf{S}\Gamma_0^*(\lambda) \tag{12}$$

appelée matrice de diffusion. Ce dernier objet contient toute l'information sur le processus de diffusion associé à l'opérateur $H$.

Dans le cas de la diffusion de particules quantiques $S(\lambda)$ est un opérateur intégral sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. Le carré du module de son noyau $\mathrm{s}(\omega, \omega_0; \lambda)$, $\omega, \omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, s'interprète physiquement comme la section différentielle efficace de l'interaction

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{\lambda^{-(d-1)/2}}{(2\pi)^{d-1}} |\mathrm{s}(\omega, \omega_0; \lambda)|^2, \qquad \omega \neq \omega_0. \tag{13}$$

Cette nouvelle définition de la section différentielle efficace entraîne l'apparition de propriétés différentes par rapport à la définition (2) en particulier pour la singularité sur la diagonale $\omega = \omega_0$ de la fonction $\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda)$ (voir par exemple [LL64] chapitre IV section 20 et [LL66] chapitre XVII section 127).

# 3 L'opérateur de Schrödinger, approche dépendante du temps

L'évolution d'une particule élémentaire dans un champ électromagnétique $(E, B)$ est décrite en mécanique quantique par l'équation de Schrödinger (4) où le Hamiltonien est l'opérateur aux dérivées partielles suivant

$$H = (D - A)^2 + V. \tag{14}$$

La fonction réelle à valeurs scalaires $V$ est appelé le potentiel électrique et la fonction réelle à valeurs vectorielles $A = (A_1, \ldots, A_d)$ est appelée le potentiel magnétique. Ces potentiels sont reliés au champ $(E, B)$ par les équations

$$B = \mathrm{rot} A, \quad E = -\nabla V - \partial_t A. \tag{15}$$

Si les potentiels $V$ et $A$ définissent complètement le champ $(E, B)$, il découle des équations précédentes que le champ $(E, B)$ ne définit pas de manière unique les potentiels. En effet si on se donne une fonction $f$, régulière, et qu'on définit de nouveaux potentiels $(V', A')$ par

$$V' = V - \partial_t f, \quad A' = A + \nabla f, \tag{16}$$

alors le couple $(V', A')$ définit le même champ $(E, B)$ que les potentiels $(V, A)$. On peut donc imposer aux potentiels une condition supplémentaire (par rapport aux équations

(15)), qu'on appelle condition de jauge. Les opérateurs de Schrödinger $H$ et $H'$ associés aux potentiels $(V, A)$ et $(V', A')$, liés par (16), ne sont pas égaux mais seulement unitairement équivalents

$$H' = e^{if} H e^{-if}. \tag{17}$$

Il existe beaucoup de jauges, certaines étant plus pratiques que d'autres selon la situation. Pour des potentiels indépendants du temps il est souvent commode d'utiliser la jauge de Coulomb définie par

$$\mathrm{div} A = 0. \tag{18}$$

Sous cette condition les potentiels s'expriment directement en fonction du champ par les équations

$$-\Delta V + \mathrm{div} E = 0, \quad -\Delta A - \mathrm{rot} B = 0.$$

Une autre jauge particulièrement importante en théorie de la diffusion est la jauge transverse ou jauge de Poincaré définie par la condition

$$< A(x), x >= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{19}$$

Ce choix de jauge fut introduit par Uhlenbeck [Uhl82]. Modulo une hypothèse de régularité cette jauge peut être construite à partir d'un potentiel magnétique $A'$ quelconque par la formule

$$A_j(x) = \sum_{k=1}^{d} \int_0^1 F_{kj}(sx) x_k ds, \quad F_{kj}(x) = \partial_{x_k} A'_j(x) - \partial_{x_j} A'_k(x). \tag{20}$$

La multiplicité des jauges envisageables pour décrire une situation ad hoc donne aux potentiels un caractère artificiel dans la théorie classique, par opposition à la "réalité" du champ $(E, B)$.

Pour des potentiels $(V(x), A(x))$ ne dépendant pas du temps on fait en général une hypothèse de décroissance (lente) aux grandes distances

$$|\partial_x^\alpha A(x)| = O\left((1+|x|)^{-\rho-|\alpha|}\right), \quad |\partial_x^\alpha V(x)| = O\left((1+|x|)^{-\rho'-|\alpha|}\right), \quad \rho, \rho' > 0, \tag{21}$$

pour $|\alpha| \leq 2$. Sous ce type d'hypothèses le spectre absolument continu coïncide avec le demi-axe réel positif, i.e. avec les énergies positives pour lesquelles la particule n'est pas classiquement capturée par le champ. Au contraire le spectre négatif est composé de valeurs propres qui correspondent à des états liés du système. En théorie de la diffusion le choix le plus naturel pour Le Hamiltonien de référence $H_0$ est celui correspondant à un champ électromagnétique nul $(V(x), A(x)) = (0, 0)$, soit

$$H_0 = -\Delta, \quad \mathcal{D}(H_0) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d), \quad \mathcal{H}_0^{ac} = \mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d). \tag{22}$$

Pour des potentiels à courte portée, c'est à dire lorsque $\rho, \rho' > 1$ dans (21), l'existence des opérateurs d'onde (8) remonte à [Coo57]. La méthode de Cook repose sur la vérification du critère suivant

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| (H - H_0) e^{-itH_0} f \right\| dt < \infty \tag{23}$$

sur un ensemble de vecteur $f$ dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ (par exemple via la méthode de la phase stationnaire). Lorsque la partie électrique du potentiel vérifie (21) avec un $\rho' > 1$ et que la partie magnétique du potentiel vérifie (21) avec un $\rho > 1/2$ et l'hypothèse supplémentaire de jauge transverse (19) les opérateurs d'onde usuels (8) existent encore [LT87]. Ce résultat exceptionnel peut être obtenu par le critère de Cook en remarquant que pour

$$f \in \{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} \hat{f} \subset \{\xi : 0 < \lambda_0 \leq |\xi|^2 \leq \lambda_1 < \infty\}\}$$

on a

$$\left\| (H - H_0) e^{-itH_0} f \right\| = O\left( (1 + |t|)^{-1-\varepsilon} \right), \quad \varepsilon > 0,$$

puisque dans l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,\xi>-t|\xi|^2} (2i < A(x), \xi > + i \operatorname{div} A(x) + |A(x)|^2 + V(x)) \hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{d/2}}$$

le seul terme à longue portée $< A(x), \xi >$ s'annule au point stationnaire $\xi = x/(2t)$ sous l'hypothèse (19).

Pour des potentiels généraux à longue portée, c'est à dire vérifiant (21) avec $\rho, \rho' \in (0, 1]$ et sans hypothèse supplémentaire, les opérateurs d'onde (8) n'existent plus en général. C'est en particulier le cas pour le potentiel de Coulomb $V(x) = c/|x|$ qui joue un rôle très important en physique. On doit donc introduire la notion d'opérateurs d'onde modifiés : dans (8) l'évolution libre $\exp(-itH_0)$ doit être remplacé par un autre groupe unitaire $U_0(t)$ proche, dans un certain sens, de $\exp(-itH_0)$ et qu'on appelle l'évolution modifiée. La première construction d'opérateurs d'onde modifiés remonte à [Dol64] dans le cas du potentiel de Coulomb. Il existe plusieurs manières de construire l'évolution modifiée $U_0(t)$. Cette modification peut être faite d'une manière dépendante du temps en construisant une évolution $U_0(t) = \exp(iS(t, D))$, en représentation de moment, où $S(t, \xi)$ est une solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi qui est proche de $t\xi^2$ [BM70, Hör76], ou aussi en cherchant $U_0(t)$ sous la forme

$$U_0(t) = (2|t|)^{-d/2} \exp(i(\Omega(t, x) + |x|^2/4t)) \hat{f}(x/2t),$$

donc en représentation d'espace, où $\Omega$ est une solution "petite", dans un certain sens, d'une équation non-linéaire [Yaf80]. Dans ces différentes constructions l'existence des opérateurs d'onde modifiés repose sur la méthode de Cook. Le problème de la complétude asymptotique est par contre beaucoup plus délicat. L'approche la plus générale pour résoudre ce problème repose sur la méthode de Enss [Ens89] qui consiste à relier asymptotiquement les observables $D$ et $x/t$ (voir [DG97] pour une description complète de l'approche dépendant du temps). Le défaut de ces approches est qu'elles sont inadaptées à l'obtention d'une formule de représentation pour la matrice de diffusion, c'est pourquoi on suit dans cette thèse une approche totalement différente.

# 4 L'approche stationnaire

Quand les potentiels $V$ et $A$ ne dépendent pas du temps il est naturel de chercher à définir l'évolution modifiée de manière stationnaire $U_0(t) = J\exp(-itH_0)$ où l'opérateur $J$ (appelé identificateur ou modificateur) ne dépend pas du temps. Cette approche fut d'abord proposée par Isozaki et Kitada dans [IK85a]. L'apport majeur de Isozaki et Kitada fut de considérer des opérateurs d'onde modifiés de la forme

$$W_{\pm}(H, H_0, J) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0}, \tag{24}$$

avec un choix de modificateurs $J = J_j,\ j = 1,2$ différents selon que $t \to -\infty$ ou que $t \to +\infty$. Dans [IK85a], où seul le cas électrostatique ($A = 0$ dans (14)) est considéré, les identifications $J_j$ étaient construites sous la forme d'opérateurs intégraux de Fourier, leur existence et leur complétude reposant sur la méthode de Enss (cette approche fut étendue au cas d'un champ électromagnétique par Nicoleau et Robert [Nic91, NR91]). La phase $\varphi$ des modificateurs $J_j$ doit vérifier l'équation eiconale

$$|\nabla\varphi|^2 - 2 < A, \nabla\varphi > +V(x) + |A(x)|^2 = |\xi|^2, \quad \nabla = \nabla_x, \tag{25}$$

et des estimations de décroissance dans des zones entrantes et sortantes de l'espace des phases $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \kappa,\ \kappa \in (0,1)$

$$\partial_x^\alpha \left(\varphi(x,\xi) - < x, \xi >\right) = O\left(|x|^{1-\rho-|\alpha|}\right). \tag{26}$$

L'amplitude des modificateurs étant quant à elle supportée dans les zones entrantes et sortantes $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \kappa$.

Cette approche a l'avantage de fournir une formule de représentation stationnaire (i.e. en terme de la résolvante $R(z) = (H-z)^{-1}$ de l'opérateur $H$) pour la matrice de diffusion. Cette formule a été établie pour le cas électrique dans [IK86] et pour le cas magnétique dans [Nic91, Nic94]. Formellement celle-ci peut s'écrire

$$S(\lambda) = Id - 2i\pi\Gamma_0(\lambda)\left(J_1^* T_2 - T_1^* R(\lambda + i0) T_2\right)\Gamma_0^*(\lambda), \tag{27}$$

où $T_j = HJ_j - H_0 J_j,\ j = 1,2$ et

$$(\Gamma_0(\lambda)f)(\omega) = 2^{-1/2} k^{(d-2)/2} \hat{f}(k\omega), \quad k = \lambda^{1/2} > 0,\ \omega \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{28}$$

est à un facteur numérique près la restriction de la transformée de Fourier de $f$ à la sphère de rayon $k$. Pour justifier cette formule on a besoin de deux choses : d'une part on a besoin d'estimations de propagation pour définir le terme contenant la résolvante $\Gamma_0(\lambda) T_1^* R(\lambda + i0) T_2 \Gamma_0^*(\lambda)$ et d'autre part on a besoin de pouvoir définir la restriction à la sphère $\mathbb{S}_k^{d-1}$ de rayon k de l'opérateur $J_1^* T_2$. Dans le cas d'une perturbation électrique à courte portée cette formule se ramène à la formule de Born

$$S(\lambda) = Id - 2i\pi\Gamma_0(\lambda)\left(V - VR(\lambda + i0)V\right)\Gamma_0^*(\lambda), \tag{29}$$

dont la formule (27) est en quelque sorte une généralisation.

Cette approche fut reprise par Yafaev dans [Yaf98] avec quelques différences :

- les solutions exactes de l'équation eiconale (25) furent remplacées par des solutions “approchées” (à des termes courte portée près) mais explicites (cf. section 2.1.1),
- la démonstration de l'existence et de la complétude des opérateurs d'onde reposait sur la théorie des perturbations lisses (cf. section 1.1.1) et non sur la méthode de Enss.

C'est cette approche que l'on va reprendre dans cette thèse.

L'existence des opérateurs d'onde (24) dans la théorie des perturbations lisses repose sur un critère du type (23) : on doit montrer que la perturbation effective

$$T = HJ - JH_0 \tag{30}$$

admet une décomposition du type

$$T = K^* B K_0 \tag{31}$$

où $B$ est un opérateur borné et $K, K_0$ sont, respectivement, localement $H$ et $H_0$-lisses, c'est à dire vérifient

$$\sup_{\substack{f \in E(\Lambda)\mathcal{H} \\ \|f\|=1}} \int_{\mathbb{R}} \|K e^{-itH} f\|^2 dt < \infty \tag{32}$$

pour tout intervalle borné $\Lambda \subset \sigma_{ac}(H)$. L'isométricité et la complétude de ces opérateurs d'onde nécessitent que l'identification $J$ soit “suffisamment” proche d'un opérateur unitaire, plus précisément il faut que

$$s - \lim_{t \to \pm\infty} (J^* J - Id) e^{-itH_0} E_0(\Lambda) = 0, \quad s - \lim_{t \to \pm\infty} (JJ^* - Id) e^{-itH} E(\Lambda) = 0. \tag{33}$$

Du fait des rôles symétriques joués par les opérateurs $H_0$ et $H$ cette théorie n'est pas intrinsèquement une théorie perturbative.

Les estimations de type (32) se ramènent à des estimations sur les valeurs de la résolvante $R(z) = (H - z)^{-1}$, dans une topologie convenable, lorsque $z$ s'approche du spectre absolument continu. La plus classique de ces estimations est le *principe d'absorption limite*

$$\sup_{\substack{\mathrm{Re}\, z \in \Lambda \\ 1 \geq |\mathrm{Im}\, z| > 0}} \| \langle x \rangle^{-p} R(z) \langle x \rangle^{-p} \| < \infty, \quad p > 1/2, \quad \Lambda \subset (0, \infty). \tag{34}$$

où $\Lambda$ est un intervalle compact. En particulier elle implique que l'opérateur $\langle x \rangle^{-p}$, $p > 1/2$, est localement $H$-lisse. D'un point de vue physique le principe d'absorption limite admet une interprétation simple. Comme

$$\| \langle x \rangle^{-p} e^{-itH} f \|^2 = (\langle x \rangle^{-2p} e^{-itH} f, e^{-itH} f)_{\mathcal{H}},$$

cette quantité correspond à la moyenne de l'observable quantique $\langle x\rangle^{-2p}$. Dans l'approximation semi-classique cette quantité doit donc être proche de la valeur de $\langle x(t)\rangle^{-2p}$ le long de la trajectoire classique correspondante, asymptotiquement libre. Comme le long de cette trajectoire on doit avoir $|x(t)| \sim |t|$ on peut donc espérer que

$$\| \langle x\rangle^{-p} e^{-itH} f\|^2 \sim \langle t\rangle^{-2p}$$

qui est intégrable si et seulement si $p > 1/2$. Le principe d'absorption limite suffit à traiter le cas des perturbations à courtes portées. Par exemple dans le cas électrique si $V(x) = O(\langle x\rangle^{-\rho})$, $\rho > 1$ en prenant $J = Id$ on factorise facilement la perturbation en produit de perturbations $H$ et $H_0$-lisses :

$$T = H - H_0 = V(x) = \langle x\rangle^{-\rho/2} \left(\langle x\rangle^{\rho/2} V(x) \langle x\rangle^{\rho/2}\right) \langle x\rangle^{-\rho/2},$$

et on peut alors justifier la formule de représentation stationnaire (29) pour $S(\lambda)$.

Dans le cas des potentiels à longue portée le principe d'absorption limite ne suffit plus. Pour le potentiel de Coulomb† $V(x) = c/|x|$ il suffirait que le principe d'absorption limite soit vrai pour $p = 1/2$. Hélas ceci n'est pas possible car l'estimation (34) est déjà violée dans le cas de l'opérateur libre $H_0$ si $p = 1/2$. C'est pourquoi on a besoin de *l' estimation de radiation*. Cette estimation affirme que l'opérateur

$$G = \langle x\rangle^{-1/2} \nabla^{\perp} = \langle x\rangle^{-1/2} (\nabla - \hat{x}(\hat{x}.\nabla)), \tag{35}$$

est localement $H$-lisse. Là encore l'interprétation physique est très instructive. Le long d'une trajectoire classique la vitesse tend à s'aligner, aux grandes distances, avec la direction du vecteur position. En particulier la partie orthoradiale de cette vitesse doit décroître avec le temps. Ce gain de décroissance doit rendre l'observable quantique $G$ intégrable en temps

$$\| \langle x\rangle^{-1/2} \nabla^{\perp} e^{-itH} f\|^2 \sim \langle t\rangle^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Pour des opérateurs différentiels à coefficients vérifiant (21) l'estimation de radiation s'obtient grâce au principe d'absorption limite (cf. théorème 1.3.13).

Il existe de nombreuses méthodes pour démontrer le principe d'absorption limite, mais la plus simple est certainement la méthode des commutateurs de Mourre (cf. section 1.1.3). Sous l'hypothèse principale qu'il existe un opérateur auto-adjoint $\mathcal{A}$ tel que le commutateur $i[H, \mathcal{A}]$ soit essentiellement positif cette méthode fournit des estimations pour la résolvante de $H$, "sandwichée" par des fonctions de l'opérateur $\mathcal{A}$, desquelles on peut déduire le principe d'absorption limite [PSS81]. Pour l'opérateur de Schrödinger cette approche fonctionne en choisissant comme opérateur conjugué $\mathcal{A}$ le générateur des dilatations $(x.D + D.x)/2$. Une fois de plus pour comprendre ce choix l'interprétation physique de cette méthode est riche d'enseignement. En mécanique classique l'obtention de l'estimation $d^2|x(t)|^2/dt^2 \geq c > 0$ le long d'une trajectoire assure que cette trajectoire

†En fait pour n'importe quel potentiel à longue portée.

est asymptotiquement libre (i.e. $|x(t)| \sim |t|$ dont on a déjà vu le lien avec le principe d'absorption limite). L'observable quantique qui correspond à $d^2|x(t)|^2/dt^2$ étant le double commutateur $i[H, i[H, |x|^2]]$ celui-ci doit donc être essentiellement positif. Ceci conduit directement au choix $\mathcal{A} = i[H, |x|^2]$. Dans le cas électrique $i[H, |x|^2] = 2(x.D + D.x)$, on comprend alors facilement le rôle très important joué par le générateur des dilatations $(x.D + D.x)/2$ dans la théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger†.

# 5 Les résultats principaux

Dans cette thèse on considère l'opérateur de Schrödinger (14) avec un potentiel électromagnétique $(V, A) = (V_L, A_L) + (V_S, A_S)$ dont la partie longue portée $(V_L, A_L)$ vérifie (21) pour tout $\alpha$ et la partie courte portée $(V_S, A_S)$ vérifie (21) pour $|\alpha| = 0$ avec un $\rho = \rho' = \rho_0 > 1$. Contrairement à d'autres travaux on ne fait pas ici d'hypothèse de jauge sur le potentiel magnétique $A$‡. Ceci permettra de retrouver les résultats de [LT87, Nic91, NR91] comme des cas particuliers.

L'addition de termes à courte portée pose quelques problèmes pour obtenir le principe d'absorption limite. En effet la théorie de Mourre ne conduit directement à l'estimation (34) que si la partie courte portée $(V_S, A_S)$ vérifie (21) pour $|\alpha| = 0$ et un $\rho = \rho' = \rho_0 \geq 2$ [PSS81]. Cependant une petite modification de cette méthode, proposée dans [Yaf85] dans le cas électrique $A = 0$, permet d'obtenir le principe d'absorption limite sous l'hypothèse $\rho_0 > 1$. Ce résultat technique est démontré dans le cas magnétique dans l'Appendice A.

Via le théorème de multiplication des matrices de diffusion le principe d'absorption limite nous permet d'éliminer les termes à courte portée et de se concentrer sur l'étude des termes à longue portée. Pour l'opérateur

$$H_1 = (D - A_L)^2 + V_L,$$

l'ensemble des estimations de résolvante dont on a besoin est obtenu par la méthode de Mourre (cf. sections 1.3.2 et 1.3.3), comme dans le cas électrique $A = 0$, avec le choix $\mathcal{A} = (x.D + D.x)/2$. Cependant pour les estimations de propagation microlocales on les redémontre pour une classe plus large d'opérateurs pseudo-différentiels par rapport à [IK84, IK85b, Jen85].

Dès que ce travail préliminaire est terminé on peut démarrer la théorie de la diffusion pour le couple $H_0, H$. Il est naturel de construire les identifications $J_\pm$ sous forme d'opérateurs pseudodifférentiels (opd). En effet ce formalisme permet facilement de traiter les combinaisons des opérateurs $J_\pm$ et $T_\pm$ avec les opérateurs $\langle x\rangle^{-p}$, $G$, $H_1$, $H_0$, qui sont eux

†Dans le cas électromagnétique on peut encore faire le choix $\mathcal{A} = (x.D + D.x)/2$ même s'il n'est pas le plus naturel.

‡Mis à part la condition $\mathrm{div}A \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui sert à assurer que le domaine de $H$ est bien $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$ cf. section 1.3.1.

mêmes des opd, ou de manipuler les adjoints $J^*$ (cf. section 1.2). En plus cette théorie nous fournit des critères simples de continuité et de compacité très utiles. Cependant pour traiter le cas général $\rho > 0$ dans (21) on doit manipuler des opd du type $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$ avec $\varrho = \rho$ et $\delta = 1 - \rho$. Lorsque $\rho \leq 1/2$ on ne peut plus utiliser la théorie générale de Hörmander pour ces classes d'opd. C'est pourquoi on est obligé d'utiliser les classes de symboles oscillants $\mathcal{C}^m(\Phi)$, $\Phi \in \mathcal{S}^r$, $r \in [0, 1)$, introduites par Yafaev dans [Yaf00a], qui tiennent compte de la structure particulière du symbole des opd que l'on manipule (cf. section 1.2.2). On rencontre aussi d'autres difficultés lors de la restriction de certains opd à la sphère (voir section 1.2.3).

Pour développer la théorie des perturbations lisses pour le couple $H_0, H_1$ on cherche le symbole des modificateurs sous la forme $j_\pm(x,\xi) = \exp(i\Phi_\pm(x,\xi))$ de telle sorte que $\Psi_\pm(x,\xi) = \exp(i < x, \xi >) j_\pm(x,\xi)$ soit une solution approchée, à des termes courte portée près, de l'équation de Schrödinger stationnaire $H\Psi_\pm = |\xi|^2\Psi_\pm$ pour que la perturbation effective $T_\pm = HJ_\pm - J_\pm H_0$ soit un opd d'une classe $\mathcal{C}^{-1-\varepsilon}(\Phi_\pm)$, $\varepsilon > 0$. Si cela était possible on obtiendrait, grâce au principe d'absorption limite, la décomposition (31) avec $K = K_0 = \langle x\rangle^{-1/2-\varepsilon/2}$, la forme du symbole de $J_\pm$ assurant que les conditions (33) soient vérifiées. En injectant l'Ansatz précédent pour $\Psi_\pm$ dans l'équation de Schrödinger on obtient que la phase $\varphi_\pm(x,\xi) =< x, \xi > +\Phi_\pm(x,\xi)$ doit vérifier l'équation eiconale (25), à des termes courte portée près, et les estimations (26) pour tout $\alpha$. Dans la section 2.1.1 on arrive à construire de telles solutions $\varphi_\pm$ par approximations successives mais celles-ci ne satisfont (26) qu'en dehors d'un voisinage conique (arbitrairement petit) de la direction $\mp\hat{\xi}$. C'est pourquoi on doit ajouter dans le symbole de $J_\pm$ des fonctions de troncatures $\zeta_\pm(x,\xi)$, asymptotiquement homogènes de degré 0, pour éliminer ces "mauvaises" directions. On ajoute aussi une fonction de troncature $\psi(|\xi|^2)$ qui permet de localiser notre étude sur un intervalle d'énergie $\Lambda \subset (0,\infty)$ borné et disjoint de zéro. Les termes supplémentaires qui apparaissent dans le symbole de la perturbation $T_\pm$ ne décroissent que comme $|x|^{-1}$ quand $|x| \to \infty$. Grâce au calcul pseudo-différentiel et à l'estimation de radiation on obtient quand même une décomposition du type (31)

$$T_\pm = \langle x\rangle^{-p} B_\pm^{(r)} \langle x\rangle^{-p} + G^* B_\pm^{(s)} G, \tag{36}$$

avec $B_\pm^{(r)}$ et $B_\pm^{(s)}$ bornés. Cette décomposition assure l'existence des opérateurs d'onde $W_\pm(H_1, H_0, J_\sigma)$, $W_\pm(H_0, H_1, J_\sigma)$ avec $\sigma =$ " + " ou $\sigma =$ " − ". Par un argument de phase non-stationnaire on obtient alors facilement la première estimation de (33) et donc l'isométricité des opérateurs d'onde $W_\pm(H_1, H_0, J_\pm)$. La complétude résulte alors de ce que $(J_\pm J_\pm^* + J_\mp J_\mp^* - Id)E_1(\Lambda)$ est un opérateur compact (pour un choix judicieux des fonctions $\zeta_\pm$) et de l'équation

$$s - \lim_{t\to\pm\infty} J_\mp J_\mp^* e^{-itH_1} E_1(\Lambda) = 0.$$

Par des arguments de phase stationnaire, cette fois, on montre que cette construction coïncide avec les traditionnelles constructions dépendantes du temps, ce qui nous permet de retrouver certains résultats déjà connus et entre autres on récupère que les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_0, J_\pm)$ ne dépendent pas du choix de $\zeta_\pm$.

On obtient alors la formule de représentation stationnaire suivante pour la matrice de la diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ (qui ne diffère de la matrice de diffusion $S(\lambda; H, H_0)$ que par des termes compacts)

$$S(\lambda) = -2i\pi\Gamma_0(\lambda)\left(J_+^*T_- - T_+^*R(\lambda+i0)T_-\right)\Gamma_0^*(\lambda). \tag{37}$$

A partir des estimations de propagation microlocales et en utilisant l'équation de transport dans la construction des modificateurs on peut montrer que le noyau du terme de $S(\lambda)$ contenant la résolvante de $H$ est une fonction régulière $C^k(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ avec $k$ arbitraire. Ce terme peut donc être considéré comme un "reste" dans la formule (37) c'est en particulier un opérateur compact sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$. On a donc juste besoin de se concentrer sur le terme $S_0(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)\left(J_+^*T_-\right)\Gamma_0^*(\lambda)$ qui est la restriction d'un opd à la sphère de rayon $k = \lambda^{1/2}$. L'existence de cette restriction peut être justifiée par une décomposition de type (36) pour l'opérateur $J_+^*T_-$ mais la représentation de cette restriction en tant qu'opd pose certaines difficultés (cf. section 1.2.3). Les singularités du noyau de cet opérateur étant contenues dans la diagonale $\omega = \omega'$, pour l'étude des propriétés spectrales de $S(\lambda)$ il nous suffit d'étudier l'opérateur $\chi_0 S_0(\lambda)\chi_0$ où $\chi_0$ est une fonction de troncature $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ supporté au voisinage d'un point $\omega_0$, ceci pour chaque $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Cette remarque nous permet de travailler avec une représentation de l'opd $\chi_0 S_0(\lambda)\chi_0$ dans une carte locale spéciale du voisinage de $\omega_0$ sur la sphère (cf. Figure 1.1). Dans cette carte locale on arrive à montrer qu'à des termes compacts près $\chi_0 S_0(\lambda)\chi_0$ est un opd d'amplitude

$$\exp(i\Theta(y/k, k\omega, k\omega'))\chi_0(\omega)\chi_0(\omega'), \quad \omega, \omega' \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{38}$$

où $y$ appartient à $\Lambda_{\omega_0}$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^d$ orthogonal à $\omega_0$. La fonction $\Theta$ s'exprime directement à partir des solutions $\varphi_\pm(x,\xi) =< x, \xi > +\Phi_\pm(x,\xi)$ de l'équation eiconale (25) par

$$\Theta(x, \xi, \xi') = \Phi_-(x, \xi') - \Phi_+(x, \xi).$$

L'asymptotique de $\Theta$ quand $|y| \to \infty$ ne dépend donc que du comportement des potentiels $A_L$ et $V_L$ à l'infini.

Lorsque $A_L$ et $V_L$ sont des fonctions asymptotiquement homogènes de degré $-\rho \in (0, 1)$ la fonction $\Theta(y/k, k\omega, k\omega')$ est elle aussi asymptotiquement homogène en $y$ mais de degré $1-\rho$. Le fait que $\Theta(y/k, k\omega, k\omega') \to \infty$ quand $|y| \to \infty$ permet de montrer que le spectre de $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité dans ce cas. Ce résultat est en particulier valable dans le cas où $V_L = 0$ et $A_L$ est asymptotiquement homogène de degré $-\rho$, $\rho \in (1/2, 1)$ et vérifie l'hypothèse de jauge transverse. Dans cette situation les opérateurs d'onde usuels (8) existent, la matrice de diffusion $S(\lambda)$ est définie en terme de ces opérateurs d'onde usuels et pourtant son spectre recouvre bien le cercle unité ! Ce résultat contredit un résultat de Nicoleau [Nic94] qui affirme que dans ce cas $S(\lambda) - Id$ est un opérateur compact. Ce type de résultats est radicalement différent de ce qu'on obtient pour des potentiels à courte portée où la matrice de diffusion est une perturbation compacte de l'identité et son spectre est composé de valeurs propres ne pouvant s'accumuler qu'au point 1. Dans cette situation le symbole principal de $S(\lambda)$ vaut 1 ce qui correspond, en terme de singularité diagonale, à la présence de la fonction de Dirac dans le noyau de $S(\lambda)$. Ces résultats soulignent les différences qualitatives entre les natures des singularités diagonales dans les cas longue et courte portées.

# 6 L'effet Aharonov-Bohm

Le fait que l'opérateur de Schrödinger s'exprime en fonction des potentiels $V$ et $A$ et non du champ $(E, B)$ a conduit Y. Aharonov et D. Bohm à concevoir une expérience aux conséquences troublantes[†] [AB59]. Un solénoïde cylindrique "infiniment" long parcouru par un courant génère un champ magnétique contenu à l'intérieur du solénoïde. Le potentiel magnétique associé à ce champ ne peut pas être à support compact puisque d'après la formule de Stokes on a

$$\phi = \oint_{|x|=R} A(x)\overrightarrow{dl} = \int\int_{|x|\leq R} B(x)dz = C^{ste}. \tag{39}$$

En fait en jauge transverse le potentiel s'écrit à l'extérieur du solénoïde de la manière suivante

$$A(x) = \frac{\phi}{2\pi}(-x_2, x_1)/|x|^2,\ x \in \mathbb{R}^2,\ |x| \geq R > 0,\ \phi \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

où $\phi$ est le flux du champ magnétique $B$ au travers de la section du solénoïde. En particulier ce potentiel ne décroît à l'infini que comme $|x|^{-1}$ et rentre donc dans le cadre des potentiels à longue portée. Aharonov et Bohm considérèrent deux faisceaux d'électrons contournant un solénoïde par deux chemins différents et prédirent l'apparition d'interférences[‡] entre les deux faisceaux ainsi obtenus. Le déphasage entre les deux faisceaux est en fait la circulation du potentiel magnétique $A$ le long du contour encerclant le solénoïde qui d'après (39) est égal au flux du champ $B$ : $\delta_{AB} = \phi$. Il y a donc des interférences entre

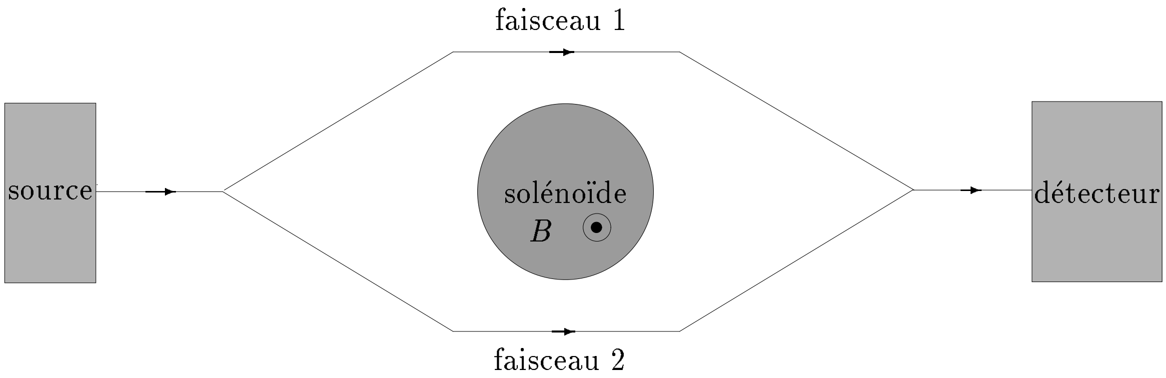


FIG. 3: L'expérience d'Aharonov et Bohm

les deux faisceaux si $\delta_{AB}$ n'est pas un multiple de $2\pi$. Pour bien comprendre l'importance

[†]En fait il existe une controverse sur la paternité de cette découverte, celle-ci reviendrait plutôt à W. Ehrenberg et R. W. Siday [ES49].

[‡]Dont la mise en évidence expérimentale fut faite par Chambers [Cha60].

de cette expérience il faut se rappeler qu'en mécanique classique les équations du mouvement de la particule peuvent s'exprimer en fonction du seul champ électromagnétique $(E, B)$. Du point de vue de la mécanique classique on est donc confronté à un paradoxe : du fait de leur trajectoire les électrons ne sont jamais entré en interaction avec le champ magnétique $B$ et pourtant ils ont subit son action ! C'est la source de toute la polémique autour de l'effet Aharonov-Bohm [AB61, AB63].

Cet exemple a été repris par de très nombreux auteurs depuis plus de quarante ans (cf. [Rui83]). L'approche la plus souvent utilisée pour le potentiel (40) repose essentiellement sur la construction explicite (en terme de fonctions de Bessel) de fonctions propres généralisées du spectre positif de l'opérateur $(D-A)^2$. Cette approche permet de montrer que dans ce cas le spectre de $S(\lambda)$ consiste en deux valeurs propres de multiplicités infinies $\exp(\pm i\phi/2)$. On peut alors calculer exactement la section efficace différentielle

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2(\phi/2)}{\sin^2(\theta/2)}, \quad 2\sin(\theta/2) = |\omega - \omega_0|, \tag{41}$$

et vérifier que la section efficace totale (3) s'annule lorsque le flux est un multiple de $2\pi$. Cette construction est rendue possible pour deux raisons :

- d'une part la forme radiale du potentiel (40) permet une séparation des variables dans l'équation de Schrödinger stationnaire,
- d'autre part les auteurs imposent en plus une condition aux limites en $|x| = R$ (avec parfois $R = 0$) qui conduit aux résultats.

De récents travaux [AT98, DŠ98] ont montré qu'il était possible de choisir des conditions aux limites différentes (non-invariante par rotation) de celles utilisées jusqu'ici conduisant à des résultats différents sans pour autant que ces conditions aux limites admettent une interprétation physique évidente. Du point de vue de la théorie de la diffusion cette approche n'est pas satisfaisante. En effet on s'attend à ce que les propriétés principales de la matrice de diffusion soient déterminées par l'asymptotique aux grandes distances des potentiels et non pas par une condition à l'origine.

Dès que le champ magnétique $F_{j,k}(x)$ est à support compact il découle de (20) que, en jauge transverse, le potentiel $A$ est une fonction asymptotiquement homogène de degré $-1$. Cette décroissance du potentiel vecteur $A$ en $1/|x|$ est cruciale en théorie de la diffusion puisqu'elle fait de $A$ un potentiel à longue portée alors que, du point de vue de la mécanique classique, la situation semble être à courte portée. Dans la section 2.3.2 on étudie en détail deux familles de tels potentiels. Il s'agit d'exemples physiques de champs magnétiques à support compact générés par des solénoïdes parcourus par un courant $I$ (cf. Figure 4) :

**le solénoïde infini (d=2)** c'est un cylindre (dont la section n'est pas forcément un disque) de direction l'axe des $z$. Dans ce cas le champ magnétique $B$ est de direction constante, l'axe des $z$, et nul à l'extérieur du solénoïde. Dans cette dernière zone le potentiel vecteur $A$ s'exprime, en coordonnées cylindriques, par

$$A(x) = f(\vartheta)(-x_2, x_1)/|x|^2, \ |x| \geq R > 0, \tag{42}$$

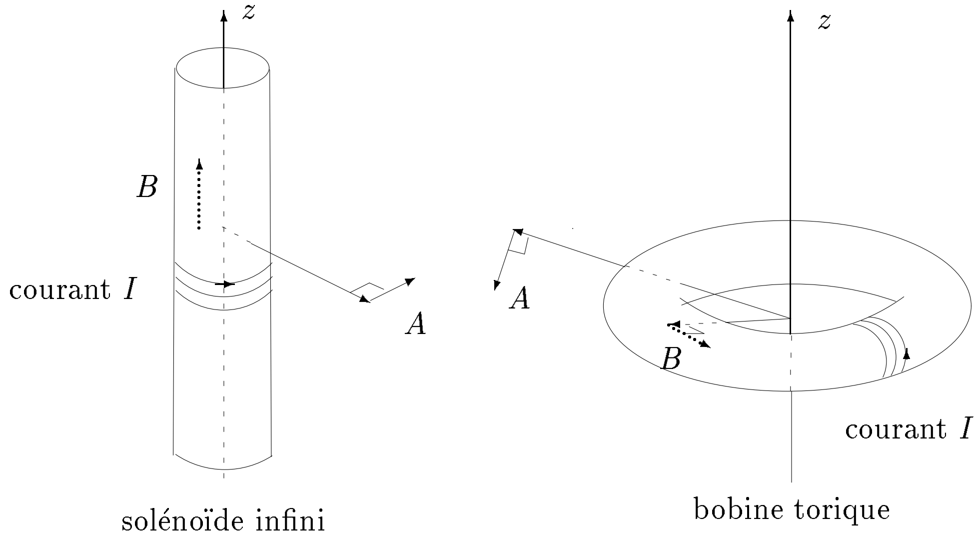


FIG. 4: Exemples de champs magnétiques à support compact

où $f$ est une fonction $2\pi$-périodique et $C^\infty$. On peut noter que

$$\phi = \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

est le flux du champ magnétique au travers de la section du solénoïde.

**la bobine torique (d=3)** c'est un tore de révolution autour de l'axe des $z$. Le champ magnétique est perpendiculaire à la section du tore (qui n'est pas forcément un disque) et nul en dehors du tore. A grande distance le potentiel vecteur s'exprime en coordonnées sphériques† par

$$A(x) = \frac{f(\varphi)}{|x|}\overrightarrow{e}_\varphi, \tag{43}$$

où $f$ est une fonction positive et $C^\infty$ (et $\varphi$ est la colatitude). Le flux de $B$ au travers de la section du solénoïde est donné par

$$\phi = \int_0^{\pi} f(\varphi)d\varphi.$$

Ces caractéristiques peuvent être retrouvées en écrivant l'équation $\mathrm{rot}A = 0$ en coordonnées polaires ou sphériques, respectivement, et en tenant compte de la symétrie de

† $\overrightarrow{e}_\varphi$ est un vecteur unitaire orthoradial appartenant au plan contenant l'axe du solénoïde et $x$ (cf. (2.3.20)).

révolution. Le potentiel de Aharonov-Bohm (40) est un cas particulier du solénoïde infini correspondant à $f(\vartheta) = \phi/(2\pi)$ (dans ce cas la section du solénoïde est un disque de rayon constant). La famille considérée ici étant bien plus générale et contient en particulier des potentiels non-invariant par rotation.

On peut appliquer la démarche développée dans cette thèse à ces deux exemples qui vérifient toutes les hypothèses que l'on s'est fixé. De plus de par leur forme explicite on peut calculer "exactement" le symbole principal $s_0^\flat(b,\omega;\lambda) = \exp(i\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega))$, $< b, \omega >= 0$, de l'opérateur $S_0(\lambda)$. Celui-ci ne dépend pas de l'énergie $\lambda$ et on trouve d'une part pour le solénoïde infini

$$\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega) = \det(b,\omega) \int_{\theta_\omega - \pi}^{\theta_\omega} f(\vartheta) d\vartheta,$$

où $\theta_\omega$ est l'angle polaire associé à $\omega$, et d'autre part pour la bobine torique

$$\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega) = \int_{\varphi_\omega}^{\pi - \varphi_\omega} f(\varphi) d\varphi,$$

où $\varphi_\omega$ est la colatitude associée à $\omega$. En particulier la fonction $\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega)$ ne tend pas vers l'infini quand $|b| \to \infty$ et ceci quelque soit $\lambda > 0$ puisque $\lambda$ n'apparaît pas dans ces expressions. La fonction $\Theta$ admet ici une interprétation géométrique très simple : il s'agit de la circulation de $A$ le long du contour formé par deux droites de direction $\omega$ l'une passant par l'origine ($\mathcal{D}_0$) l'autre par le point $b/\sqrt{\lambda}$ ($\mathcal{D}_1$) (cf. Figures 2.2 et 2.3). Cette remarque nous permet d'affirmer que les résultats des sections 2.3.2 et 2.3.3 sont conservés si on choisit une autre jauge que la jauge transverse pour $A$, la circulation de $A$ le long des droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ étant égal au flux du champ magnétique $B$ au travers de toute surface bordée par $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$. Dans tous ces cas le spectre essentiel de $S(\lambda)$ coïncide avec l'image par la fonction $\nu \mapsto \exp(i\nu)$ l'ensemble des valeurs prises par la fonction $\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega)$. Cette fonction ne pouvant pas tendre vers $\infty$ lorsque $|b| \to \infty$ le spectre essentiel de $S(\lambda)$ peut ne pas recouvrir tout le cercle unité voire même, en dimension deux, être concentré en deux points ! Dans le cas du potentiel (40) on retrouve justement que le spectre essentiel de $S(\lambda)$ est concentré en deux points $\exp(\pm i\phi/2)$ et on peut retrouver la section efficace différentielle (41), modulo un terme de singularité plus faible, en calculant la transformée de Fourier (en la variable $y$) de la fonction (38). Par rapport aux autres méthodes l'avantage de l'approche développée dans cette thèse est que les résultats obtenus sont indépendants de ce qui se passe dans une boule, de rayon arbitraire, autour de l'origine et même de tous les termes qui ont un comportement à courte portée.

Ces quelques exemples montrent toute la diversité des résultats que l'on peut obtenir dans le cas des potentiels asymptotiquement homogènes de degré $-1$ contrastant avec les cas $\rho > 1$ et $1 > \rho > 0$. Il faut noter aussi que dans le cas où $A_L = 0$ et $V_L$ est asymptotiquement homogène de degré $-1$ la fonction $\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega)$ a en général une croissance logarithmique sauf pour les potentiels de type dipolaire, i.e. vérifiant pour tout $|x| \geq R > 0$, $V(-x) = -V(x)$. Mais pour ce type de potentiels le spectre de $S(\lambda)$ dépend de l'énergie $\lambda$ contrairement au cas magnétique.

# Chapitre 1

# Préliminaires

## 1.1 Théorie de la diffusion abstraite

Le but de cette première partie est de collecter un certain nombre de résultats abstraits qui constituent la base théorique de l'approche présentée. Dans la suite on considère des opérateurs, $H_0, H_1$ et $H$, auto-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dénotera par $E_0, E_1$ et $E$ leurs mesures spectrales, $P_0, P_1$ et $P$ les projecteurs sur leurs sous-espaces absolument continus respectifs et de même $R_0(z), R_1(z)$ et $R(z)$ leurs résolvantes.

### 1.1.1 Théorie des perturbations lisses

La construction des opérateurs d'onde (24) présentée dans cette thèse repose sur la théorie des perturbations lisses. On pourra en trouver une présentation plus détaillée dans [Yaf92, Yaf00b]. La notion d'opérateur $H$-lisse introduite par Kato [KI66] en est le concept principal. Elle sera utilisée ici sous sa forme locale proposée par Lavine [Lav71, Lav72].

**Définition 1.1.1** *Soit $K$ un opérateur $H$-borné. On dit que $K$ est $H$-lisse s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes qui suivent*

$$\sup_{f\in\mathcal{D}(H),\|f\|=1} \int_{\mathbb{R}} \|Ke^{-itH}f\|^2 dt < \infty \tag{1.1.1}$$

$$\sup_{\varepsilon>0,\lambda\in\mathbb{R}} \|K(R(\lambda+i\varepsilon) - R(\lambda-i\varepsilon))K^*\| < \infty \tag{1.1.2}$$

*On dit que $K$ est localement $H$-lisse sur un intervalle $\Lambda \subset \mathbb{R}$ si $KE(\Lambda)$ est $H$-lisse.*

La proposition suivante permet de construire de nouveaux opérateurs $H$-lisses à partir d'un opérateur $H$-lisse $K$, mais elle est aussi utile dans le cas $K = 0$.

**Proposition 1.1.2** *Soient $M$ un opérateur $H$-borné et $K$ un opérateur $H$-lisse sur $\Lambda$. Si pour tout $u \in E(\Lambda)\mathcal{H}$*

$$\|Gu\|^2 \leq (i[H, M]u, u) + \|Ku\|^2. \tag{1.1.3}$$

*alors $G$ est $H$-lisse sur $\Lambda$.*

La théorie des perturbations $H$-lisses donne un critère simple d'existence des opérateurs d'onde (qui peut être facilement déduit de l'estimation (1.1.1)).

**Proposition 1.1.3** *Soient $H, H_0$ un couple d'opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$, $J$ un opérateur borné et $\Lambda \subset \sigma_{ac}(H_0) \cap \sigma_{ac}(H)$ un intervalle. Supposons que $T = HJ - JH_0$ admette la décomposition suivante*

$$T = \sum_{i=1}^{N} K_i^* B_i K_{0,i}, \tag{1.1.4}$$

*ou les $K_{0,i}$ et $K_i$ sont respectivement $H_0$- et $H$-lisses sur $\Lambda$ et les $B_i$ sont des opérateurs bornés. Alors les opérateurs d'onde*

$$W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda) = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} E_0(\Lambda)$$

*et $W_{\pm}(H_0, H; J^*, \Lambda)$ existent et sont réciproquement adjoints.*

Les opérateurs d'onde "locaux" sont plus simples à manipuler (par exemple dans le cas ou il existe des valeurs propres plongées dans le spectre absolument continu), de plus leur existence permet de construire les opérateurs d'onde "globaux".

**Proposition 1.1.4** *Soient $\Lambda_n \subset \mathbb{R}$, $n = 1, \ldots$ une famille d'intervalles tels que les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda_n)$ existent pour tout $n$. Si la mesure de Lebesgue des ensembles $\sigma_{ac}(H) \backslash (\cup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n)$ et $\sigma_{ac}(H_0) \backslash (\cup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n)$ est nulle alors les opérateurs d'onde*

$$W_{\pm}(H, H_0; J) = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} P_0 \tag{1.1.5}$$

*et $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ existent.*

Le choix de l'identification $J$ peut être différent pour $t \to \infty$ et $t \to -\infty$. Dans tous les cas la propriété d'entrelacement $W_{\pm} H_0 = H W_{\pm}$ et l'isométricité des opérateurs d'onde ne sont pas automatiquement vérifiées. Elles ne le sont que sous la condition que pour tout $f \in P_0 \mathcal{H}$ on ait

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|J e^{-itH_0} f\| = \|f\|.$$

On peut aussi remarquer que comme pour tout opérateur compact $K$ sur $\mathcal{H}$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$ on a

$$s - \lim_{t \to \pm\infty} K e^{-itH_0} P_0 f = 0, \tag{1.1.6}$$

le choix du ou des modificateurs ne se fait qu'à un terme compact près.

**Proposition 1.1.5** *Soient $J_1$ et $J_2$ deux opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$. Si $J_1 - J_2$ est compact, ou au moins pour tout intervalle compact $\Lambda$ l'opérateur $(J_1 - J_2)E_0(\Lambda)$ est compact, alors les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_0; J_1)$ et $W_\pm(H, H_0; J_2)$ coïncident.*

Dans cette approche il convient de redéfinir la notion de complétude asymptotique pour les opérateurs d'onde (1.1.5).

**Définition 1.1.6** *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}$. L'opérateur d'onde $W_\pm(H, H_0; J)$ est dit $(J-)$complet sur $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$ si $Ran(W_\pm(H, H_0; J)) = E(\Lambda)\mathcal{H}$.*

A partir de cette définition on peut exprimer l'isométricité et la complétude des opérateurs d'onde (1.1.5) en terme d'opérateurs d'onde auxiliaires.

**Proposition 1.1.7** *Soient $H, H_0$ un couple d'opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$ et $J$ un opérateur borné tels que l'hypothèse (1.1.4) soit vérifiée. On note $W_\pm = W_\pm(H, H_0; J)$ les opérateurs d'onde définis par (1.1.5). L'isométricité, sur $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$, et la complétude, sur $E(\Lambda)\mathcal{H}$, des opérateurs d'onde $W_\pm$ sont équivalentes à*

$$W_\pm(H_0, H_0; J^*J) = E_0(\Lambda) \quad \Leftrightarrow \quad s - \lim_{t\to\pm\infty}(J^*J - Id)E_0(\Lambda)e^{-itH_0} = 0, \tag{1.1.7}$$

$$W_\pm(H, H; J^*J) = E(\Lambda) \quad \Leftrightarrow \quad s - \lim_{t\to\pm\infty}(JJ^* - Id)E(\Lambda)e^{-itH} = 0. \tag{1.1.8}$$

Le modificateur $J$ doit donc être "proche" dans un certain sens d'un opérateur unitaire. Par exemple si $J^*J - Id$ et $JJ^* - Id$ sont compacts les conditions (1.1.7) et (1.1.8) sont remplies.

On aura aussi besoin d'un théorème de multiplication pour les opérateurs d'onde.

**Proposition 1.1.8** *Soient $H_0, H_1$ et $H$ trois opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$ et $J_0, J_1$ deux opérateurs bornés. Si les opérateurs d'onde $W_\pm(H_1, H_0; J_0)$ et $W_\pm(H, H_1; J_1)$ existent et sont complets alors les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_0; J_1J_0)$ existent, sont complets et coïncident avec les opérateurs $W_\pm(H, H_1; J_1)W_\pm(H_1, H_0; J_0)$.*

### 1.1.2 Représentation stationnaire de la matrice de diffusion

Après les opérateurs d'onde nous avons besoin de définir un nouvel objet : la matrice de la diffusion. Dans cette sous-section on rappelle différents résultats tirés de [Yaf92, Yaf00b]. Commençons par définir l'opérateur de diffusion

$$S = S(H, H_0; J_+, J_-) = W_+(H, H_0; J_+)^* W_-(H, H_0; J_-). \tag{1.1.9}$$

Si les opérateurs d'onde sont isométriques et complets alors $S$ est un opérateur unitaire sur $P_0\mathcal{H}$. Du fait de la propriété d'entrelacement $S$ commute avec $H_0$ et se ramène donc à la multiplication par $S(\lambda; H, H_0) = S(\lambda; H, H_0; J_+, J_-)$ dans une représentation de $\mathcal{H}$ ou $H_0$ est diagonal. L'opérateur $S(\lambda)$ est appelé matrice de diffusion et demande une définition plus précise.

**Théorème 1.1.9** *Supposons que le spectre de $H_0$ ait une multiplicité constante $\kappa$ sur l'intervalle $\Lambda$, et considérons un espace de Hilbert $\mathfrak{N}_0$ auxiliaire de dimension $\kappa$. Alors d'après le théorème spectral il existe un opérateur unitaire*

$$F_0 : E_0(\Lambda)\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{L}^2(\Lambda, \mathfrak{N}_0)$$

*vérifiant pour tout $f \in \mathcal{D}(H_0)$*

$$(F_0H_0f)(\lambda) = \lambda(F_0f)(\lambda).$$

*En particulier la matrice de la diffusion $S(\lambda; H, H_0)$ est définie pour presque tout point $\lambda \in \Lambda$ par*

$$S(\lambda; H, H_0) : \qquad \begin{array}{c} \mathfrak{N}_0 \longrightarrow \mathfrak{N}_0 \\ (F_0f)(\lambda) \longmapsto (F_0Sf)(\lambda) \end{array}$$

On a besoin d'une formule de représentation stationnaire pour la matrice de la diffusion dans le cas ou l'on choisit deux modificateurs différents, $J = J_+$ et $J = J_-$, pour construire les opérateurs d'onde $W_+$ et $W_-$. La théorie des perturbations lisses permet d'obtenir une telle formule. Si on note $(F_0f)(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)f \in \mathfrak{N}_0$ alors formellement la matrice de diffusion peut s'écrire

$$S(\lambda; H, H_0) = \Omega_+(\lambda) - 2i\pi\Gamma_0(\lambda)(J_+^*T_- - T_+^*R(\lambda + i0)T_-)\Gamma_0^*(\lambda), \tag{1.1.10}$$

où †

$$\Omega_+(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)W_+(H_0, H_0; J_+^*J_-)\Gamma_0^*(\lambda). \tag{1.1.11}$$

La justification de (1.1.9) est très proche de celle du cas $J_+ = J_-$ et peut être trouvée dans [Yaf00b].

**Théorème 1.1.10** *Soient $\mathcal{G}$ un espace de Hilbert et $K_0, K : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{N}_0$ deux opérateurs respectivement $H_0$- et $|H|^{1/2}$-bornés. Supposons d'une part que l'opérateur*

$$Z_0(\lambda, K_0) = \Gamma_0(\lambda)K_0^* : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{N}_0, \tag{1.1.12}$$

*est borné et que $Z_0^*(\lambda, K_0) : \mathfrak{N}_0 \longrightarrow \mathcal{G}$ est fortement continu en $\lambda \in \Lambda$, et d'autre part que l'opérateur*

$$\mathcal{R}(z, K_+, K_-) = K_+R(z)K_-^* : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \tag{1.1.13}$$

*est borné et faiblement continu par rapport à $z$ pour $\operatorname{Re} z \in \Lambda$ et $\operatorname{Im} z \geq 0$. Si on a les décompositions suivantes*

$$T_\pm = K_\pm^*K_0, \quad J_+^*T_- = K_0^*BK_0,$$

†Comme $W_+(H_0, H_0; J_+^*J_-)$ commute avec $H_0$ il agit, dans la représentation spectrale associée à $H_0$, comme la multiplication par $\Omega_+(\lambda)$.

*ou $B$ est un opérateur borné sur $\mathcal{G}$ alors la matrice de la diffusion définie par* (1.1.9) *admet la représentation suivante*

$$S(\lambda; H, H_0) = \Omega_+(\lambda) - 2i\pi Z_0(\lambda, K_0) B Z_0^*(\lambda, K_0) + 2i\pi Z_0(\lambda, K_0)\mathcal{R}(z, K_+, K_-)Z_0^*(\lambda, K_0). \tag{1.1.14}$$

*En particulier $S(\lambda; H, H_0) - \Omega_+(\lambda)$ est faiblement continu en $\lambda \in \Lambda$.*

L'équation (1.1.14) est une réécriture de (1.1.10) en somme de produit d'opérateurs bornés, elle donne un sens correct à la formule (1.1.10). L'hypothèse sur l'opérateur (1.1.12) est vérifié si l'opérateur est $H_0$-lisse, par contre celle sur $K$ est un peu plus forte.

On a besoin dans cette étude d'un théorème de multiplication pour les matrices de diffusion, une sorte d'équivalent à la proposition 1.1.8. Les considérations qui vont suivre sont tirées de [Yaf92] chapitre 7 section 1 et de [Yaf00b] partie 2 section 10 références auxquelles on renvoie le lecteur pour plus de détails. Sous les hypothèses de la proposition 1.1.8 intéressons nous au cas où $J_1 = Id$ et $J_0 = J_\pm$ et où les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_1)$ et $W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)$ sont isométriques et complets. Dans ce cas l'opérateur de diffusion pour le couple $H_0, H$ avec identifications $J_\pm$ s'exprime en fonction de l'opérateur de diffusion le couple $H_1, H$ par

$$S(H, H_0; J_+, J_-) = W_+(H_1, H_0; J_+)^* S(H, H_1; J_+, J_-) W_-(H_1, H_0; J_-). \tag{1.1.15}$$

Si on introduit les deux opérateurs

$$S^\pm(H, H_0) = W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)^* S(H, H_1; J_+, J_-) W_\pm(H_1, H_0; J_\pm), \tag{1.1.16}$$

il est clair que les opérateurs $S^\pm(H, H_0)$ sont unitairement équivalents à $S(H, H_1; J_+, J_-)$ et vérifient

$$S^+(H, H_0) = S(H, H_0; J_+, J_-) S(H_1, H_0; J_+, J_-)^* \tag{1.1.17}$$
$$S^-(H, H_0) = S(H_1, H_0; J_+, J_-)^* S(H, H_0; J_+, J_-) \tag{1.1.18}$$

Tous ces opérateurs commutent avec $H_0$ et dans la représentation spectrale ou $H_0$ agit comme la multiplication par $\lambda$ les opérateurs $S^\pm(H, H_0)$ se ramènent à la multiplication par la fonction à valeur opérateur $S^\pm(\lambda)$. On peut maintenant énoncer le théorème de multiplication.

**Théorème 1.1.11** *Soient $H_0, H_1$ et $H$ trois opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$ et $J_+, J_-$ deux opérateurs bornés. Supposons que les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_1), W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)$ sont isométriques et complets et que les opérateurs $S^\pm(\lambda)$ sont définis par* (1.1.16)*. Alors les matrices de diffusion pour les couples $H, H_0$ et $H_1, H_0$ (avec identification $J_\pm$) vérifient les relations*

$$S^+(\lambda) = S(\lambda; H, H_0) S(\lambda; H_1, H_0)^*, \quad S^-(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)^* S(\lambda; H, H_0). \tag{1.1.19}$$

Dans la représentation en intégrale directe associée à $H_1$

$$\begin{array}{rcl} F_1 : E_1(\Lambda)\mathcal{H} & \longrightarrow & L_2(\Lambda, \mathfrak{N}_1) \\ f & \longmapsto & \Gamma_1(\lambda) f \end{array}$$

où $\mathfrak{N}_1$ est un espace de Hilbert auxiliaire (supposé de même dimension que $\mathfrak{N}_0$), l'opérateur $S(H, H_1)$ agit comme la multiplication par

$$S(\lambda; H, H_1) = \Gamma_1(\lambda) S(H, H_1) \Gamma_1^*(\lambda).$$

Les opérateurs d'onde $W_\pm(H_1, H_0, J_\pm)$ dans (1.1.16) permettent de passer de la représentation de $\mathcal{H}$ associée à $H_0$ à celle associée à $H_1$. Formellement, si on identifie $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}$ (qui sont de même dimension) alors $W_\pm(H_1, H_0, J_\pm)$ agit dans $\mathfrak{N}$ comme la multiplication par la fonction à valeur opérateur (unitaire)

$$w_\pm(\lambda) = \Gamma_1(\lambda) W_\pm(H_1, H_0, J_\pm) \Gamma_0^*(\lambda). \tag{1.1.20}$$

Ces considérations permettent d'écrire que

$$S^\pm(\lambda) = w_\pm^*(\lambda) S(\lambda; H, H_1) w_\pm(\lambda). \tag{1.1.21}$$

A partir des équations (1.1.19) et (1.1.21) on déduit la proposition suivante.

**Proposition 1.1.12** *Soit $p \in [1, \infty]$, sous les hypothèses du théorème* 1.1.11 *si l'opérateur $S(\lambda, H, H_1) - Id \in \mathfrak{S}_p$ alors $S(\lambda; H, H_0) - S(\lambda; H_1, H_0) \in \mathfrak{S}_p$. En particulier si $S(\lambda, H, H_1) - Id$ est un opérateur compact sur $\mathfrak{N}$ alors $S(\lambda; H, H_0) - S(\lambda; H_1, H_0)$ est compact.*

**Preuve** A partir (1.1.19) et (1.1.21) on établit facilement l'identité suivante d'ou découle le résultat

$$S(\lambda; H, H_0) - S(\lambda; H_1, H_0) = w_+^*(\lambda)(S(\lambda, H, H_1) - Id) w_+(\lambda) S(\lambda; H_1, H_0)$$

d'où découle le résultat en prenant la norme associé à l'idéal $\mathfrak{S}^p$. □

### 1.1.3 La théorie de Mourre

Nous rappelons ici quelques résultats de la théorie de Mourre [Mou81, Mou83] et qui a connu de nombreux développements [PSS81, JMP84, Jen85, JP85]. On pose $\mathcal{H}_2 = \mathcal{D}(H)$ et $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(|H|^{1/2})$, munis de la norme du graphe, et $\mathcal{H}_{-2}$, $\mathcal{H}_{-1}$ leurs duaux respectifs pour la norme

$$\|\psi\|_j = \|(Id + |H|)^{-j/2} \psi\|.$$

On a les inclusions suivantes

$$\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-1} \subset \mathcal{H}_{-2}.$$

La théorie de Mourre repose sur le concept d'opérateur conjugué à $H$.

**Définition 1.1.13** *Soient $H$ et $\mathcal{A}$ deux opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$. On dit que $\mathcal{A}$ est $n$ fois conjugué à $H$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ si $\mathcal{A}$ vérifie les hypothèses suivantes*

**i)** *$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(H)$ est dense dans $\mathcal{H}_2$.*

**ii)** *l'opérateur $e^{i\alpha\mathcal{A}}$ laisse $\mathcal{H}_2$ invariant et pour tout $f \in \mathcal{H}_2$ on a $\sup_{|\alpha|<1} \|e^{i\alpha\mathcal{A}} f\|_2 < \infty$.*

**iii)** *L'opérateur $i[H, \mathcal{A}]$ défini sur $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}_2$ s'étend en un opérateur $B_1$ borné de $\mathcal{H}_2$ vers $\mathcal{H}$. De même les commutateurs $B_j = i[B_{j-1}, \mathcal{A}]$ pour $j = 2, \ldots n$ définis sur $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}_2$ s'étendent en des opérateurs bornés de $\mathcal{H}_2$ vers $\mathcal{H}$.*

**iv)** *Le commutateur $i[B_n, \mathcal{A}]$ défini sur $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}_2$ s'étend en un opérateur borné de $\mathcal{H}_2$ vers $\mathcal{H}_{-2}$.*

**v)** *Il existe des constantes $c > 0$, $\delta > 0$ et un opérateur compact $K$ sur $\mathcal{H}$ tels que*

$$E(\Lambda_\delta) i[H, \mathcal{A}] E(\Lambda_\delta) \geq c E(\Lambda_\delta) + E(\Lambda_\delta) K E(\Lambda_\delta), \quad \Lambda_\delta = (\lambda - \delta, \lambda + \delta). \tag{1.1.22}$$

Le rôle de l'hypothèse ii) est fondamentale (ce qui n'apparaît pas dans [CFKS87][†]). Par contre l'hypothèse iv) n'est pas totalement optimale. Sous les hypothèses i), ii), iii) le théorème du Viriel est bien vérifié [Mou81].

**Théorème 1.1.14 (théorème du viriel)** *Si les hypothèses* i), ii), iii) *sont vérifiées par le couple $H, \mathcal{A}$ en un point $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a*

$$E(\{\lambda\}) i[H, \mathcal{A}] E(\{\lambda\}) = 0. \tag{1.1.23}$$

On peut alors décrire la partie du spectre de l'opérateur $H$ pour laquelle l'estimation (1.1.22) est vérifiée.

**Théorème 1.1.15** *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que les hypothèses* i), ii), iii) *et* v)*, pour $n = 1$, soient vérifiées pour $H$ et $\mathcal{A}$ en tout point $\lambda \in \Lambda$. Alors $\sigma_p(H) \cap \Lambda$ est un ensemble discret de valeurs propres, toutes de multiplicité finie.*

L'absence de spectre singulièrement continu permet d'obtenir des estimations pour les valeurs de la résolvante $R(z) = (H - z)^{-1}$ au bord de l'axe réel $\operatorname{Im} z \to 0^{\pm}$.

---

[†]Un contre exemple aux hypothèses de [CFKS87] ainsi qu'une discussion sur les hypothèses admissibles pour utiliser la théorie de Mourre peut être trouvé dans [GG99]

**Théorème 1.1.16** *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que les hypothèses* i) *à* v) *soient vérifiées pour $n = 1$ sur $\Lambda$, alors la fonction à valeur opérateur $\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-s}$, $s > 1/2$ est continue en norme (au sens de Hölder) dans les régions* $\operatorname{Re} z \in \Lambda, \pm \operatorname{Im} z \in (0, 1]$ *et on a l'estimation*

$$\sup_{\operatorname{Re} z \in \Lambda, 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0} \| \langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-s} \| \leq c, \forall s > 1/2. \tag{1.1.24}$$

*De plus le spectre de $H$ est purement absolument continu dans l'ensemble $\Lambda \backslash \sigma_p(H)$.*

Pour $n \geq 2$ on peut récupérer d'autres estimations de propagation par les mêmes méthodes.

**Théorème 1.1.17** *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur auto-adjoint $n$-fois conjugué à $H$, avec $n \geq 2$, sur un intervalle compact $\Lambda \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\Lambda \cap \sigma_p(H) = \emptyset$. Alors il existe une constante $c$ telle qu'on ait les estimations suivantes pour tout $n > l \geq 1$*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \| \langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R(z)^l \langle \mathcal{A} \rangle^{-s} \| \leq c, \forall s > l - 1/2, \tag{1.1.25}$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 > \pm \operatorname{Im} z > 0}} \| \langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R(z)^l P_{\mathcal{A}}^{\mp} \langle \mathcal{A} \rangle^{s-l} \| \leq c, \forall s \in (l - 1/2, n), \tag{1.1.26}$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 > \pm \operatorname{Im} z > 0}} \| \langle \mathcal{A} \rangle^{s_1} P_{\mathcal{A}}^{\mp} R(z)^l P_{\mathcal{A}}^{\pm} \langle \mathcal{A} \rangle^{s_2} \| \leq c, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, (s_1)_+ + (s_2)_+ < n - l. \tag{1.1.27}$$

*De plus les différentes fonctions à valeur opérateur ci-dessus sont continues en norme (au sens de Hölder) dans les régions* $\operatorname{Re} z \in \Lambda, \pm \operatorname{Im} z \in (0, 1]$.

Ces estimations sont d'abord apparues dans [Mou83], sous une forme plus faible, avant d'être énoncées dans [JMP84]. Elles sont basées sur une approche perturbative. L'idée maîtresse est de considérer un opérateur $F_\varepsilon(z)$ obtenu à partir de l'opérateur que l'on veut estimer en faisant les substitutions

$$P_{\mathcal{A}}^{\mp} \longrightarrow P_{\mathcal{A}}^{\mp} e^{\pm \varepsilon \mathcal{A}}, \quad R(z) \longrightarrow (H - z - iC_n(\varepsilon))^{-1}, \quad C_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^k B_k}{k!}, \operatorname{sgn} \varepsilon = \operatorname{sgn} \ \operatorname{Im} z.$$

Le but est alors d'obtenir des estimations a priori sur $\|dF_\varepsilon(z)/d\varepsilon\|$ pour $\varepsilon$ petit jusqu'à avoir l'intégrabilité près de 0 et donc la continuité de $F_\varepsilon(z)$ en $\varepsilon = 0$. La constante $c$ dans les estimation du théorème 1.1.17 ne dépend donc que des normes des commutateurs $B_j, j = 1, \ldots n$ de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}$, et de la norme de $i[B_n, \mathcal{A}]$ de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_{-2}$. Les estimations pour $l > 1$ se déduisent de celles pour $l = 1$ par récurrence [Jen85]. Cette approche repose sur le lemme suivant

**Lemme 1.1.18** *Supposons que pour tout $\varepsilon \in (0, 1], z \in \Omega$, la fonction à valeur opérateur $F_\varepsilon(z)$ soit continue en norme par rapport à $z$ et différentiable par rapport au paramètre $\varepsilon$. Supposons de plus qu'on ait pour tout $\varepsilon \in (0, 1], z \in \Omega$, les estimations*

$$\|F_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon^{-1}, \quad \left\|\frac{dF_\varepsilon(z)}{d\varepsilon}\right\| \leq c\varepsilon^{-a}(1+\|F_\varepsilon(z)\|), \tag{1.1.28}$$

*Pour un certain $a \in (0,1)$. Alors*

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1], z\in\Omega} \|F_\varepsilon(z)\| < \infty. \tag{1.1.29}$$

**Preuve** En partant d'une estimation a priori du type $\|F_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon^{-a_n}$ et en intégrant l'estimation (1.1.28) sur $dF_\varepsilon(z)/d\varepsilon$ on obtient facilement une nouvelle estimation

$$\|F_\varepsilon(z)\| \leq c'(1+\varepsilon^{-a_n+1-a}) \leq c''\varepsilon^{-a_{n+1}}, \text{ si } a_{n+1} > 0.$$

La suite $a_n = a_{n-1} + (a-1) = \cdots = 1 + n(a-1)$ décroît linéairement et donc au bout de $n$ étapes, $n \geq 1/(1-a)$ on a $a_n \leq 0$, ce qui conduit à (1.1.29). □

## 1.2 Les opérateurs pseudodifférentiels

Dans toute la suite on prendra pour définition de la transformation de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<\xi,x>} f(x) \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{1.2.1}$$

Ce qui en fait un opérateur unitaire sur l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Son adjoint est défini par

$$(\mathcal{F}^* g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\xi,x>} g(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{d/2}}, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{1.2.2}$$

### 1.2.1 Les classes de Hörmander

Les opérateurs pseudodifférentiels (opd) sont un des outils essentiels de ce travail. Introduit par Hörmander dans les années 60, il existe aujourd'hui sur le sujet une littérature abondante, comme [Hör85], [Tay81] ou [Shu87], à laquelle on renvoie le lecteur pour les détails.

**Définition 1.2.1** *On appelle $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^{2d})$ l'ensemble des fonctions $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ vérifiant pour un certain $N \in \mathbb{R}$ et tout multi-indices $\alpha, \beta$*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(p) \langle x\rangle^{m-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^N, \tag{1.2.3}$$

*pour $x,\xi \in \mathbb{R}^d$. On définit l'opd associé pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\xi,x>} p(x,\xi) \widehat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{d/2}}. \tag{1.2.4}$$

*Parfois on notera $P$=Op$(p(x,\xi))$ ou encore $P = p(x,D)$.*

Par exemple l'opérateur de multiplication par la fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, en variable $\xi$, est un opd qui sera noté $\chi(D)$. Les constantes optimales $C_{\alpha,\beta}(p)$ dans (1.2.3) permettent de construire une famille de semi-normes pour l'espace de Fréchet $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^{2d})$. On utilisera souvent la notation simplifiée $\mathcal{S}^m_{1,0}(\mathbb{R}^{2d}) = \mathcal{S}^m$. Par rapport aux conventions usuelles adoptées sur le sujet les rôles de $x$ et $\xi$ sont inversés. Cependant grâce à l'égalité suivante

$$(\mathcal{F}P^*)\, f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<\xi,x>} \overline{p(x,\xi)} f(x) \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \tag{1.2.5}$$

l'opérateur $\mathcal{F}P^*$ entre dans le cadre usuel de la théorie des opd ce qui nous autorise à utiliser l'ensemble de ces résultats pour l'opérateur $P$ lui même.

Lorsque $\varrho > \delta$ les classes $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$ forment une algèbre et on a en particulier des formules pour exprimer le symbole d'un produit de deux opd (resp. de l'adjoint d'un opd) en fonction des symboles des deux opérateurs (resp. du symbole de l'opérateur).

**Proposition 1.2.2** *Soit $p \in \mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$ alors $P^*$ est un opd de symbole $\tilde{p} \in \mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$ qui admet le développement asymptotique*

$$\tilde{p}(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} (\alpha!)^{-1} D^\alpha_\xi \partial^\alpha_x \overline{p(x,\xi)} \tag{1.2.6}$$

**Proposition 1.2.3**
*Soient $p_j \in \mathcal{S}^{m_j}_{\varrho,\delta}$ pour $j = 1,2$, et $m = m_1 + m_2$. Alors $P_1P_2$ est un opd de la classe $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$ et son symbole $p(x,\xi)$ admet le développement asymptotique*

$$p(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} (\alpha!)^{-1} D^\alpha_\xi p_1(x,\xi) \partial^\alpha_x p_2(x,\xi) \tag{1.2.7}$$

La signification des asymptotiques (1.2.6) et (1.2.7) peut être comprise de deux manières différentes :

- on peut tronquer la série à un ordre $N$ arbitraire et remplacer "$\sim$" par une égalité modulo l'ajout d'un terme de reste $r_N(x,\xi) \in \mathcal{S}^{m-(\varrho-\delta)N}_{\varrho,\delta}$ qui ne dépend que des dérivées $\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi p(x,\xi)$ avec $|\alpha| \geq N$ et $|\beta| \geq N$,
- on peut construire par un procédé de sommation "à la Borel" de la série dans le membre de droite des équivalences (cf. [Shu87] Chap. I Section 3.3) un symbole qui diffère du membre de gauche par une fonction à décroissance rapide en $x$.

L'autre intérêt des opd est qu'on dispose de critères simples pour juger de la continuité et de la compacité de ces opérateurs [CV71, CV72].

**Théorème 1.2.4 (Caldéron & Vaillancourt)** *Soit $p \in S^0_{\delta,\delta}$ , $(0 \leq \delta < 1)$ vérifiant (1.2.3) pour un certain $N \leq 0$. Alors $P$ est un opérateur borné sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$, en particulier on a une estimation de la norme de $P$ en fonction des semi-normes définies par l'équation (1.2.3)*

$$\|P\| \leq C \max_{|\alpha|,|\beta|\leq k} C_{\alpha,\beta}(p) \tag{1.2.8}$$

*où $C$ et $k$ ne dépendent que de $d$ et $\delta$.*

En remarquant qu'on a l'injection $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta} \subset \mathcal{S}^m_{\delta,\delta}$ si $\varrho > \delta$, ce résultat s'étend aux classes $\mathcal{S}^0_{\varrho,\delta}$.

**Remarque 1.2.5** A priori dans nos applications on est pas obligé de faire appel au théorème 1.2.4 car le symbole $p$ aura toujours un support compact en la variable $\xi$. En décomposant $p(x,\xi) \in \mathcal{S}^0$ en séries de Fourier par rapport à $\xi$ on obtient alors facilement une borne sur la norme de l'opérateur $P$. Cependant cette borne dépend de la taille du support de $p$ en la variable $\xi$, et donc n'est pas optimale.

Concernant la compacité des opd on a le résultat suivant.

**Théorème 1.2.6** *Soit $p \in S^m_{\varrho,\delta}$, pour un certain $N < 0$, avec $m < 0$ et $1 \geq \varrho > \delta \geq 0$, alors $P$ est un opérateur compact sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

### 1.2.2 Les classes de symboles oscillants

Dans notre étude on est amené à considérer les modificateurs $J_\pm$ comme des opérateurs de symboles $j_\pm(x,\xi) = \exp(i\Phi_\pm(x,\xi))$, $\Phi \in \mathcal{S}^{1-\rho}$. De ce fait les opérateurs $J_\pm$ appartiennent à la classe $\mathcal{S}^0_{\varrho,\delta}$ avec $\varrho = \rho$ et $\delta = 1-\rho$. Pour les classes $\mathcal{S}^0_{\varrho,\delta}$ le calcul pseudodifférentiel ne peut être développé que sous la condition $\varrho > \delta$ ce qui donne ici la restriction $\rho > 1/2$. Lorsque $1/2 \geq \rho > 0$ les résultats de la section 1.2.1 ne permettent plus de décomposer la perturbation effective $T_\pm = HJ_\pm - J_\pm H_0$ en produit de perturbations $H$ et $H_0-$lisses et donc de montrer l'existence et la complétude des opérateurs d'onde comme dans [Yaf98, Yaf00b]. Cependant pour nos applications à la théorie de la diffusion on n'a pas besoin de toutes les formules du calcul pseudodifférentiel seul la composition avec des opd de la classe $\mathcal{S}^m$ ou des compostions du type $J^*_\pm J_\pm$ ou $J_\pm J^*_\pm$ sont utilisées. Etant donné la forme particulière des symboles des opd $J_\pm$ Yafaev a introduit dans [Yaf00a] une nouvelle classe d'opd à symbole oscillant, dont voici la définition.

**Définition 1.2.7** *On appelle opd à symbole oscillant $a \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ tout opérateur défini sur la classe de Schwartz par*

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\xi,x>} a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^{d/2}}$$

*où $a$ admet la représentation*

$$a(x,\xi) = e^{i\Phi(x,\xi)}b(x,\xi), \quad b \in \mathcal{S}^m, \quad \Phi \in \mathcal{S}^r, \quad r \in [0,1[ \tag{1.2.9}$$

*où $\Phi$ est à valeurs réelles et il existe $M > 0$ tel que $b(x,\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq M$.*

Comme on a l'inclusion $\mathcal{C}^m(\Phi) \subset \mathcal{S}^m_{1-r,r}$ les propriétés des classes de symboles oscillants se ramènent à celles des classes $\mathcal{S}^m_{1-r,r}$ quand $r < 1/2$. Au contraire dans le cas $r \geq 1/2$ les résultats de [Yaf00a] sur les classes $\mathcal{C}^m(\Phi)$ sont indispensables pour les applications à la théorie de la diffusion.

On commence par un résultat tiré de [Tay81] Chap. II théorème 4.4 (mais qui peut aussi être extrait d'autres références).

**Proposition 1.2.8** *Soient $A_1 \in \mathcal{S}^{m_1}_{1,0}$ et $A_2 \in \mathcal{S}^{m_2}_{\varrho,\delta}$, le produit $A = A_1A_2 \in \mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$, où $m = m_1 + m_2$, et le symbole $a(x,\xi)$ admet le développement asymptotique*

$$a(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} (\partial^\alpha_\xi a_1)(x,\xi)(D^\alpha_x a_2)(x,\xi)/\alpha!, \tag{1.2.10}$$

*où $\partial^\alpha_\xi a_1 D^\alpha_x a_2 \in \mathcal{S}^{m-\varrho|\alpha|}_{\varrho,\delta}$. On a le même résultat pour $A_2A_1$ avec le développement asymptotique*

$$a(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} (\partial^\alpha_\xi a_2)(x,\xi)(D^\alpha_x a_1)(x,\xi)/\alpha!, \tag{1.2.11}$$

*où $\partial^\alpha_\xi a_2 D^\alpha_x a_1 \in \mathcal{S}^{m-\varrho|\alpha|}_{\varrho,\delta}$.*

La proposition 1.2.8 permet de composer les opd à symboles oscillants avec des opd de classe $\mathcal{S}^m_{1,0}$.

**Proposition 1.2.9** *Soient $A_j, j = 1,2$ deux opd de symboles $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}$ et $a_2 \in \mathcal{C}^{m_2}(\Phi)$, pour un certain $\Phi \in \mathcal{S}^r$, $r \in [0,1)$. Soient $m = m_1 + m_2$ et $A_0$ l'opd de symbole $a_0(x,\xi) = a_1(x,\xi)a_2(x,\xi)$. Alors le produit $A = A_1A_2 \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ et son symbole admet l'asymptotique (1.2.10). En particulier $A - A_0 \in \mathcal{C}^{m-(1-r)}(\Phi)$. Si de plus $a_1(x,\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq R > 0$ alors $A_2A_1 \in \mathcal{C}^m(\Phi)$, avec un symbole admettant l'asymptotique (1.2.11), et $A_2A_1 - A_0 \in \mathcal{C}^{m-(1-r)}(\Phi)$.*

**Preuve** Comme par hypothèse (1.2.9) $a_2(x,\xi) = 0, \quad |\xi| \geq R$ pour un certain $R > 0$ il en va de même pour le symbole $a(x,\xi)$ de $A_2A_1$. Le résultat découle alors de l'asymptotique (1.2.10). Dans le second cas si le support en $\xi$ de $a_1(x,\xi)$ est compact de la même manière le résultat découle de (1.2.11). □

Pour nos applications on a besoin de pouvoir traiter le produit $A_2A_1$ dans le cas ou $a_1(x,\xi)$ n'a pas le support compact en $\xi$.

**Proposition 1.2.10** *Soient $A_j, j = 1,2$ deux opd de symboles $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}$ et $a_2 \in \mathcal{C}^{m_2}(\Phi)$, pour un certain $\Phi \in \mathcal{S}^r$, $r \in [0,1)$. Soient $m = m_1 + m_2$ et $A_0$ l'opd de symbole $a_0(x,\xi) = a_1(x,\xi)a_2(x,\xi)$. Alors le produit $A_2A_1 = A + R$ où $A \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ admet l'asymptotique (1.2.11) et $R$ a pour symbole $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. De plus $A - A_0 \in \mathcal{C}^{m-(r-1)}(\Phi)$.*

**Preuve** Soit $R > 0$ tel que $a_2(x,\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq R$, et soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi_0(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq R$, $\chi_0(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq R+1$. Soit enfin $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq R+2$. D'après la proposition 1.2.8 on obtient que l'opérateur $A = A_2A_1\chi(D)$ appartient à la classe $\mathcal{C}^m(\Phi)$ et son symbole vérifie (1.2.11). Le reste $A_2A_1(1-\chi(D))$ a pour symbole

$$r(x,\xi) = (2\pi)^{-d}\int_{|\eta|\leq R}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\eta-\xi,x-y>}a_2(x,\eta)a_1(y,\xi)(1-\chi(\xi))dyd\eta.$$

Considérons d'abord la fonction $\mathrm{k}(\eta,\xi)$ définie par

$$\mathrm{k}(\eta,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\xi-\eta,y>}a_1(y,\xi)\chi_0(\eta)(1-\chi(\xi))dy.$$

Comme supp $\chi_0 \cap$ supp $(1-\chi) = \emptyset$ on peut intégrer par parties l'intégrale précédente en utilisant l'identité $|\eta-\xi|^{-2}(-\Delta_y)e^{i<\xi-\eta,y>} = e^{i<\xi-\eta,y>}$. En répétant cette procédure un nombre suffisant de fois on obtient que k est une fonction de la classe de Schwartz. Maintenant comme $a(x,\eta) = a(x,\eta)\chi_0(\eta)$ on peut réécrire le symbole $r(x,\xi)$ de la manière suivante

$$r(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\eta-\xi,x>}a_2(x,\eta)\mathrm{k}(\eta,\xi)d\eta.$$

En utilisant cette fois l'identité $\langle x\rangle^{-2}\langle D_\eta\rangle^2 e^{i<\eta-\xi,x>} = e^{i<\eta-\xi,x>}$ et en intégrant par parties $p$ fois, par rapport à $\eta$, on obtient

$$r(x,\xi) = \langle x\rangle^{-2p}\int_{|\eta|\leq R} e^{i<\eta-\xi,x>}\langle D_\eta\rangle^{2p}\left(a_2(x,\eta)\mathrm{k}(\eta,\xi)\right)d\eta = O\left((1+|x|)^{m-2p(1-\delta)}\right).$$

En tenant compte de ce que la fonction $\mathrm{k}(\eta,\xi)$ appartient à la classe de Schwartz on obtient la majoration $r(x,\xi) = O((1+|x|)^{-l}(1+|\xi|)^{-n})$ pour tout entier $l$ et $n$. De la même manière il est facile d'obtenir $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta r(x,\xi) = O((1+|x|)^{-l}(1+|\xi|)^{-n})$ pour tout entier $l$ et $n$ et tout $\alpha,\beta$ par conséquent $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. □

Pour la composition avec l'adjoint on a le résultat suivant tiré de [Yaf00a].

**Théorème 1.2.11** *Soient $a_j \in \mathcal{C}^{m_j}(\Phi)$ et $A_j$, $j = 1,2$, les opd associés, alors $A_1^*A_2$ est un opd dont le symbole $a(x,\xi) \in \mathcal{S}^m$ admet le développement asymptotique*

$$a(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} D_x^\alpha(\overline{(\partial_\xi^\alpha a_1)(x,\xi)}a_2(x,\xi))/\alpha!, \tag{1.2.12}$$

*où $D_x^\alpha((\overline{\partial_\xi^\alpha a_1})a_2) \in \mathcal{S}^{m-(1-r)|\alpha|}$. De même $A_2A_1^*$ est un opd de symbole $a(x,\xi) \in \mathcal{S}^m$ qui admet le développement asymptotique*

$$a(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \partial_\xi^\alpha(\overline{(D_x^\alpha\ a_1)(x,\xi)}a_2(x,\xi))/\alpha!, \tag{1.2.13}$$

*où $\partial_\xi^\alpha((\overline{D_x^\alpha a_1})a_2) \in \mathcal{S}^{m-(1-r)|\alpha|}$.*

Une conséquence directe du théorème précédant est un critère de continuité et de compacité pour les opd à symboles oscillants, l'équivalent des théorèmes 1.2.4 et 1.2.6.

**Théorème 1.2.12** *Soit $A$ un opd de la classe $\mathcal{C}^m(\Phi)$, si $m \leq 0$ alors $A$ est borné dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et si $m < 0$ alors $A$ est compact dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

**Preuve** D'après le théorème 1.2.11 l'opd $A^*A$ qui appartient à la classe $\mathcal{S}^{2m}$ et possède un support compact en $\xi$. En particulier $A^*A \in \mathcal{S}^{2m}_{0,0}$ et vérifie (1.2.3) pour tout $N < 0$. Les opérateurs $A^*A$ et $A$ sont donc bornés (compacts) si $m \leq 0$ ($m < 0$) d'après le théorème 1.2.4 (1.2.6). □

En vue de nos applications à la construction des opérateurs d'onde et de la matrice de la diffusion on a besoin de quelques résultats techniques collectés ci-dessous.

**Proposition 1.2.13** *Soit $A \in \mathcal{C}^m(\Phi)$, alors l'opérateur $A\langle x\rangle^{-m}$ est borné dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

**Preuve** Comme $\langle x\rangle^{-m} \in \mathcal{S}^{-m}$ d'après la proposition 1.2.10 $A\langle x\rangle^{-m} = A_0 + R$ avec $A_0 \in \mathcal{C}^0(\Phi)$ et $r(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. L'opérateur $A_0$ est borné d'après la proposition 1.2.12 et $R$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc borné. □

**Proposition 1.2.14** *Soient $B$ et $G$ deux opd de symbole $b \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ pour une phase $\Phi \in \mathcal{S}^r$, avec $r \in [0,1)$, et $g \in \mathcal{S}^n$. Soit $T$ l'opd de symbole $t(x,\xi) = |g(x,\xi)|^2 b(x,\xi)$. Alors l'opérateur $\langle x\rangle^p (G^*BG - T)\langle x\rangle^p$ est borné si $2p = -m - 2n + 1 - r$.*

**Preuve** Comme $g \in \mathcal{S}^n$ d'après la proposition 1.2.10 on obtient que $G^*BG - T = A + R$ où $A \in \mathcal{C}^{m+2n-1+r}(\Phi)$et le symbole $r(x,\xi)$ de $R$ appartient à la classe de Schwartz. Alors d'après la proposition 1.2.3 le symbole de $\langle x\rangle^p R\langle x\rangle^p$ appartient à la classe de Schwartz. L'opérateur $\langle x\rangle^p R\langle x\rangle^p$ est donc Hilbert-Schmidt et borné. Enfin d'après la proposition 1.2.13 $\langle x\rangle^p A\langle x\rangle^p$ est borné si $2p = -m - 2n + 1 - r$. □

**Proposition 1.2.15** *Soient $A_j$, $j = 1,2$, des opd de symboles $a_j \in \mathcal{C}^0(\Phi)$ et $A$ l'opd de symbole $a_1(x,\xi)\overline{a_2(x,\xi)}$, alors les opérateurs $A - A_1A_2^*$ et $A - A_2^*A_1$ sont compacts dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Dans la Section 2.2 on est amené à considérer des opérateurs de la forme $\tilde{\mathbf{A}} = \mathcal{F}A_+^*A_-\mathcal{F}^*$ où $A_\pm \in \mathcal{C}^m(\Phi_\pm)$. L'opérateur $\tilde{\mathbf{A}}$ admet la représentation suivante

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}u\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,\xi'-\xi>}\mathbf{a}(x,\xi,\xi')u(\xi')\frac{dxd\xi'}{(2\pi)^d} \tag{1.2.14}$$

avec $\mathbf{a}(x,\xi,\xi') = \overline{a_+(x,\xi)}a_-(x,\xi')$. Il est donc naturel d'introduire des opd définis par une amplitude $\mathbf{a}$. Par rapport aux conventions précédentes les rôles de $x$ et $\xi,\xi'$ dans (1.2.14) sont inversés†. Nous continuerons à désigner ces opérateurs par le terme opd.

†On se retrouve donc avec les conventions usuelles où les estimations (1.2.15) portent sur la variable Fourier qui ici s'appelle $x$ !

**Définition 1.2.16** *On appelle* $\tilde{\mathcal{S}}^m_{\varrho,\delta,\delta}(\mathbb{R}^{3d})$ *l'ensemble des fonctions* $\mathbf{a} \in C^\infty(\mathbb{R}^{3d})$ *vérifiant pour un compact* $K$ *de* $\mathbb{R}^d$ *et tous multi-indices* $\alpha, \beta$

$$|\partial_x^\alpha \partial_{\xi,\xi'}^\beta \mathbf{a}(x,\xi,\xi')| \leq C_{\alpha,\beta}(\mathbf{a}) \langle x \rangle^{m-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{1.2.15}$$

*pour* $x \in \mathbb{R}^d$ *et* $\xi \in K$ *et* $\xi' \in K$ *et tel que* $\mathbf{a}(x,\xi,\xi') = 0$ *si* $\xi \notin K$ *ou* $\xi' \notin K$. *On définit l'opd associé pour* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *par l'équation* (1.2.14).

Encore une fois on notera $\tilde{\mathcal{S}}^m_{1,0,0}(\mathbb{R}^{3d}) = \tilde{\mathcal{S}}^m$ et on désignera indifféremment par $\tilde{\mathcal{S}}^m$ l'ensemble des symboles ou des opérateurs associés. Dans le cas ou $\varrho > \delta$ on peut obtenir un développement asymptotique du symbole $a(x,\xi)$ de $\tilde{\mathbf{A}}$ en fonction des dérivées de $\mathbf{a}$ prises au point $(x,\xi,\xi)$ [Shu87]

$$a(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} (\alpha!)^{-1} (\partial_x^\alpha D_{\xi'}^\alpha \mathbf{a})(x,\xi,\xi). \tag{1.2.16}$$

Ce développement, formé par une suite de termes appartenant à la classe $\mathcal{S}^{m-N(\varrho-\delta)}_{\varrho,\delta}$, perd son sens dès que $\varrho \leq \delta$. C'est pourquoi on est amené, comme dans la section précédente, à restreindre notre étude à des classes d'amplitudes oscillantes.

**Définition 1.2.17** *On appelle opd à amplitude oscillante* $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$ *tout opérateur défini sur la classe de Schwartz par* (1.2.14) *où* $\mathbf{a}$ *admet la représentation*

$$\mathbf{a}(x,\xi,\xi') = e^{i\Theta(x,\xi,\xi')}\mathbf{b}(x,\xi,\xi'), \quad \mathbf{b} \in \tilde{\mathcal{S}}^m, \quad \Theta \in \tilde{\mathcal{S}}^r, \quad r \in [0,1) \tag{1.2.17}$$

*avec* $\Theta$ *à valeurs réelles et* $\mathbf{b}(x,\xi,\xi') = 0$ *si* $\xi \notin K$ *où* $\xi \notin K$ *où* $K$ *est un compact de* $\mathbb{R}^d$.

Là encore on a l'inclusion $\tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta) \subset \tilde{\mathcal{S}}^m_{1-r,r,r}$, et les classes d'amplitudes oscillantes nécessitent une étude particulière lorsque $r \geq 1/2$. En fait cette étude se ramène à celle des opd à symbole oscillant, même dans le cas $r \geq 1/2$, grâce à la proposition suivante tirée de [Yaf00a] qui généralise le développement (1.2.16) aux classes $\tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$.

**Proposition 1.2.18** *Soit* $\tilde{\mathbf{A}}$ *un opd défini par* (1.2.14) *d'amplitude* $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$, *alors* $\tilde{\mathbf{A}}$ *admet la représentation*

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}u\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<x,\xi>} a_0(x,\xi) \left(\mathcal{F}^* u\right)(x) \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \tag{1.2.18}$$

*avec une amplitude* $a_0(x,\xi) = e^{i\Theta_0(x,\xi)} b_0(x,\xi)$ *vérifiant* $b_0(x,\xi) = 0$ *pour* $|\xi| \geq R > 0$ *et*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Theta_0(x,\xi) & = \Theta(x,\xi,\xi) + \Theta_1(x,\xi) & \Theta_1 \in \mathcal{S}^{2r-1} \\ b_0(x,\xi) & = \mathbf{b}(x,\xi,\xi) + b_1(x,\xi) & b_1 \in \mathcal{S}^{m+r-1}. \end{array} \right. \tag{1.2.19}$$

*En particulier si* $\mathbf{a}(x,\xi,\xi) = 0$ *alors* $a_0 \in \mathcal{C}^{m+r-1}(\Theta_0)$.

On en déduit des critères de continuité et de compacité pour les opd (1.2.14).

**Proposition 1.2.19** *Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ un opd défini par* (1.2.14) *d'amplitude* $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$*, si* $m \leq 0$ *alors* $\tilde{\mathbf{A}}$ *est borné dans l'espace* $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *et si* $m < 0$ *alors* $\tilde{\mathbf{A}}$ *est compact dans l'espace* $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

**Preuve** D'après la proposition 1.2.18 $\tilde{\mathbf{A}}$ admet la représentation (1.2.18) avec une amplitude $\mathbf{a}_0(x,\xi) = e^{i\Theta_0(x,\xi)}\mathbf{b}_0(x,\xi)$ vérifiant (1.2.19). En comparant (1.2.18) et (1.2.5) on obtient que $\tilde{\mathbf{A}}\mathcal{F} = \mathcal{F}B$ où $B$ est un opd du type (1.2.3) de symbole $b(x,\xi) = \overline{a_0(x,\xi)} \in \mathcal{C}^m(-\Theta_0)$. La continuité de $B$ si $m \leq 0$ et la compacité de $B$ si $m < 0$ entraîne les même propriétés pour $\tilde{\mathbf{A}}$. □

La dernière proposition nous donne une information spectrale sur les opd avec une amplitude oscillante. Sa preuve peut être trouvée dans [Yaf00a].

**Proposition 1.2.20** *Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ un opd* (1.2.14) *d'amplitude* $\mathbf{a}(x,\xi,\xi')$ *de la classe* $\tilde{\mathcal{C}}^0(\Theta)$. *Supposons que pour un couple de points* $x_0 \neq 0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$ *on ait*

$$|\Theta(\tau x_0,\xi_0,\xi_0)| \geq c\tau^r, \quad |\nabla_x\Theta(\tau x_0,\xi_0,\xi_0)| \geq c\tau^{r-1}, \quad r > 0, \tag{1.2.20}$$

*pour* $\tau$ *assez grand et*

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathbf{b}(\tau x_0,\xi_0,\xi_0) = 1. \tag{1.2.21}$$

*Alors pour tout* $\mu \in \mathbb{T}$ *et tout voisinage* $\Sigma$ *arbitrairement petit de* $\xi_0$ *il existe une suite (de Weyl) de fonctions* $u_n \in C_0^\infty(\Sigma)$ *telle que*

$$\|u_n\| = 1, \quad w - \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\tilde{\mathbf{A}}u_n - \mu u_n\| = 0. \tag{1.2.22}$$

*En particulier le spectre essentiel de l'opérateur* $\tilde{\mathbf{A}}$*, dans l'espace* $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$*, recouvre le cercle unité* $\mathbb{T}$.

### 1.2.3 Restriction d'un opd à la sphère

Pour étudier la matrice de diffusion $S(\lambda)$, dans la Section 2.2, on doit collecter quelques résultats sur la restriction d'opd à une hypersurface (la sphère $\mathbb{S}_k^{d-1}$ en l'occurence). En particulier on cheche à donner un sens aux termes de la forme $\Gamma_0(\lambda)A\Gamma_0^*(\lambda)$ qui apparaissent dans la formule de représentation de la matrice de diffusion (37). Cette problématique est donc intimement liée à la décomposition en intégrale directe de l'Hamiltonien libre $H_0 = -\Delta$. Les résultats de cette section sont tirés de [Yaf92], Chap. 1 Section 5, et [Yaf00a].

Commençons par rappeler quelques résultats sur l'opérateur auto-adjoint $H_0$ de domaine $\mathcal{D}(H_0) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$. Le spectre de $H_0$ recouvre l'intervalle $[0,\infty)$ et est absolument continu. D'après le théorème spectral (cf. théorème 1.1.9) il existe un espace de Hilbert $\mathfrak{N}$ et un opérateur unitaire

$$F_0 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathfrak{N}), \quad (F_0 f)(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) f \in \mathfrak{N},$$

tel que pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$(H_0 f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty \lambda(\Gamma_0(\lambda) f_1, \Gamma_0(\lambda) f_2)_{\mathfrak{N}} d\lambda.$$

Pour $H_0 = -\Delta$ on a $\mathfrak{N} = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ et

$$(\Gamma_0(\lambda) f)(\omega) = \frac{k^{(d-2)/2}}{2^{1/2}(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-ik<\omega,x>} f(x) dx, \quad k = \lambda^{1/2} > 0,\ \omega \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{1.2.23}$$

qui est, à un facteur numérique près, la restriction de $\hat{f}$ à la sphère de rayon $k = \lambda^{1/2}$. On notera aussi que l'adjoint formel de l'opérateur (1.2.23) est donné par

$$(\Gamma_0^*(\lambda) g)(x) = \frac{k^{(d-2)/2}}{2^{1/2}(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{ik<\omega,x>} g(\omega) d\omega, \tag{1.2.24}$$

et que ces deux opérateurs sont définis au moins sur la classe de Schwartz. Le théorème de trace de Sobolev conduit à la proposition suivante.

**Proposition 1.2.21** *Pour $p > 1/2$ la fonction à valeur opérateur $\langle x\rangle^{-p}\Gamma_0^*(\lambda) : \mathfrak{N} \to \mathcal{H}$ est à valeurs compacts et est continu en norme (au sens de Hölder) par rapport à $\lambda > 0$.*

L'opérateur (1.2.23) est directement relié à la famille spectrale de $H_0$ grâce à la formule de Stone.

**Proposition 1.2.22** *On pose*

$$\delta_\varepsilon(H_0 - \lambda) = (2\pi i)^{-1}(R_0(\lambda + i\varepsilon) - R_0(\lambda - i\varepsilon)), \tag{1.2.25}$$

*ou $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$. Alors pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a l'existence de la limite suivante et l'égalité*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\delta_\varepsilon(H_0 - \lambda) f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = d(E_0(\lambda) f_1, f_2)/d\lambda = (\Gamma_0(\lambda) f_1, \Gamma_0(\lambda) f_2)_{\mathfrak{N}}. \tag{1.2.26}$$

Si un opérateur $S$ commute avec $H_0$ alors nécessairement l'action de $S$ dans la représentation spectrale associée à $H_0$ se ramène à la multiplication par une fonction à valeur opérateur $S(\lambda)$

$$(S f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty (S(\lambda)\Gamma_0(\lambda) f_1, \Gamma_0(\lambda) f_2)_{\mathfrak{N}} d\lambda.$$

Mais dans le cas général d'un opérateur $A$ qui ne commute pas avec $H_0$ ceci n'est pas possible. Formellement, l'action de $A$ dans la représentation spectrale associée à $H_0$ peut être regardée comme celle d'un opérateur intégral

$$(A f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(A^\natural(\mu,\nu)\Gamma_0(\mu) f_1, \Gamma_0(\nu) f_2\right)_{\mathfrak{N}} d\mu d\nu,$$

dont le noyau $A^\natural(\mu,\nu) = \Gamma_0(\mu) A \Gamma_0^*(\nu)$ agit dans l'espace $\mathfrak{N}$, pour tous $\mu > 0$ et $\nu > 0$. Si $A^\natural(\mu,\nu)$ est continu par rapport à $\mu,\nu$ on peut alors définir les valeurs diagonales $A(\lambda) = A^\natural(\lambda,\lambda)$ de $A$. Cependant, en général, la condition que $A^\natural(\mu,\nu)$ soit continu est trop contraignante [†], les valeurs diagonales de $A$ pouvant exister sans que $A^\natural(\mu,\nu)$ soit continu.

On a besoin dans la suite de définir les valeurs diagonales d'opd de la forme $A = A_+^* A_-$ où $A_\pm \in \mathcal{C}^{m_\pm}(\Phi_\pm)$. Si on regarde $A(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) A \Gamma_0^*(\lambda)$ comme un opérateur intégral sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ alors, formellement, d'après (1.2.23), (1.2.24), son noyau est défini par l'intégrale (au sens des distributions)

$$\mathrm{p}(\omega,\omega';\lambda) = 2^{-1}(2\pi)^{-d} k^{d-2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ik<\omega'-\omega,x>} \mathbf{a}(x,k\omega,k\omega')dx, \tag{1.2.27}$$

où $\mathbf{a}(x,\xi,\xi') = \overline{a_+(x,\xi)} a_-(x,\xi')$. De ce point de vue le noyau de $A(\lambda)$ est la restriction à la sphère de rayon $k = \lambda^{1/2}$ du noyau[‡] de l'opd (1.2.14) $\tilde{\mathbf{A}} = \mathcal{F} A \mathcal{F}^*$ d'amplitude $\mathbf{a}(x,\xi,\xi')$. Pour ces raisons on adopte la définition suivante, plus générale, pour $A(\lambda)$.

**Définition 1.2.23** *Soient $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ et $\psi_1,\psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ tel que $\psi_j(k) = 1,\ j = 1,2$. On note $\hat{f}_j(\xi) = g_j(\hat{\xi})\psi_j(|\xi|),\ j = 1,2$ de telle sorte que*

$$(\Gamma_0(\lambda) f_j)(\omega) = \frac{k^{(d-2)/2}}{2^{1/2}} g_j(\omega), \quad k = \lambda^{1/2}, \quad \omega \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

*Soit $A$ un opérateur borné (agissant en représentation d'espace), alors les valeurs diagonales $A(\lambda)$ de $A$ dans la représentation spectrale associée à $H_0 = -\Delta$ sont définies, si la limite ci-dessous existe, par l'égalité*

$$(A(\lambda)g_1, g_2)_{\mathfrak{N}} : \ = 2k^{2-d} \lim_{\varepsilon \to 0} (A\delta_\varepsilon(H_0 - \lambda) f_1, \delta_\varepsilon(H_0 - \lambda) f_2)_{\mathcal{H}}. \tag{1.2.28}$$

*Pour un opd $\tilde{\mathbf{A}}$ défini par (1.2.14) on appellera $A(\lambda)$ la restriction à la sphère de rayon $\lambda^{1/2} = k$ de $\tilde{\mathbf{A}}$ l'opérateur défini, si la limite ci-dessous existe, par l'égalité*

$$(A(\lambda)g_1, g_2)_{\mathfrak{N}} : \ = 2k^{2-d} \lim_{\varepsilon \to 0} (\tilde{\mathbf{A}} \delta_\varepsilon(|\xi|^2 - \lambda) \hat{f}_1, \delta_\varepsilon(|\xi|^2 - \lambda) \hat{f}_2)_{\mathcal{H}}. \tag{1.2.29}$$

*En particulier $A(\lambda)$ dans (1.2.29) coïncide avec les valeurs diagonales de $A = \mathcal{F}^* \tilde{\mathbf{A}} \mathcal{F}$ définies par (1.2.28).*

Dès que $\mathbf{a} \in \mathcal{S}^m_{\varrho,\delta,\delta}$ on peut montrer à partir de (1.2.27) en faisant des intégrations par parties que le noyau $\mathrm{p}(\omega,\omega';\lambda)$ de $A(\lambda)$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ pour tout $\omega \neq \omega'$ (et $\lambda > 0$).

**Proposition 1.2.24** *Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ un opd de type (1.2.14) d'amplitude $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}^m_{\varrho,\delta,\delta}$. Alors la restriction $A(\lambda)$ de $\tilde{\mathbf{A}}$ à la sphère $\mathbb{S}_k^{d-1}$ définie par (1.2.29), si elle existe, possède un noyau $\mathrm{p}(\omega,\omega';\lambda)$ $C^\infty$ en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$ pour tout $\lambda > 0$.*

[†]Par exemple pour un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ le noyau n'appartient qu'à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{2d})$.

[‡]Cette approche est tout à fait justifiée si le noyau de $\tilde{\mathbf{A}}$ est continu ce qui arrive pour $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}^m_{\rho,\delta,\delta}$ si $m < -d$ ou si $\mathbf{a}(x,\xi,\xi') = 0\ \forall |\xi - \xi'| < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$.

Cependant on ne peut pas exclure l'apparition d'une très forte singularité sur la diagonale compromettant l'existence de $A(\lambda)$. Pour éliminer cette éventualité on doit imposer certaines conditions à l'amplitude $\mathbf{a}(x,\xi,\xi')$. Par exemple si pour un certain $p > 1/2$, l'opérateur $\langle x\rangle^p A \langle x\rangle^p$ est borné alors $A(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) A \Gamma_0^*(\lambda)$ admet la factorisation

$$A(\lambda) = \Big(\Gamma_0(\lambda)\langle x\rangle^{-p}\Big)\Big(\langle x\rangle^p A \langle x\rangle^p\Big)\Big(\langle x\rangle^{-p}\Gamma_0^*(\lambda)\Big), \tag{1.2.30}$$

et, d'après la proposition 1.2.21, est donc correctement défini comme un opérateur compact sur $\mathfrak{N}$. On tire de cette remarque la proposition suivante.

**Proposition 1.2.25** *Soit $\tilde{\mathbf{A}} \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$ avec $m < -1$. Alors sa restriction à la sphère $\mathbb{S}_k^{d-1}$, définie par (1.2.29) , existe en tant qu'opérateur compact sur $\mathfrak{N}$.*

**Preuve** D'après (1.2.30) et la proposition 1.2.21 il suffit de vérifier que pour un certain $p > 1/2$ l'opérateur $\langle x\rangle^p \mathcal{F}^* \tilde{\mathbf{A}} \mathcal{F} \langle x\rangle^p$ est borné. D'après la proposition 1.2.18 et l'équation (1.2.5) l'opérateur $B = \mathcal{F}^* \tilde{\mathbf{A}} \mathcal{F}$ (qui agit en représentation d'espace) appartient à la classe $\mathcal{C}^m(\Theta_0)$ donc d'après la proposition 1.2.13 pour $p = -m/2 > 1/2$ l'opérateur $\langle x\rangle^p B \langle x\rangle^p$ est bien borné dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. □

Si $m \geq -1$ l'existence de $A(\lambda)$ nécessite une hypothèse supplémentaire. Pour la découvrir considérons $A(\lambda)$ comme un opd de type (1.2.14) sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. D'après (1.2.27) son amplitude est formellement définie par

$$\mathbf{a}^\flat(y,\omega,\omega';\lambda) = \frac{|\omega+\omega'|}{8\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(z(\omega+\omega')/2 + y/k, k\omega, k\omega')dz \tag{1.2.31}$$

où $< y, \omega+\omega' >= 0$. Si $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}^m_{\varrho,\delta,\delta}$ avec $m < -1$ alors l'intégrale dans (1.2.31) est bien définie et $\mathbf{a}^\flat \in \tilde{\mathcal{S}}^{m+1}_{\varrho,\delta,\delta}$. En particulier si $1 \geq \varrho > \delta \geq 1-\varrho \geq 0$ on peut définir le symbole principal de l'opérateur $A(\lambda)$ et il appartient à la classe $\mathcal{S}^{m+1}_{\varrho,\delta}$, modulo des termes dans $\mathcal{S}^{m+1-(2\varrho-1)}_{\varrho,\delta}$, ce qui permet de retrouver les résultats de la proposition 1.2.25. Par contre si $m \geq -1$ l'intégrale dans (1.2.31) ne peut être définie que si l'intervalle d'intégration est en réalité compact. C'est pour cette raison que l'on doit imposer l'annulation de l'amplitude $\mathbf{a}$ dans un voisinage du fibré conormal à $\xi$ pour tout point $\xi \in \mathbb{S}_k^{d-1}$ [LY98].

On l'a vu, la difficulté fondamentale vient du comportement du noyau au voisinage de la diagonale, donc en pratique il suffit de considérer le cas d'une amplitude $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}^m_{\varrho,\delta,\delta}$ telle que

$$\mathbf{a}(x,\xi,\xi') = 0 \;\forall \xi,\xi' \notin X,$$

où $X$ est une petite boule centrée en un point $k\omega_0 \in \mathbb{S}_k^{d-1}$ (fixé pour la suite). Dès lors il est naturel de représenter l'opd $A(\lambda)$ dans une carte locale de la sphère valable sur $k^{-1}X \cap \mathbb{S}^{d-1}$. Le système de coordonnées locales le plus simple dans ce cas consiste à prendre la projection orthogonale du morceau de sphère $\mathcal{V} \supset k^{-1}X \cap \mathbb{S}^{d-1}$ sur le plan $\Lambda_{\omega_0}$ perpendiculaire à $\omega_0$. Si $\Sigma$ est la projection de $\mathcal{V}$ sur $\Lambda_{\omega_0}$ et vérifie $\Sigma \subsetneq \{\zeta \in \Lambda_{\omega_0} : |\zeta| < 1\}$ alors l'application (cf. Figure 1.1)

$$\varkappa : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1}, \quad \varkappa(\zeta) = \zeta + (1 - |\zeta|^2)^{1/2}\omega_0 \tag{1.2.32}$$

est un difféomorphisme de $\Sigma$ sur le voisinage $\mathcal{V}$ de $\omega_0$ dans $\mathbb{S}^{d-1}$, et

$$\mathcal{U} : \mathbb{L}^2(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{L}^2(\Sigma), \quad (\mathcal{U}u)(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)^{-1/4} u(\varkappa(\zeta)), \tag{1.2.33}$$

identifie unitairement les deux espaces $\mathbb{L}^2(\mathcal{V})$ et $\mathbb{L}^2(\Sigma)$. On peut maintenant énoncer clairement le résultat principal de cette section.

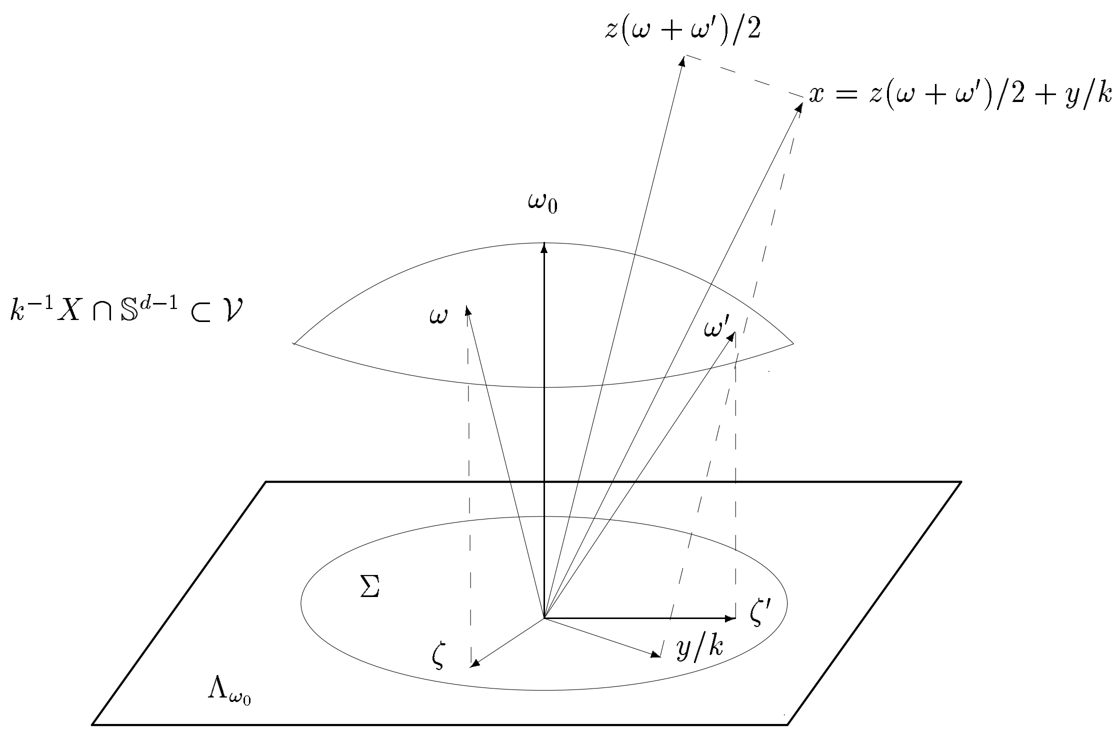


FIG. 1.1: Carte locale $(\varkappa, \Sigma)$

**Proposition 1.2.26** *Soit* $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}^m_{\varrho,\delta,\delta}(\mathbb{R}^d \times X \times X)$ *pour* $\varrho > 0$, $\delta < 1$, *supposons qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = 0$ *lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées*

$$|\xi - \xi'| < \varepsilon, \ | < \hat{x}, \hat{\xi} > | > 1 - \varepsilon. \tag{1.2.34}$$

*Soit* $\mathcal{U}$ *l'opérateur unitaire associé par* (1.2.33) *au difféomorphisme* $\varkappa$, *défini par* (1.2.32). *On définit* $A^{\varkappa}(\lambda)$ *l'opd* (1.2.14) *sur* $\Sigma$ *d'amplitude*

$$\mathbf{a}^{\varkappa}(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = \frac{\alpha(\zeta, \zeta')}{4\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(z(\varkappa(\zeta) + \varkappa(\zeta'))/2 + y/k, k\varkappa(\zeta), k\varkappa(\zeta'))dz \tag{1.2.35}$$

*où* $k = \lambda^{1/2}$ *et*

$$\alpha(\zeta, \zeta') = 2^{-1}\left(\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-|\zeta'|^2}\right)^{1/4} + \left(\frac{1-|\zeta'|^2}{1-|\zeta|^2}\right)^{1/4}\right). \tag{1.2.36}$$

*Alors* $\mathbf{a}^{\varkappa} \in \tilde{\mathcal{S}}^{m+1}_{\varrho,\delta,\delta}(\mathbb{R}^{d-1} \times \Sigma \times \Sigma)$ *et la restriction* $A(\lambda)$ *de* $\tilde{\mathbf{A}}$*, définie par la limite* (1.2.29)*, existe et vérifie* $A(\lambda) = \mathcal{U}^* A^{\varkappa}(\lambda)\mathcal{U}$*.*

Lorsqu'on travaille sur une variété avec un opd $A \in \mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$ où $1 \geq \varrho > \delta \geq 1 - \varrho \geq 0$ on peut définir un symbole principal $a^\flat$ invariant lors d'un changement de coordonnés.

**Proposition 1.2.27** *Soit* $A$ *un opd sur la sphère de symbole* $a^\flat \in \mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}(T^*\mathbb{S}^{d-1})$ *avec* $1 \geq \varrho > \delta \geq 1 - \varrho \geq 0$*. Soient* $\chi$ *une fonction de troncature supportée dans un voisinage* $\mathcal{V}$ *du point* $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ *et* $\varkappa$ *le difféomorphisme défini par* (1.2.32) *et* $\mathcal{U}$ *défini par* (1.2.33)*. Alors l'opd* $\mathcal{U}\chi A\chi\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}(T^*\mathbb{R}^{d-1})$ *a pour symbole principal, modulo* $\mathcal{S}^{m-(2\varrho-1)}_{\varrho,\delta}(T^*\mathbb{R}^{d-1})$*,*

$$a^{\varkappa}(y, \zeta) = \chi(\varkappa(\zeta))^2 a^\flat({}^t\varkappa'(\zeta)y, \varkappa(\zeta)). \tag{1.2.37}$$

Bien que, contrairement à la représentation (1.2.35), le symbole principal ne définisse pas exactement l'opérateur $A$, la proposition se révélera très utile dans les applications qui vont suivre où seule la connaissance du symbole principal $a^\flat$, modulo $\mathcal{S}^{m-(2\varrho-1)}_{\varrho,\delta}$, est en fait nécessaire. En particulier, en vue de la Section 2.3.1, on a besoin de la proposition suivante qui permet localiser précisément le spectre essentiel d'un opd connaissant l'intervalle de valeurs prises par son symbole à "l'infini".

**Proposition 1.2.28** *Soit* $A$ *un opd sur la sphère* $\mathbb{S}^{d-1}$ *dont le symbole principal* $a^\flat \in \mathcal{S}^0(T^*\mathbb{S}^{d-1})$ *asymptotiquement homogène de degré* 0*. Alors*

$$\sigma_{ess}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \exists(b, \omega) \in T^*\mathbb{S}^{d-1}, \quad |b| \geq R, \ \textit{tels que} \ \mu = a^\flat(b, \omega)\}. \tag{1.2.38}$$

**Preuve** Nous allons commencer par construire des suites de Weyl pour tout $\mu$ dans l'ensemble (1.2.38). Pour ce faire nous allons considérer l'opd $A$ dans la carte locale $\varkappa, \Sigma$ définie par (1.2.32) (cf Figure 1.1). Fixons $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $\chi \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ dont le support est contenu dans un petit voisinage $\mathcal{V}$ de $\omega_0$ de telle sorte que l'application (1.2.32) soit un difféomorphisme de $\Sigma$ sur $\mathcal{V}$. On note $A^{\varkappa}$ l'opd de symbole

$$a^{\varkappa}(y, \zeta) = \chi(\varkappa(\zeta))^2 a^\flat({}^t\varkappa'(\zeta)y, \varkappa(\zeta))$$

alors d'après la proposition 1.2.27 $\mathcal{U}^* A^{\varkappa}\mathcal{U} - \chi A\chi$, où $\mathcal{U}$ est défini par (1.2.33), est un opérateur compact. Soit maintenant $y_0 \in \Lambda_{\omega_0} \setminus \{0\}$ et $\mu = a^\flat(\tau y_0, \omega_0)$, $\forall \tau |y_0| > R$. Pour $\varepsilon > 0, \tau > 0$ on définit un ensemble de fonctions par

$$u_{\varepsilon,\tau}(\zeta) = \varepsilon^{-1/2} f(\varepsilon^{-1}\zeta) e^{-i\tau\langle y_0, \zeta\rangle}, \quad f \in C_0^\infty(\Sigma). \tag{1.2.39}$$

Il est clair que $\|u_{\varepsilon,\tau}\|$ est constante et que $u_{\varepsilon,\tau}$ tend faiblement vers zéro dans $\mathbb{L}^2(\Lambda_{\omega_0})$ quand $\tau \to \infty$. L'action de l'opérateur $A^{\varkappa}$ sur les fonctions (1.2.39) est données par la méthode de la phase stationnaire (cf. [Hör83] Chapitre 7 ou [Yaf00a])

$$\begin{aligned}(A^{\varkappa}u_{\varepsilon,\tau})(\zeta) &= (2\pi)^{-1}\chi(\varkappa(\zeta))^2\int_{\Lambda_{\omega_0}}\int_{\Sigma} e^{i\langle\zeta'-\zeta,y\rangle}a^{\flat}({}^t\varkappa'(\zeta)y,\varkappa(\zeta))u_{\varepsilon,\tau}(\zeta')d\zeta'dy,\\ &= a^{\flat}(\tau y_0,\zeta)u_{\varepsilon,\tau}(\zeta)+r_{\varepsilon,\tau}(\zeta),\end{aligned} \tag{1.2.40}$$

où $||r_{\varepsilon,\tau}|| \leq C\varepsilon^{-1}\tau^{-1}$ tant que $\varepsilon\tau \to \infty$. On obtient donc que

$$\|A^{\varkappa}u_{\varepsilon,\tau}-\mu u_{\varepsilon,\tau}\| = O\left(\varepsilon\right)+O\left(\varepsilon^{-1}\tau^{-1}\right),$$

et en choisissant $\varepsilon_n = 1/\sqrt{n}$ et $\tau_n = n$ on obtient que la suite de fonctions $(u_{\varepsilon_n,\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Weyl pour $A^{\varkappa}$ associée à $\mu$. Comme le symbole de $A$ ne diffère de $a^{\flat}$ que par des termes dans $\mathcal{S}^{-1}$ on déduit du théorème de Weyl que $(\mathcal{U}^*u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n = u_{\varepsilon_n,\tau_n}$ est aussi une suite de Weyl pour $\chi A\chi$ associée à $\mu$. De plus comme le support des fonctions $\mathcal{U}^*u_n$ s'écrase au point $\omega_0$ quand $n \to \infty$ on peut choisir une fonction $\chi_0 \in C^{\infty}(\mathbb{S}^{d-1})$ supportée là où $\chi = 1$ de telle sorte que $\chi\mathcal{U}^*u_n = \chi_0\mathcal{U}^*u_n = \mathcal{U}^*u_n$. Pour ce choix on a alors que

$$\|(A-\mu)\mathcal{U}^*u_n\| \leq \|(\chi A\chi-\mu)\mathcal{U}^*u_n\| + \|(1-\chi)A\chi_0\mathcal{U}^*u_n\|,$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ puisque l'opérateur $(1-\chi)A\chi_0$ est compact (il a un noyau $C^{\infty}$). On a donc construit une suite de Weyl pour $A$ associé à $\mu$. Cette procédure permet de construire des suites de Weyl pour toute valeur dans (1.2.38).

Il reste maintenant à montrer que le spectre essentiel de $A$ ne contient pas d'autres points que ceux de (1.2.38). Rappelons que le symbole principal $a^{\flat}(b,\omega)$ de $A$ est défini sur $T^*\mathbb{S}^{d-1}$ modulo des termes dans $\mathcal{S}^{-1}$. Soient $\mu_0$ n'appartenant pas à l'ensemble (1.2.38) et $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que $\chi(\tau) = 0$ pour $|\tau| \leq R$ et $\chi(\tau) = 1$ pour $|\tau| \geq R+1$. On appelle $\mathcal{R}(\mu_0)$ un opd de symbole principal

$$r^{\flat}(b,\omega) = \chi(b)/(a^{\flat}(b,\omega)-\mu_0). \tag{1.2.41}$$

Comme, sur le support de $\chi$, on a $|a^{\flat}(b,\omega)-\mu_0| \geq c > 0$ le symbole $r^{\flat}(b,\omega)$ appartient à la classe $\mathcal{S}^0(T^*\mathbb{S}^{d-1})$. Par la proposition 1.2.3 on obtient l'égalité suivante

$$\mathcal{R}(\mu_0)(A-\mu_0) = Id - K, \tag{1.2.42}$$

où $K$ est un opérateur compact sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$. L'équation (1.2.42) montre que $\mathcal{R}(\mu_0)$ est une paramétrix de $A$. Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|u_n\| = 1, \quad w-\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|Au_n-\mu_0u_n\| = 0.$$

Grâce à (1.2.42) on obtient l'estimation

$$\|u_n\| = \|\mathcal{R}(\mu_0)(Au_n - \mu_0 u_n) + Ku_n\| \le \|\mathcal{R}(\mu_0)\|\|Au_n - \mu_0 u_n\| + \|Ku_n\|,$$

qui est absurde puisque d'une part $\lim_{n\to\infty} Ku_n = \lim_{n\to\infty}(Au_n - \mu_0 u_n) = 0$ et d'autre part $\|u_n\| = 1$. □

Enfin on aura besoin dans le cas du cercle $\mathbb{S}$ (cf. section 2.3.2) d'un autre résultat.

**Lemme 1.2.29** *Soit $A$ un opd de symbole principal $a^\flat \in \mathcal{S}^{-1}(\mathbb{S})$, asymptotiquement homogène de degré $-1$. Alors $A$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S})$ et son noyau vérifie pour $\omega \neq \omega_0$, $\omega \to \omega_0$, uniformément en $\omega_0$, l'estimation*

$$\mathrm{p}(\omega, \omega_0) = O\left(|\ln|\omega - \omega_0||\right). \tag{1.2.43}$$

**Preuve** Comme le symbole principal $a^\flat$ de $A$ n'est défini que modulo des termes dans $\mathcal{S}^{-2}$ son noyau p, défini par

$$\mathrm{p}(\omega, \omega') = (2\pi)^{-1} \int_{\Lambda_\omega} e^{i<\omega'-\omega, b>} a^\flat(b, \omega) db,$$

n'est défini que modulo la contribution de termes dans $\mathcal{S}^{-2}$ à l'intégrale précédente, c'est à dire modulo des termes bornés. Si on note $\theta$ l'angle qui sépare les directions $\omega$ et $\omega'$ on obtient que $< \omega - \omega', b >= \pm \sin\theta |b|$ (selon l'orientation relative de $b$ et $\omega - \omega'$) et $\mathrm{p}(\omega, \omega') = \widehat{a^\flat(., \omega)}(\sin\theta)$. D'un autre coté comme $|\omega - \omega'| = 2\sin(\theta/2)$ le problème précédent revient à majorer la singularité en 0 de la transformée de Fourier $\hat{a}(\xi)$ d'une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ et asymptotiquement homogène de degré $-1$ par $|\ln|\xi||$ quand $\xi \to 0$. Maintenant on écrit donc que

$$\hat{a}(\xi) = (2\pi)^{-1} \left( \int_{|x|\le R} e^{-i\xi x} a(x) dx + \int_{|x|>R} e^{-i\xi x} a(x) dx \right),$$

pour un $R > 0$ tel que $a(\tau x) = a(x)/\tau$ pour $|x| \ge R, \tau \ge 1$. Le premier terme est ici uniformément borné en $\xi$, il ne reste donc qu'à considérer le second terme :

$$|\hat{a}(\xi)| \le C \left( 1 + \left| \int_{|x|>R} e^{-i\xi x} a(x) dx \right| \right).$$

Par changement de variable $|\xi|x \to x$ et selon que $\pm\xi > 0$ l'intégrale précédente devient

$$\int_{|x|>R} e^{-i\xi x} a(x) dx = 2C \int_{|\xi|R}^\infty e^{\mp ix} \frac{1}{x} dx = 2C \int_{|\xi|R}^1 e^{\mp ix} \frac{1}{x} dx + 2C \int_1^\infty e^{\mp ix} \frac{1}{x} dx.$$

La seconde intégrale étant uniformément bornée en $\xi$ il reste à estimer la première

$$\left| \int_{\xi R}^1 e^{\mp ix} \frac{1}{x} dx \right| \le \int_{|\xi|R}^1 \frac{1}{x} dx = -\ln R - \ln|\xi|,$$

ce qui conduit à $|\hat{a}(\xi)| = O\left(|\ln|\xi||\right)$. Finalement comme $\mathrm{p}(\omega, \omega')$ est $C^\infty$ pour tout $\omega \neq \omega'$ et vérifie l'estimation (1.2.43) au voisinage de la diagonale on a que $\mathrm{p}(\omega, \omega') \in \mathbb{L}^2(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ et donc $A$ est bien Hilbert-Schmidt. □

## 1.3 L'opérateur de Schrödinger

Dans cette partie après avoir rappelé quelques résultats importants sur l'opérateur de Schrödinger on collecte différentes estimations découlant de la théorie de Mourre présenté en section 1.1.3. Ces estimations serviront dans la suite à appliquer la théorie des perturbations lisses, décrite dans les sections 1.1.1 et 1.1.2, à l'opérateur de Schrödinger. A partir d'ici $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

### 1.3.1 Les hypothèses

L'opérateur de Schrödinger magnétique est défini par l'expression différentielle suivante

$$H = (D - A(x))^2 + V(x). \tag{1.3.1}$$

où $A(x)$ est le potentiel (vecteur) magnétique et $V(x)$ est le potentiel (scalaire) électrique. On fait les hypothèses suivantes sur les potentiels :

**Hypothèse 1** On suppose que les potentiels $A$ et $V$ admettent une décomposition en deux termes de régularités différentes

$$A(x) = A_L(x) + A_S(x),\ V(x) = V_L(x) + V_S(x), \tag{1.3.2}$$

$$V_L, A_{L,j} \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ V_S, A_{S,j} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d),\ j = 1, \dots, d. \tag{1.3.3}$$

**Hypothèse 2** Ensuite on fait une hypothèse "longue portée" sur les termes $C^\infty$, avec un gain de décroissance pour les dérivées

$$|\partial_x^\alpha A_L(x)| + |\partial_x^\alpha V_L(x)| = O\left((1 + |x|)^{-\rho-|\alpha|}\right), \quad \rho \in (0, 1]. \tag{1.3.4}$$

**Hypothèse 3** Puis une hypothèse "courte portée", pour les termes non réguliers

$$|A_S(x)| + |V_S(x)| = O\left((1 + |x|)^{-\rho_0}\right), \quad \rho_0 > 1. \tag{1.3.5}$$

**Hypothèse 4** Enfin on ajoute une dernière hypothèse simplificatrice sur le potentiel magnétique[†]

$$B(x) = \mathrm{rot}A(x) = o\left((1 + |x|)^{-1}\right), \tag{1.3.6}$$

$$\mathrm{div}A(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{1.3.7}$$

[†]En fait, d'après (1.3.4), il suffit de faire cette hypothèse sur la partie courte portée $A_S$ du potentiel magnétique.

Sous l'hypothèse (1.3.7) on peut écrire que

$$H = -\Delta + 2iA\nabla + i\mathrm{div}A + |A|^2 + V,$$

ce qui permet de s'assurer qu'avec les hypothèses 1,2,3 l'opérateur (1.3.1) est bien auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ avec pour domaine $\mathcal{D}(H) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$. Sans l'hypothèse (1.3.7) on ne peut rien dire sur le domaine de $H$. On a seulement une information sur le domaine de la forme quadratique $h$ définie pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$h[u,v] = \int_{\mathbb{R}^d} < (D - A(x))u(x), \overline{(D - A(x))v(x)} > + V(x)u(x)\overline{v(x)}dx = (Hu, v)_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)},$$

qui est $\mathcal{D}[h] = \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$, ce qui complique considérablement l'obtention des estimations de résolvantes (en particulier l'estimation de radiation) dont on a besoin pour développer la théorie des perturbations lisses pour $H^\dagger$. C'est pour cette raison que l'on décide de travailler ici sous l'hypothèse (1.3.7). Cette hypothèse n'est pas trop contraignante car elle est automatiquement vérifiée dans la jauge de Coulomb $\mathrm{div}A(x) = 0$.

L'hypothèse (1.3.6) n'est pas indispensable mais permet de simplifier la présentation de la théorie de la diffusion pour $H$. En effet sous les hypothèses (1.3.2) à (1.3.6) l'absence de valeurs propres positives pour l'opérateur $H$ peut être trouvée dans les travaux de Ikebe et Uchiyama [IU71, Uch87]. La preuve de Uchiyama repose sur l'approche de Kato [Kat59] utilisant les propriétés de décroissance polynomiales des fonctions propres de l'opérateur $H$. Il est a noter que dans le cas ou $A_S = 0$ et $V_S = 0$ l'absence de valeurs propres positives est démontrée dans la thèse de Nicoleau [Nic91] sous l'unique l'hypothèse (1.3.4). Cette preuve repose sur la méthode de Mourre et généralise la preuve de [CFKS87] au cas magnétique (voir aussi [DG97]).

**Théorème 1.3.1** *Sous les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *l'équation* $Hu(x) = \lambda u(x)$ *n'a pas de solutions* $u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *si* $\lambda > 0$.

**Preuve** Le théorème 1.3.1 découle du théorème 1.1 de [Uch87] avec les notations suivantes

$$b_j(x) = A_j(x),\ a_{i,j}(x) = \delta_{i,j},\ q_1(x) = V_L(x) - \lambda,\ q_2(x) = V_S(x).$$

et le choix de paramètres $\alpha = \beta = \gamma = \eta = 1$. Ces choix permettent de vérifier les hypothèses (A1) ... (G2) avec les constantes $a = 1/2, \delta_1 = 0, \delta_2 = -1$. En particulier l'hypothèse (F3) est bien vérifiée sous les hypothèses (1.3.2) à (1.3.6)

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\sup r^{2-2\beta}&\left(r\partial_r q_1(x) + \gamma q_1(x) + (1+\eta)\left\{\frac{1}{2\alpha-\gamma}|rq_2(x)|^2 + \frac{1}{2-\gamma}|B(x)x|^2\right\}\right)\\ &= \lim_{r\to\infty}\sup\left(x.\nabla V_L(x) + V_L(x) - \lambda + 2|xV_S(x)|^2 + 2|x.\mathrm{rot}A(x)|^2\right) = -\lambda < 0.\end{aligned}$$

Le théorème 1.1 de [Uch87] conduit alors à l'estimation

$$\lim_{r\to\infty}\inf R\int_{R<|x|<R+1} |u(x)|^2 dx > 0,$$

†Voir par exemple [GY00] où ce type de difficultés ont été surmontées pour l'opérateur de Dirac.

et d'après le Corollaire 1.2 [Uch87] (et un théorème de prolongement unique) $u \notin \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.□

Sans l'absence de valeurs propres plongées dans le spectre positif il faudrait localiser les considérations du chapitre 2 sur un intervalle borné $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 et ne contenant pas de valeurs propres de $H$.

### 1.3.2 La théorie de Mourre pour $H$

Comme les termes à courte portée $A_S$ et $V_S$ jouent un rôle secondaire par rapport aux termes à longue portée $A_L$ et $V_L$, on est amené à introduire l'opérateur

$$H_1 = (D - A_L(x))^2 + V_L(x), \tag{1.3.8}$$

auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ et de domaine $\mathcal{D}(H_1) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$ sous l'hypothèse (1.3.4). L'hypothèse (1.3.4) permet de développer facilement la théorie de Mourre pour l'opérateur $H_1$. On introduit d'abord le générateur des dilatations qui joue un rôle essentiel dans la théorie de Mourre pour l'opérateur de Schrödinger.

**Proposition 1.3.2** *On appelle générateur des dilatations l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{A}$ défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\mathcal{A} = \frac{x.D + D.x}{2} = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{d} x_k \partial_{x_k} + \partial_{x_k} x_k. \tag{1.3.9}$$

*Pour tout réel $t$ l'opérateur $e^{it\mathcal{A}}$ est unitaire sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et vérifie pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$\left(e^{it\mathcal{A}} f\right)(x) = e^{2t/d} f(e^t x). \tag{1.3.10}$$

*En particulier $e^{it\mathcal{A}}$ préserve l'espace $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Le générateur des dilations est le candidat naturel au titre d'opérateur conjugué à $H_1$.

**Théorème 1.3.3** *Sous l'hypothèse* (1.3.4) *le générateur des dilations est $n$ fois conjugué à $H_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

**Preuve** D'après la proposition 1.3.2 le domaine de $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui est bien dense dans $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$ et l'opérateur $e^{it\mathcal{A}}$ conserve bien $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$. Les hypothèses i) et ii) de la Définition 1.1.13 sont donc vérifiées. Intéressons nous maintenant au commutateur $B_1$. Un calcul direct nous donne

$$i[H_1, \mathcal{A}] = 2H_1 + v(x) + \sum_{k=1}^{d} a_k(x) D_k, \tag{1.3.11}$$

ou les fonctions $v(x)$ et $a_k(x), k = 1, \dots d$ dépendent seulement des dérivées partielles des potentiels $V_L(x)$ et $A_L(x)$

$$\begin{aligned} v(x) &= -2V_L(x) - (x.\nabla)V_L(x) - i(\mathrm{div}(A_L(x)) + (x.\nabla)A_L(x)) \\ &\qquad\qquad -2 < A_L(x), A_L(x) + (x.\nabla)A_L(x) >, \\ a_k(x) &= 2(A_{L,k}(x) + (x.\nabla)A_{L,k}(x)). \end{aligned}$$

En particulier sous l'hypothèse (1.3.4) $v$ et $a_k$ satisfont pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ les estimations

$$|\partial_x^\alpha v(x)| + |\partial_x^\alpha a_k(x)| = O\left((1+|x|)^{-\rho-|\alpha|}\right), \tag{1.3.12}$$

avec le même $\rho$ que dans (1.3.4). On déduit de (1.3.12) que les opérateurs $v(x)(H_1 + i)^{-1/2}$, $a_k(x)D_k(H_1+i)^{-1}$ sont compact et donc le commutateur $B_1$ est donc $H_1$-borné. En réitérant le même calcul que dans (1.3.11) on trouve que les commutateurs $B_j$ vérifient

$$B_j = 2^j H_1 + v_j(x) + \sum_{k=1}^{d} a_{j,k}(x) D_k, \tag{1.3.13}$$

ou les fonctions $v_j(x)$ et $a_{j,k}(x), k = 1, \dots d$ dépendent encore seulement des dérivées partielles des potentiels $V_L(x)$ et $A_L(x)$ et satisfont les estimations (1.3.12) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Les commutateurs $B_j$ sont donc $H_1$-bornés pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et les hypothèses iii) et iv) sont satisfaites pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il découle de (1.3.11) que pour tout intervalle $\Lambda_\delta$, avec $\lambda > \delta > 0$ (cf. (1.1.22)) on a l'estimation de Mourre

$$E_1(\Lambda_\delta) i[H_1, \mathcal{A}] E_1(\Lambda_\delta) \geq c E_1(\Lambda_\delta) + E_1(\Lambda_\delta) K_1 E_1(\Lambda_\delta), \tag{1.3.14}$$

avec $c = 2(\lambda - \delta) > 0$ et $K_1$ compact, donc l'hypothèses v) est vérifiée. □

Pour l'opérateur $H$, contenant les termes à courte portée $A_S$ et $V_S$, on a seulement le résultat suivant.

**Proposition 1.3.4** *Sous les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *l'opérateur $H$ défini par* (1.3.1) *vérifie les hypothèses* i), ii), iii) *et* v) (*avec* $K = 0$) *pour $\mathcal{A}$ défini par* (1.3.9) *sur tout intervalle* $\Lambda_\delta \subset (0, \infty)$ *disjoint de* $0$ *avec $\delta$ assez petit.*

**Preuve** En ajoutant les termes à courte portée

$$\tilde{V}_S = (DA_S(x) + A_S(x)D - 2 < A_L(x), A_S(x) > -|A_S(x)|^2 - V_S(x)$$

dans (1.3.11) on obtient

$$i[H, \mathcal{A}] \;=\; 2H + v(x) + \sum_{k=1}^{d} a_k(x) D_k - 2\tilde{V}_S + [\tilde{V}_S, x.\nabla]. \tag{1.3.15}$$

il est clair que sous l'hypothèse (1.3.5) $(H_0+i)^{-1}DA_S(x)$, $A_S(x)D(H+i)^{-1}$, $V_S(x)(H+i)^{-1}$ sont compact. Pour minorer le commutateur on utilise les estimations suivantes (cf.[Yaf00b] section 4.2)

$$\begin{aligned} |(V_S(x)u(x), x.\nabla u(x))_{\mathcal{H}}| &\leq c\| \langle x\rangle^{-\varepsilon_1} (H+i)^{1/2}u\|^2, &(1.3.16)\\ |(DA_S(x)u(x), x.\nabla u(x))_{\mathcal{H}}| &\leq c\| \langle x\rangle^{-\varepsilon_1} (H+i)u\|^2, &(1.3.17)\\ |(A_S(x)Du(x), x.\nabla u(x))_{\mathcal{H}}| &\leq c\| \langle x\rangle^{-\varepsilon_1} (H+i)^{1/2}u\|^2, &(1.3.18)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1 = (\rho_0-1)/2 > 0$. En particulier le commutateur (1.3.15) s'étend en un opérateur borné de $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{H}$ et l'hypothèse iii) est vérifiée. Comme de plus l'opérateur $\langle x\rangle^{-\varepsilon_0} (H+i)E(\Lambda_\delta)$ est compact, il découle de (1.3.15) que pour tout intervalle $\Lambda_\delta$, avec $\lambda > \delta > 0$ (cf. (1.1.22)) on a l'estimation de Mourre

$$E(\Lambda_\delta)i[H,\mathcal{A}]E(\Lambda_\delta) \geq CE(\Lambda_\delta) + E(\Lambda_\delta)KE(\Lambda_\delta), \qquad (1.3.19)$$

avec $c > 0$ et $K$ compact, et l'hypothèse v) est vérifiée. Maintenant comme $K$ est compact $\lim_{\delta\to 0}\|KE(\Lambda_\delta)\| = 0$ on a que

$$E(\Lambda_\delta)KE(\Lambda_\delta) \geq -C_\delta E(\Lambda_\delta), \quad C_\delta > 0, \quad \lim_{\delta\to 0} C_\delta = 0,$$

d'où l'estimation

$$E(\Lambda_\delta)i[H,\mathcal{A}]E(\Lambda_\delta) \geq cE(\Lambda_\delta), \qquad (1.3.20)$$

pour un $c > 0$ et $\delta$ assez petit. $\square$

**Remarque 1.3.5** L'hypothèse iv) de la définition 1.1.13 n'est vérifiée que si on impose la condition supplémentaire $\rho_0 \geq 2$ dans (1.3.5) à cause du terme

$$[[DA_S(x) + A_S(x)D - 2 < A_L(x), A_S(x) > -|A_S(x)|^2 - V_S(x), x.\nabla], x.\nabla]$$

dans le double commutateur $B_2 = i[[H,\mathcal{A}],\mathcal{A}]$ et qu'on ne peut majorer, comme dans (1.3.16) à (1.3.18), que par $\langle x\rangle^{-(\rho_0-2)/2} (H_0+i)$.

Le théorème 1.3.3 nous permet de récupérer l'ensemble des résultats fourni par la théorie de Mourre énoncés dans la section 1.1.3 au moins pour l'opérateur $H_1$.

**Théorème 1.3.6** *Soient $\mathcal{A}$ le générateur des dilatations et $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ disjoint de 0. Alors sous l'hypothèse (1.3.4) on a les estimations de propagation suivantes*

$$\sup_{\substack{\mathrm{Re}\, z\in\Lambda \\ 1\geq|\mathrm{Im}\, z|>0}} \| \langle \mathcal{A}\rangle^{-s} R_1^l(z) \langle \mathcal{A}\rangle^{-s} \| \leq c, \qquad \forall s > l - 1/2, \qquad (1.3.21)$$

$$\sup_{\substack{\mathrm{Re}\, z\in\Lambda \\ 1\geq\pm\mathrm{Im}\, z>0}} \| \langle \mathcal{A}\rangle^{-s} R_1^l(z) P_{\mathcal{A}}^{\mp} \langle \mathcal{A}\rangle^{s-l} \| \leq c, \qquad \forall s > l - 1/2, \qquad (1.3.22)$$

$$\sup_{\substack{\mathrm{Re}\, z\in\Lambda \\ 1\geq\pm\mathrm{Im}\, z>0}} \| \langle \mathcal{A}\rangle^{s_1} P_{\mathcal{A}}^{\mp} R_1^l(z) P_{\mathcal{A}}^{\pm} \langle \mathcal{A}\rangle^{s_2} \| \leq c, \qquad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \qquad (1.3.23)$$

*où $R_1(z) = (H_1 - z)^{-1}$. En particulier le spectre positif de $H_1$ est absolument continu.*

### 1.3.3 Principe d'absorption limite et estimation de radiation

Pour appliquer la théorie des perturbations lisses, présentée dans la section 1.1.1, au couple d'opérateurs $H_1, H_0 = -\Delta$ on a besoin d'estimations de propagation du type (1.1.2) pour montrer le caractère $H$-lisse de certains opérateurs. Le théorème 1.3.6 montre déjà que, sous l'hypothèse (1.3.4) l'opérateur $\langle \mathcal{A} \rangle^{-s}$, $s > 1/2$, est $H_1$-lisse sur tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0. Comme les opérateurs $E(\Lambda)D$ et $DE(\Lambda)$ sont bornés on peut obtenir la même estimation que (1.3.21), pour $l = 1$, avec $\langle \mathcal{A} \rangle^{-p}$ remplacé par $\langle x \rangle^{-p}$. C'est le principe d'absorption limite énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 1.3.7 (Principe d'Absorption Limite)** *Soit $H$ défini par* (1.3.1) *avec $A$ et $V$ vérifiant les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7). *Alors pour tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de* 0 *on a l'estimation*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \| \langle x \rangle^{-p} R(z) \langle x \rangle^{-p} \| \leq c, \quad p > 1/2. \tag{1.3.24}$$

*En particulier l'opérateur $\langle x \rangle^{-p}$, $p > 1/2$, est $H$-lisse sur tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de* 0 *et $\langle x \rangle^{-p} R(\lambda \pm i0) \langle x \rangle^{-p}$ est compact pour tout $\lambda \in (0, \infty)$.*

Pour cela on peut, comme dans [Nic91] Chap. III section 2.1, utiliser le lemme 8.2 de [PSS81] (voir aussi la proposition 1.3.21).

**Lemme 1.3.8** *Pour tout $p \in [0, 1]$ l'opérateur $\langle \mathcal{A} \rangle^{p} R(\pm i) \langle x \rangle^{-p}$ est borné dans $\mathcal{H}$.*

**Preuve** Via un argument d'interpolation il suffit d'avoir $\| \langle \mathcal{A} \rangle^{p} R(\pm i) \langle x \rangle^{-p} \| < \infty$ pour $p = 1$ (le cas $p = 0$ étant trivial). Pour $p = 1$ on peut écrire la décomposition suivante

$$D.x\,(H \pm i)^{-1} \langle x \rangle^{-1} = \sum_{k=1}^{d} \left(D_k\,(H \pm i)^{-1}\right) \left(x_k \langle x \rangle^{-1}\right) + \sum_{k=1}^{d} D_k[x_k, (H \pm i)^{-1}] \langle x \rangle^{-1}. \tag{1.3.25}$$

Le premier terme de (1.3.25) est clairement un produit d'opérateurs bornés. Pour le second terme de (1.3.25) on utilise le fait que le commutateur de $H$ avec une l'opérateur de multiplication par la fonction $g(x)$ dont les dérivées sont dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$[g(x), H] = [g(x), (D - A)^2] = -2\nabla g(x) \nabla - \Delta g(x) + iA(x)\nabla g(x), \tag{1.3.26}$$

soit borné de $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$, et la décomposition suivante

$$\sum_{k=1}^{d} D_k[x_k, (H \pm i)^{-1}] \langle x \rangle^{-1} = \sum_{k=1}^{d} \left(D_k\,(H \pm i)^{-1}\right) \left([H, x_k]\,(H \pm i)^{-1}\right) \langle x \rangle^{-1},$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

**Remarque 1.3.9** La démonstration du principe d'absorption limite à partir de l'estimation (1.1.24) et du lemme 1.3.8 n'est possible que si $\rho_0 \geq 2$ dans (1.3.5) d'après la remarque 1.3.5. Cependant cette hypothèse n'est pas optimale. Dans le cas $A(x) = 0$ Yafaev à montré dans [Yaf85] qu'on peut obtenir, avec la méthode de Mourre, les mêmes résultats en imposant seulement la condition $\rho_0 > 1$. Ceci revient à affaiblir légèrement l'hypothèse iv) de la Définition 1.1.13. C'est de cette manière que l'on obtient le principe d'absorption limite pour $H$. Ces détails techniques sont relégués en appendice (cf. section 2.3.3).

Pour des raisons techniques on a besoin de résultats similaires au principe d'absorption limite mais avec l'opérateur $\langle x\rangle^{-p} D_k,\ p > 1/2,\ k = 1, \ldots, d$. Ces estimations se déduisent de (1.3.24) grâce au lemme suivant.

**Lemme 1.3.10** *les opérateur $\langle x\rangle^{-p} R(\pm i) \langle x\rangle^{p}$ et $\langle x\rangle^{-p} D_k R(\pm i) \langle x\rangle^{p},\ k = 1, \ldots, d$, sont bornés pour tout $p \in [0, 1]$.*

**Preuve** Dans le premier cas le résultat découle de la décomposition

$$\langle x\rangle^{-p} R(\pm i) \langle x\rangle^{p} = R(\pm i) + \langle x\rangle^{-p} [R(\pm i), \langle x\rangle^{p}] = R(\pm i) + \langle x\rangle^{-p} R(\pm i)[\langle x\rangle^{p}, H]R(\pm i),$$

puisque d'après (1.3.26) le commutateur $[\langle x\rangle^{p}, H]$ est bien borné pour $p \leq 1$. De même pour le second terme

$$\langle x\rangle^{-p} D_k R(\pm i) \langle x\rangle^{p} = (D_k - i \langle x\rangle^{-p} \partial_k(\langle x\rangle^{p}))R(\pm i) + \langle x\rangle^{-p} D_k R(\pm i)[\langle x\rangle^{p}, H]R(\pm i).$$

□

**Proposition 1.3.11** *Soit $H$ défini par* (1.3.1) *avec $A$ et $V$ vérifiant les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7). *Alors pour tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 on a les estimations*

$$\sup_{\substack{\mathrm{Re}\, z \in \Lambda \\ 1 \geq |\mathrm{Im}\, z| > 0}} \| \langle x\rangle^{-p} D_k R(z) D_j \langle x\rangle^{-p} \| \leq c,\ p > 1/2,\ k, j = 1, \ldots, d, \tag{1.3.27}$$

$$\sup_{\substack{\mathrm{Re}\, z \in \Lambda \\ 1 \geq |\mathrm{Im}\, z| > 0}} \| \langle x\rangle^{-p} D_k R(z) \langle x\rangle^{-p} \| \leq c,\ p > 1/2,\ k = 1, \ldots, d. \tag{1.3.28}$$

*En particulier les opérateurs $\langle x\rangle^{-p} D_k,\ D_k \langle x\rangle^{-p},\ p > 1/2,\ k = 1, \ldots, d$ sont $H$-lisse sur tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 et le spectre positif de $H$ est absolument continu.*

**Preuve** On utilise la formule de la résolvante $R(z) = R(-i) + (z + i)R(z)R(-i)$ pour obtenir les décompositions ci-dessous

$$\langle x\rangle^{-p} D_k R(z) \langle x\rangle^{-p} = \langle x\rangle^{-p} D_k R(-i) \langle x\rangle^{-p} + (z + i) \langle x\rangle^{-p} D_k R(-i) \langle x\rangle^{p} \langle x\rangle^{-p} R(z) \langle x\rangle^{-p},$$

$\langle x\rangle^{-p} D_k R(z) D_j \langle x\rangle^{-p} = \langle x\rangle^{-p} D_k R(-i) D_j \langle x\rangle^{-p} + \langle x\rangle^{-p} D_k R(z) \langle x\rangle^{-p} \langle x\rangle^{p} R(-i) D_j \langle x\rangle^{-p}$
on vérifie qu'il s'agit bien de produits d'opérateurs bornés grâce au théorème 1.3.7 et au lemme 1.3.10. Les estimations pour $p \in (1/2, 1]$ entraînent celles pour $p > 1$. □

Pour $H_1$ l'estimation (1.3.24) et la continuité au sens de Hölder découlant de la proposition 1.1.16 nous permettent de récupérer l'équivalent des propositions 1.2.21 et 1.2.22 pour l'opérateur $H_1$.

**Corollaire 1.3.12** *On pose* $R_1(z) = (H_1 - z)^{-1}$ *et*

$$\delta_\varepsilon(H_1 - \lambda) = (2\pi i)^{-1}(R_1(\lambda + i\varepsilon) - R_1(\lambda - i\varepsilon)). \tag{1.3.29}$$

*Alors pour* $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *on a l'existence de la limite suivante et l'égalité*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\delta_\varepsilon(H_1 - \lambda) f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = d(E_1(\lambda) f_1, f_2)/d\lambda = (\Gamma_1(\lambda) f_1, \Gamma_1(\lambda) f_2)_{\mathfrak{N}}, \tag{1.3.30}$$

*où ,* $\Gamma_1(\lambda) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathfrak{N}$ *vérifie* $\Gamma_1(\lambda) H_1 f = \lambda \Gamma_1(\lambda) f$*. De plus les opérateurs* $\langle x\rangle^{-p} \Gamma_1^*(\lambda)$ *et* $\langle x\rangle^{-p} D_k \Gamma_1^*(\lambda)$, $k = 1, \dots d$, *sont, respectivement, compact et bornés sur* $\mathfrak{N}$ *et continus au sens de Hölder par rapport à* $\lambda > 0$.

**Preuve** Ce résultat découle par continuité de (1.3.24) sachant que pour tout $p > 1/2$ l'opérateur $\langle x\rangle^{-p} R_1(z) \langle x\rangle^{-p}$ est compact et $\langle x\rangle^{-p} D_k R_1(z) D_k \langle x\rangle^{-p}$ sont continus pour $\operatorname{Im} z \neq 0$. □

Si le principe d'absorption limite suffit à développer la théorie de la diffusion pour des perturbations à courte portée il n'en va pas de même pour les cas longue portée. C'est pourquoi on a besoin de l'estimation de radiation introduite dans [Yaf93, Yaf95]. Cette estimation se rattache au cas critique $p = 1/2$ du théorème 1.3.7. On adopte la même méthode de démonstration que dans [Yaf00b].

**Théorème 1.3.13 (Estimation de Radiation)** *Soit* $H_1$ *défini par* (1.3.8) *avec* $A_L$ *et* $V_L$ *vérifiant* (1.3.4), *alors les opérateurs*

$$G_j = \langle x\rangle^{-1/2} \nabla_j^\perp, \quad \nabla_j^\perp u = \partial_j u - |x|^{-2} < \nabla u, x > x_j, \quad j = 1, \dots, d, \tag{1.3.31}$$

*sont* $H_1$*-lisse sur tout intervalle compact* $\Lambda \subset (0, \infty)$ *disjoint de* 0.

**Preuve** Soit une fonction $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $m(x) = |x|$ pour $|x| \geq 1$. On appelle $\mathbf{M}$ l'opérateur différentiel défini par

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{d} m_k D_k + D_k m_k, \quad m_k(x) = \partial_{x_k} m(x).$$

Un calcul direct montre que

$$i[H_1, \mathbf{M}] = 4 \sum_{k,j=1}^{d} D_k m_{jk} D_j + \sum_{k=1}^{d} N_k D_k + N_0,$$

où $N_k, k = 0, \dots d$ sont des fonctions $C^\infty$ dépendant seulement des dérivées de $A_L$ et $V_L$

$$\begin{aligned} N_k(x) &= - < A_L(x), \nabla m_k(x) > + < \nabla A_{L,k}(x), \nabla m(x) >, \quad k = 1, \dots, d, & (1.3.32)\\ N_0(x) &= -\Delta^2 m(x) + 2 < \nabla V_L(x), \nabla m(x) > +2i < A_L(x), \nabla \Delta m(x) > \\ &\quad + 4 \sum_{k,j=1}^{d} \left( i m_{kj}(x) + A_{L,j}(x) m_k(x) \right) \partial_k A_{L,j}(x). & (1.3.33) \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse (1.3.4) ces fonctions satisfont, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les estimations $|\partial_x^\alpha N_k(x)| = O\left((1+|x|)^{-1-\rho-|\alpha|}\right)$. Soit $u \in E(\Lambda)\mathcal{H}$ alors d'après (1.3.31) on a pour $|x| \geq 1$

$$\sum_{k,j=1}^{d} m_{jk} D_j u \overline{D_k u} = \sum_{j=1}^{d} |x|^{-1} |\nabla_j^\perp u|^2 = |x|^{-1} |\nabla^\perp u|^2.$$

En tenant compte des estimations sur $N_k$ on arrive à

$$\begin{aligned} (i[H_1, \mathbf{M}]u, u) &= 4 \sum_{k,j=1}^{d} (D_k m_{jk} D_j u, u) + (N_0 u, u) + \sum_{k=1}^{d} (N_k D_k u, u) \\ &\geq 4 \| \langle x \rangle^{-1/2} \nabla^\perp u \|^2 - c \, \| \langle x \rangle^{-l} (H_0 + i)^{1/2} u \|^2, \end{aligned}$$

avec $l = (1+\rho)/2 > 1/2$ et $c > 0$. En utilisant le théorème 1.3.7 et la proposition 1.1.2 on en déduit l'estimation de radiation. □

On a aussi besoin pour les opérateurs $G_j$ de l'équivalent de la proposition 1.2.21. La démonstration de la proposition suivante peut être trouvée dans [Yaf95].

**Proposition 1.3.14** *Les opérateurs $G_j \Gamma_0^*(\lambda)$, $j = 1, \dots d$, sont bornés dans l'espace $\mathfrak{N} = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ et continus en norme par rapport à $\lambda > 0$.*

Les théorèmes 1.3.7 et 1.3.13 suffisent pour montrer l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde (24).

### 1.3.4 Estimations de propagation microlocales

Pour l'étude de la matrice de diffusion on a besoin d'estimations supplémentaires par rapport à celles de la section précédente. Ces estimations, appellées estimations microlocales, on été introduites par Isozaki et Kitada dans [IK84, IK85b] et donnent des estimations du type (1.3.21), (1.3.22), (1.3.23), ou $\mathcal{A}$ et $P_{\mathcal{A}}^\pm$ sont respectivement remplacés par $x$ et des opd de la classe $\mathcal{S}_{1,0}^0$ dont le symbole est localisé dans certaines zones de l'espace des phases $\Gamma_\mp(\theta, a)$ dont voici la définition (voir aussi la Figure 1.2).

**Définition 1.3.15** *Pour $a > 0$ et $\theta \in (-1,1)$ on appelle $\Gamma_{\mp}(\theta, a)$ la partie de l'espace de phases telle que*

$$\Gamma_{\pm}(\theta, a) = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} : \pm < \widehat{x}, \widehat{\xi} >\geq \theta,\ |x| \geq a,\ |\xi| \geq a\}. \tag{1.3.34}$$

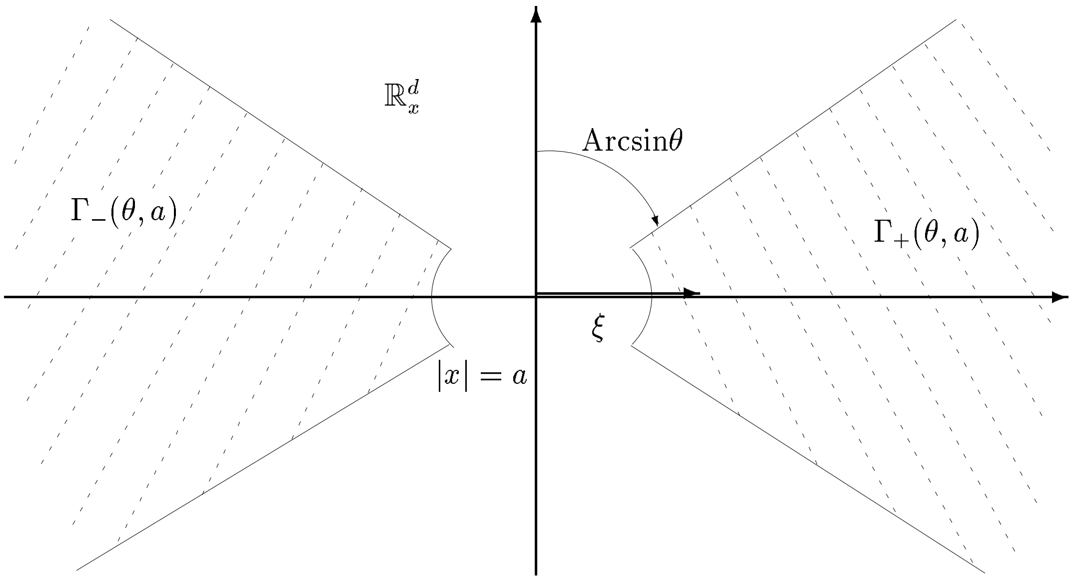


FIG. 1.2: Les cônes tronqués $\Gamma_{\pm}(\theta, a)$

Indépendamment Jensen [Jen85] a proposé une démonstration de ces estimations, à énergie fixée, reposant sur la théorie de Mourre. Dans la suite on redémontre ces estimations microlocales pour des opd à symbole oscillant $\mathcal{C}^m(\Phi)$, $m$ quelconque, en suivant l'approche de Jensen.

On commence par un lemme qui généralise le lemme 1.3.8 et dont la démonstration repose sur les mêmes idées (voir lemme 2.3 dans [Per81]).

**Lemme 1.3.16** *Pour tout $p \in [0, l]$ l'opérateur $\langle \mathcal{A} \rangle^p R_1^l(\pm i) \langle x \rangle^{-p}$ est borné dans $\mathcal{H}$.*

La démonstration des estimations de propagation repose sur le lemme suivant adapté du lemme A.5. de [Jen85]. Ce lemme est basé sur la construction d'une paramétrix de l'opérateur $\mathcal{A}$. C'est ici que l'hypothèse de localisation du symbole de $Q_{\pm}$ est cruciale, en particulier le fait que ce support n'intersecte pas l'ensemble $< x, \xi >= 0$ (cf. Figure 1.2).

**Lemme 1.3.17** *Soit $Q_{\pm} = \mathrm{Op}\left(e^{i\Phi(x,\xi)} q_{\pm}(x,\xi)\right)$ un opd de la classe $\mathcal{C}^m(\Phi)$ pour une phase $\Phi \in \mathcal{S}^r$ avec $r \in [0,1)$. On suppose que* $\mathrm{supp}\ q_{\pm} \subset \Gamma_{\mp}(\theta, a)$ *pour un $\theta \in (0,1)$ et un $a > 0$, alors il existe des opd $R_{\pm}$, $Q_{k,\pm}$, $k = 0, \ldots, s$, dont les symboles respectifs vérifient*

$$R_\pm = \mathrm{Op}\left(r_\pm(x,\xi)\right), \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_\pm(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,N} \left\langle x\right\rangle^{-N} \left\langle \xi\right\rangle^{-N}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \tag{1.3.35}$$

$$Q_{\pm,k} = \mathrm{Op}\left(e^{i\Phi(x,\xi)} q_{k,\pm}(x,\xi)\right), \quad q_{k,\pm} \in \mathcal{S}^m, \tag{1.3.36}$$

$$\mathrm{supp}\ q_{k,\pm} \subset \Gamma_\mp(\theta', a'),\ 1 > \theta' > \theta > 0, a > a' > 0,\ k = 0, \dots, s, \tag{1.3.37}$$

*tels que*

$$Q_\pm \left\langle x\right\rangle^s = \sum_{k=0}^s \mathcal{A}^k Q_{k,\pm} + R_\pm. \tag{1.3.38}$$

**Preuve** Soient $1 > \theta > \theta' > 0$ et $a > a' > 0$, on introduit les fonctions de troncature suivantes :

- $\sigma_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que : $\sigma_\pm(\tau) = 0$ pour $\pm\tau \leq \theta'$ et $\sigma_\pm(\tau) = 1$ pour $\pm\tau \geq \theta$,
- $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*, [0,1])$ telle que : $\eta(\tau) = 0$ pour $\tau \leq a'$ et $\eta(\tau) = 1$ pour $\tau \geq a$,

On pose $\zeta_\pm(x,\xi) = \sigma_\pm(< \widehat{x}, \widehat{\xi} > \eta(|x|))$, il est clair que $\zeta_\pm$ vérifie les propriétés suivantes

$$\zeta_\pm \in \mathcal{S}^0, \quad \mathrm{supp}\ \zeta_\pm \subset \Gamma_\pm(\theta', a'), \quad \zeta_{\pm|\mathrm{supp}\ q_\mp} \equiv 1.$$

La démonstration repose sur la construction d'une paramétrix $u_\pm$ de $\mathcal{A}$ valable dans les cônes $\Gamma_\pm(\theta, a)$ :

$$u_\pm(x,\xi) = \frac{\zeta_\pm(x,\xi)}{< x, \xi > -id/2} \in \mathcal{S}^{-1}. \tag{1.3.39}$$

L'inclusion découle de l'estimation $| < x, \xi > -id/2| \geq c < x >$ sur le support de $\zeta_\mp$.

D'après le lemme 1.2.10 l'opérateur $Q_\pm \left\langle x\right\rangle$ admet la décomposition suivante

$$Q_\pm \left\langle x\right\rangle = P_\pm + R_\pm, \quad P_\pm = \mathrm{Op}\left(e^{i\Phi(x,\xi)} p_\pm(x,\xi)\right) \in \mathcal{C}^{m+1}(\Phi),$$
$$R_\pm = \mathrm{Op}\left(r_\pm(x,\xi)\right), \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_\pm(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,N} \left\langle x\right\rangle^{-N} \left\langle \xi\right\rangle^{-N}, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

La construction des symboles $q_{\pm,k}$ repose sur l'idée suivante : trouver $q_{\pm,1}$ tel que le symbole de $\mathcal{A}Q_{\pm,1} - P_\pm = -Q_{\pm,0}$ soit d'ordre $m$. Comme $\mathcal{A}$ est un opd de symbole $< x, \xi > -id/2 \in \mathcal{S}^1$ on peut, en utilisant la formule de composition (1.2.10)†, calculer ce symbole

$$\begin{aligned} & -e^{i\Phi(x,\xi)} q_{\pm,0}(x,\xi) = \\ & \quad (< x, \xi > -id/2)\, e^{i\Phi(x,\xi)} q_{\pm,1}(x,\xi) + x.\nabla\left(e^{i\Phi(x,\xi)} q_{\pm,1}(x,\xi)\right) - e^{i\Phi(x,\xi)} p_\pm(x,\xi). \end{aligned} \tag{1.3.40}$$

†Cette formule est ici exacte puisque $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel !

On procède par approximations successives, soient

$$
\begin{aligned}
q_{\pm,1}(x,\xi) &= \sum_{j=0}^{n} a_j(x,\xi), &(1.3.41)\\
a_0(x,\xi) &= p_\pm(x,\xi)u_\mp(x,\xi), &(1.3.42)\\
a_{j+1}(x,\xi) &= -u_\mp(x,\xi)e^{-i\Phi(x,\xi)}x.\nabla\left(e^{i\Phi(x,\xi)}a_j(x,\xi)\right). &(1.3.43)
\end{aligned}
$$

On peut remarquer que tous ces symboles ont un support inclus dans celui de $p_\pm$. Par induction on montre que $a_j(x,\xi) \in \mathcal{S}^{m-jr}$ puis en réinjectant (1.3.41)-(1.3.43) dans (1.3.40) et tenant compte de l'égalité $(< x,\xi > -id/2)\, u_\mp(x,\xi) = \zeta_\mp(x,\xi) = 1$ sur le support de $p_\pm$ on obtient que

$$
\begin{aligned}
-e^{i\Phi(x,\xi)}q_{\pm,0}(x,\xi) &= (< x,\xi > -id/2)\sum_{j=0}^{n} e^{i\Phi(x,\xi)}a_j(x,\xi) + \sum_{j=0}^{n} x.\nabla\left(e^{i\Phi(x,\xi)}a_j(x,\xi)\right)\\
&\qquad -e^{i\Phi(x,\xi)}p_\pm(x,\xi)\\
&= x.\nabla\left(e^{i\Phi(x,\xi)}a_n(x,\xi)\right)\\
&= e^{i\Phi(x,\xi)}\left(< x,\nabla a_n(x,\xi) > +ia_n(x,\xi) < x,\nabla\Phi(x,\xi) >\right)
\end{aligned}
$$

En particulier $q_{\pm,0} \in \mathcal{S}^{m+1-(n+1)r}$. Donc si on choisit $n$ dans (1.3.41) tel que $n+1 \geq 1/r$ on a bien $q_{\pm,0} \in \mathcal{S}^m$.

Au final on a obtenu que $Q_\pm \langle x \rangle = \mathcal{A}Q_{\pm,1} + Q_{\pm,0} + R_\pm$ où $Q_{\pm,0}, Q_{\pm,1}$, vérifient bien les hypothèses (1.3.36),(1.3.37), et le symbole du reste $R_\pm$ vérifie bien (1.3.35). Ceci conclu la preuve pour s=1, pour $s > 1$ il suffit de réitérer la même construction autant de fois que nécessaire. Pour les termes de reste supplémentaires il suffit de remarquer que le symbole de $R_\pm \langle x \rangle^k$ vérifie bien l'estimation (1.3.35) ce qui découle de la formule de composition (1.2.7) et de (1.3.35). $\square$

Ainsi adapté le lemme 1.3.17 permet d'obtenir les estimations suivantes.

**Lemme 1.3.18** *Soit* $Q_\pm = \mathrm{Op}\left(e^{i\Phi(x,\xi)}q_\pm(x,\xi)\right)$ *un opd de la classe* $\mathcal{C}^m(\Phi)$ *pour une phase* $\Phi \in \mathcal{S}^r$ *avec* $r \in [0,1)$. *On suppose que* $\mathrm{supp}\, q_\pm \subset \Gamma_\mp(\theta,a)$ *pour un* $\theta \in (0,1)$ *et un* $a > 0$. *Alors on a l'estimation suivante*

$$\| \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} Q_\pm \langle x \rangle^s \| < \infty. \tag{1.3.44}$$

**Preuve** D'après le lemme 1.3.17 on a que

$$\langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} Q_\pm \langle x \rangle^{s+m} \langle x \rangle^{-m} = \sum_{k=0}^{s+m} \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} \mathcal{A}^k Q_{\pm,k} \langle x \rangle^{-m} + \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} R_\pm \langle x \rangle^{-m},$$

où les opd $Q_{\pm,k} = \mathrm{Op}\left(e^{i\Phi(x,\xi)}q_{\pm,k}(x,\xi)\psi(|\xi|^2)\right)$, $q_{\pm,k} \in \mathcal{S}^m$, et $R_\pm$ vérifie, pour un $N$ arbitrairement grand, l'estimation (1.3.35). En particulier grâce au théorème 1.2.4 $\|R_\pm\| < \infty$. En tenant compte de ce que

$$\| \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} \mathcal{A}^k \| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} | \langle y \rangle^{-s-m} y^k | \leq 1, \quad 0 \leq k \leq s+m$$

on en déduit que

$$\| \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} Q_\pm \langle x \rangle^s \| \leq \sum_{k=0}^{s} \| Q_{\pm,k} \langle x \rangle^{-m} \| + \| R_\pm \|.$$

Enfin d'après la proposition 1.2.13 les opérateurs $Q_{\pm,k} \langle x \rangle^{-m}$ sont bien bornés. □

Pour obtenir des estimations du type (1.3.23) la difficulté principale est la présence des projecteurs spectraux $P^\pm_{\mathcal{A}}$ qui rend difficile l'utilisation du calcul pseudo-différentiel [Jen85]. C'est pourquoi on utilise la transformation de Mellin pour diagonaliser $\mathcal{A}$ (cf. les lemmes 2 et 3 dans [Per80]).

**Lemme 1.3.19** *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la transformée de Mellin est définie par*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M} & : & \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})) \\ & & f(x) & \longmapsto & (\mathcal{M} f)(\nu, \omega) \end{array}$$

*où*

$$(\mathcal{M} f)(\nu, \omega) = f^\sharp(\nu, \omega) = \int_0^\infty \sigma^{-i\nu + \frac{d}{2} - 1} f(\sigma \omega) \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}}. \tag{1.3.45}$$

*La transformation de Mellin se prolonge en un opérateur unitaire sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dont l'adjoint est formellement défini par :*

$$(\mathcal{M}^* g)(x) = \int_0^\infty |x|^{i\nu - \frac{d}{2}} g(\nu, \widehat{x}) \frac{d\nu}{\sqrt{2\pi}}.$$

*L'opérateur $\mathcal{M}$ diagonalise l'opérateur $\mathcal{A}$, i.e. $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$(\mathcal{M} \mathcal{A}) f(\nu, \omega) = \nu (\mathcal{M} f)(\nu, \omega).$$

Maintenant on peut démontrer le lemme suivant.

**Lemme 1.3.20** *Soit $Q_\pm$ un opd de symbole $q_\pm \in \mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$. On suppose que* $\operatorname{supp} q_\pm \subset \Gamma_\mp(\theta, a)$ *pour un $\theta \in (0,1)$ et un $a > 0$. Alors on a*

$$\| \langle \mathcal{A} \rangle^t P^\pm_{\mathcal{A}} Q_\pm \langle x \rangle^s \| < \infty, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \tag{1.3.46}$$

**Preuve** Il est clair que si (1.3.46) est vrai pour un couple $(t, s)$ elle est aussi vrai pour tout couple $(t', s')$ avec $t' \leq t$ et $s' \leq s$. On se limitera donc à montrer (1.3.46) pour $s \in 2\mathbb{N}$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $s \in 2\mathbb{N}$ on va estimer la norme de $\mathcal{M} \langle \mathcal{A} \rangle^t P^\pm_{\mathcal{A}} Q_\pm \langle x \rangle^s f$. d'après (1.3.45)

$$\left(\mathcal{M}\left<\mathcal{A}\right>^t P^{\pm}_{\mathcal{A}} Q_{\pm}\left<x\right>^s f\right)(\nu,\omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \left<\nu\right>^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu)\int_0^\infty \sigma^{d/2-1}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\sigma<\omega,\xi>-\nu\ln(\sigma))} q_{\pm}(\sigma\omega,\xi)(\widehat{\left<x\right>^s f})(\xi)\frac{d\xi d\sigma}{(2\pi)^{(d+1)/2}}\\
&= \left<\nu\right>^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu)\int_0^\infty \sigma^{d/2-1}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\sigma<\omega,\xi>-\nu\ln(\sigma))} q_{\pm}(\sigma\omega,\xi)\left<D_\xi\right>^s(\widehat{f})(\xi)\frac{d\xi d\sigma}{(2\pi)^{(d+1)/2}}\\
&= \left<\nu\right>^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu)\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty e^{i(\sigma<\omega,\xi>-\nu\ln(\sigma))} p_{\pm}(\sigma\omega,\xi)(\widehat{f})(\xi)\frac{d\sigma d\xi}{(2\pi)^{(d+1)/2}},
\end{aligned}$$

où $p_{\pm}\in\mathcal{S}^{m-1+s\varrho+d/2}_{\varrho,\delta}$ et supp $p_{\pm}\subset\Gamma_{\mp}(\theta,a)$. Si on pose $\phi(\sigma)=\sigma<\omega,\xi>-\nu\ln(\sigma)$ les points stationnaires de $\phi$ doivent vérifier $\partial_\sigma\phi=<\omega,\xi>-\nu/\sigma=0$, ce qui n'est pas possible si $(\sigma\omega,\xi)\in\Gamma_{\mp}(\theta,a)$ et $\pm\nu\geq 0$. Pour estimer l'intégrale précédente on va intégrer par parties en variable $\sigma$ en utilisant l'identité

$$\int_0^\infty e^{i\phi}p_{l,\pm}d\sigma=\int_0^\infty(i\partial_\sigma\phi)\ e^{i\phi}(p_{l,\pm}/(i\partial_\sigma\phi))d\sigma=\int_0^\infty e^{i\phi}p_{l+1,\pm}d\sigma$$

où les $p_{l,\pm}$ sont définis par

$$p_{l+1,\pm}=\partial_\sigma(p_{l,\pm}/(i\partial_\sigma\phi)),\quad p_{0,\pm}=p_{\pm}\in\mathcal{S}^{m-1+2s\delta+d/2}_{\varrho,\delta}$$

et vérifient $p_{l,\pm}(\sigma\omega,\xi)\big|_{\sigma=0}=0$ pour tout $l$. En utilisant l'inégalité

$$\frac{u}{p}+\frac{v}{q}\geq u^{1/p}v^{1/q},\ \forall u,v>0,\ p,q\geq 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

avec $1/q=\varrho/2,\ 1/p=1-\varrho/2$ on obtient une minoration pour $\partial_\sigma\phi$ :

$$|\partial_\sigma\phi|^2=\left|<\omega,\xi>-\frac{\nu}{\sigma}\right|^2\geq\theta^2|\xi|^2+\frac{\nu^2}{\sigma^2}\geq c\frac{(\theta|\xi|)^{2-\varrho}|\nu|^\varrho}{\sigma^\varrho}. \tag{1.3.47}$$

Ceci conduit par induction à l'estimation suivante sur $p_{l,\pm}$

$$|p_{l,\pm}(\sigma\omega,\xi)|\leq C_l\left<\sigma\right>^{m-1+2s\delta+d/2-l\varrho/2}\left<\xi\right>^{N-l(1-\varrho/2)}\left<\nu\right>^{-l\varrho/2}. \tag{1.3.48}$$

Après avoir intégré par parties $l$ fois par rapport à $d\sigma$ on obtient finalement que

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{M}\left<\mathcal{A}\right>^t P^{\pm}_{\mathcal{A}} Q_{\pm}\left<x\right>^s f\right)(\nu,\omega)\\
&=\left<\nu\right>^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu)\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty e^{i(\sigma<\omega,\xi>-\nu\ln(\sigma))} p_{l,\pm}(\sigma\omega,\xi)(\widehat{f})(\xi)\frac{d\sigma d\xi}{(2\pi)^{(d+1)/2}}.
\end{aligned}\tag{1.3.49}$$

Pour estimer le carré du module de (1.3.49) on va supposer que $l$ est suffisamment grand pour que toutes les intégrales convergent. Pour majorer (1.3.49) on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient (pour l'intégrale par rapport à $\xi$)

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\mathcal{M}\left\langle\mathcal{A}\right\rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm} Q_{\pm}\left\langle x\right\rangle^s f\right)(\nu,\omega)\right|^2 \\
&\quad\leq \left\langle\nu\right\rangle^{2t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu)\|\widehat{f}\|^2 \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_0^\infty p_{l,\pm}(\sigma\omega,\xi)d\sigma\right|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^{(d+1)}} \\
&\quad\leq \left\langle\nu\right\rangle^{2t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu)\|f\|^2 \\
&\qquad\qquad \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_0^\infty C_l\left\langle\sigma\right\rangle^{m-1+2s\delta-l\varrho/2+d/2}\left\langle\xi\right\rangle^{N-l(1-\varrho/2)}\left\langle\nu\right\rangle^{-l\varrho/2}d\sigma\right|^2\frac{d\xi}{(2\pi)^{(d+1)}} \\
&\quad\leq \frac{C_l^2}{(2\pi)^{(d+1)}}\left\langle\nu\right\rangle^{2t-l\varrho}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu)\|f\|^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left|\int_0^\infty C_l\left\langle\sigma\right\rangle^{m-1+2s\delta-l\varrho/2+d/2}d\sigma\right|^2\int_{\mathbb{R}^d}\left\langle\xi\right\rangle^{2N-l(2-\varrho)}d\xi \\
&\quad\leq C\left\langle\nu\right\rangle^{2t-l\varrho}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu)\|f\|^2
\end{aligned}
$$

si $2N-l(2-\varrho)<-d$ et $m+2s\delta-l\varrho/2+d/2<0$. Au final si $2t-l\varrho<-1$ on a que

$$\left\|\mathcal{M}\left\langle\mathcal{A}\right\rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm}Q_{\pm}\left\langle x\right\rangle^s f\right\|\leq C'\|f\|,$$

ce qui prouve (1.3.46). □

On peut maintenant démontrer les estimations de propagation microlocales.

**Théorème 1.3.21** *Soient* $Q_{\pm}=\mathrm{Op}\left(e^{i\Phi(x,\xi)}q_{\pm}(x,\xi)\right)$ *des opd de la classe* $\mathcal{C}^m(\Phi)$ *pour une phase* $\Phi\in\mathcal{S}^r$ *avec* $r\in[0,1)$ $\Lambda\subset(0,\infty)$ *disjoint de* $0$*. On suppose que* $\operatorname{supp} q_{\pm}\subset\Gamma_{\mp}(\theta,a)$ *pour un* $\theta\in(0,1)$ *et un* $a>0$*. Si l'hypothèse* (1.3.4) *est vérifiée alors on a les estimations suivantes*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re}z\in\Lambda\\ 1\geq|\operatorname{Im}z|>0}}\|\left\langle x\right\rangle^{-s}R_1^l(z)\left\langle x\right\rangle^{-s}\|<\infty,\qquad\forall s>l-1/2,\tag{1.3.50}$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re}z\in\Lambda\\ 1\geq\pm\operatorname{Im}z>0}}\|\left\langle x\right\rangle^{-s}R_1^l(z)Q_{\mp}\left\langle x\right\rangle^{s-\sigma}\|<\infty,\qquad\forall s>l-1/2,\sigma>m+l,\tag{1.3.51}$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re}z\in\Lambda\\ 1\geq\pm\operatorname{Im}z>0}}\|\left\langle x\right\rangle^{s}Q_{\pm}^*R_1^l(z)Q_{\mp}\left\langle x\right\rangle^{s}\|<\infty,\qquad\forall s\in\mathbb{R}.\tag{1.3.52}$$

**Preuve** Comme pour déduire le principe d'absorption limite de l'estimation (1.3.20) on va déduire les estimations (1.3.50)-(1.3.52) des estimations (1.3.21)-(1.3.23) en utilisant les lemmes 1.3.16, 1.3.18 et 1.3.20 et la généralisation suivante de la formule de résolvante

$$R_1^l(z)=(z+i)^nR_1^n(-i)R_1^l(z)+\sum_{j=0}^n p_{j,n}(z)R_1^j(-i),\quad\forall n\in\mathbb{N}.\tag{1.3.53}$$

où $p_{j,n}(z)$ est un polynôme de degré $j$ en $z$. En injectant (1.3.53), pour $n=2l$, dans (1.3.50) le seul terme à estimer est

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle^{-s} R_1^l(-i)R_1^l(z)R_1^l(-i)\langle x\rangle^{-s}\\&\qquad=\left(\langle x\rangle^{-s} R_1^l(-i)\langle\mathcal{A}\rangle^{s}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{-s} R_1^l(z)\langle\mathcal{A}\rangle^{-s}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{s} R_1^l(-i)\langle x\rangle^{-s}\right)\end{aligned}$$

qui est bien borné pour $l \geq s > l-1/2$. L'estimation (1.3.50) pour $s' > l$ découle de celle pour $s \in (l-1/2, l]$ sachant que

$$\|\langle x\rangle^{-s} R_1^l(z)\langle x\rangle^{-s}\| \geq \|\langle x\rangle^{-s'} R_1^l(z)\langle x\rangle^{-s'}\|, \quad \forall s' \geq s.$$

Pour (1.3.51) en y injectant (1.3.53), pour $n \geq \max\{l, s\}$, on doit alors estimer le terme

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle^{-s} R_1^n(-i)R_1^l(z)Q_\mp\langle x\rangle^{s-\sigma}\\&\quad=\left(\langle x\rangle^{-s} R_1^n(-i)\langle\mathcal{A}\rangle^{t}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{-t} R_1^l(z)P_{\mathcal{A}}^{\mp}\langle\mathcal{A}\rangle^{t-l}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{l-t} Q_\mp\langle x\rangle^{s-\sigma}\right)\\&\qquad+\left(\langle x\rangle^{-s} R_1^n(-i)\langle\mathcal{A}\rangle^{t}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{-t} R_1^l(z)\langle\mathcal{A}\rangle^{-t}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{t} P_{\mathcal{A}}^{\pm}Q_\mp\langle x\rangle^{s-\sigma}\right).\end{aligned}$$

Ce terme est donc borné si on choisit le paramètre libre $t \in (l-1/2, n]$ tel que $l-t+m+s-\sigma \leq 0$. Cette dernière condition conduit à la restriction $\sigma > m+l$.

Pour (1.3.52) on commence par remarquer que si (1.3.52) est vrai pour un $s$ donné l'estimation est encore valable pour tout $s' \leq s$. Il suffit donc de prouver (1.3.52) pour $s$ assez grand. Ensuite on décompose l'opérateur de la manière suivante

$$\langle x\rangle^{s} Q_\pm^* R_1^l(z)Q_\mp\langle x\rangle^{s} = B_1+B_2+B_3,$$

avec

$$\begin{aligned}B_1 &= \left(\langle x\rangle^{s} Q_\pm^* P_{\mathcal{A}}^{\pm}\langle\mathcal{A}\rangle^{s}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{-s} R_1^l(z)\langle\mathcal{A}\rangle^{-s}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{s} P_{\mathcal{A}}^{\mp}Q_\mp\langle x\rangle^{s}\right),\\B_2 &= \left(\langle x\rangle^{s} Q_\pm^* P_{\mathcal{A}}^{\pm}\langle\mathcal{A}\rangle^{s+l+m}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{-s-l-m} R_1^l(z)P_{\mathcal{A}}^{\pm}\langle\mathcal{A}\rangle^{s+m}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{-s-m} Q_\mp\langle x\rangle^{s}\right)\\&\quad+\left(\langle x\rangle^{s} Q_\pm^*\langle\mathcal{A}\rangle^{-s-m}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{s+m} P_{\mathcal{A}}^{\mp}R_1^l(z)\langle\mathcal{A}\rangle^{-s-l-m}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{s+l+m} P_{\mathcal{A}}^{\mp}Q_\mp\langle x\rangle^{s}\right),\\B_3 &= \left(\langle x\rangle^{s} Q_\pm^*\langle\mathcal{A}\rangle^{-s-m}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{s+m} P_{\mathcal{A}}^{\mp}R_1^l(z)P_{\mathcal{A}}^{\pm}\langle\mathcal{A}\rangle^{s+m}\right)\left(\langle\mathcal{A}\rangle^{-s-m} Q_\mp\langle x\rangle^{s}\right).\end{aligned}$$

On voit alors grâce au théorème 1.3.6 et aux lemmes 1.3.18 et 1.3.20 que les opérateurs $B_j,\ j=1,2,3$ sont bornés si $s+m+l > l-1/2$ et $s > l-1/2$ qui est bien vérifié pour un $s$ assez grand. □

**Remarque 1.3.22** Dans tous les lemmes de cette partie l'hypothèse que le symbole de $Q_\pm$ soit dans la classe $\mathcal{C}^m(\Phi_\pm)$ peut être remplacée par $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$ à la condition que $1 \geq \varrho > \delta \geq 0$ ce qui ne permettrait pas de traiter le cas $1/2 \geq \rho > 0$ dans nos applications.

# Chapitre 2

# Théorie de la diffusion

## 2.1 Les opérateurs d'onde

Dans cette section on va construire des opérateurs d'onde modifiés de la forme (24) pour le couple $H_0, H$. Pour simplifier l'approche on construira les opérateurs d'onde (24) pour le couple $H_0, H_1$ et les opérateurs d'onde (8) pour le couple $H_1, H$, le résultat pour le couple $H_0, H$ découlant du théorème de multiplication 1.1.6. Pour construire les modificateurs $J_\pm$ on utilisera les résultats de la section 2.1.1 sur les solutions (approchées) de l'équation eiconale (25) et de l'équation de transport (2.1.24). Enfin on vérifiera que la construction présentée coïncide avec d'autres constructions dépendantes du temps.

### 2.1.1 Les équations eiconale et de transport

Dans cette section notre but est de construire des fonctions propres approchées de l'opérateur de Schrödinger $H_1$. Il est naturel de chercher ces fonctions propres sous la forme $\Psi = e^{i\varphi}$ où $\varphi$ est une fonction réelle. En injectant cet Ansatz dans l'équation de Schrödinger on obtient

$$\begin{aligned}&((D - A_L)^2 + V_L - |\xi|^2)\Psi \\ &= e^{i\varphi}(|\nabla\varphi|^2 - 2 < A_L, \nabla\varphi > -i\Delta\varphi + V_L + |A_L|^2 + i\mathrm{div}A_L - |\xi|^2), \quad \nabla = \nabla_x. \quad (2.1.1)\end{aligned}$$

En ne conservant que les termes réels dans (2.1.1) on obtient l'équation eiconale pour $\varphi$

$$|\nabla\varphi(x,\xi)|^2 - 2 < A_L(x), \nabla\varphi(x,\xi) > +V_L(x) + |A_L(x)|^2 = |\xi|^2. \quad (2.1.2)$$

Faute de pouvoir résoudre globalement l'équation eiconale on va chercher à construire des solutions "approchées" de (2.1.2). Par solutions "approchées" on entend des solutions $\varphi_\pm$

qui vérifie (2.1.2) à un terme courte portée près dans tout cône $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa$, $\forall \kappa \in (-1, 1)$. Pour cela on décompose $\varphi_\pm$ de la manière suivante

$$\varphi_\pm(x,\xi) = <\xi, x> + \Phi_\pm(x,\xi), \tag{2.1.3}$$

et on demande que $\Phi = \Phi_\pm$ vérifie l'équation

$$2 <\xi, \nabla\Phi(x,\xi)> + |\nabla\Phi(x,\xi)|^2 - 2 <A_L(x), \xi + \nabla\Phi(x,\xi)> + V_L(x) + |A_L(x)|^2 = q^{(N_e)}(x,\xi). \tag{2.1.4}$$

où $q^{(N_e)} = q_\pm^{(N_e)}$ est un terme à courte portée. Alors d'après (2.1.1)

$$((D - A_L)^2 + V_L - |\xi|^2)(e^{i\varphi_\pm}) = e^{i\varphi_\pm}\mathrm{q}_\pm, \tag{2.1.5}$$

où

$$\mathrm{q}_\pm = q_\pm^{(N_e)} + i\mathrm{div}A_L - i\Delta\Phi_\pm, \tag{2.1.6}$$

est encore à courte portée pourvu que la fonction $\varphi = \varphi_\pm$ soit suffisamment proche d'une phase plane, i.e. qu'elle vérifie, au moins dans les cônes $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa$, $\forall \kappa \in (-1, 1)$, l'estimation suivante

$$\partial_x^\alpha \left(\varphi_\pm(x,\xi) - <x, \xi>\right) = \partial_x^\alpha \Phi_\pm(x,\xi) = O\left(|x|^{1-\rho-|\alpha|}\right). \tag{2.1.7}$$

Commençons par étudier l'équation linéaire auxiliaire

$$2 < \xi, \nabla\phi(x,\xi) > + F(x,\xi) = 0. \tag{2.1.8}$$

**Lemme 2.1.1** *Supposons que $F = F_\pm$ vérifie pour tout multi-indice $\alpha, \beta$*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F_\pm(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |x|)^{-\rho-|\alpha|} |\xi|^{-\mu-|\beta|}, \quad \pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c, \tag{2.1.9}$$

*pour tout $\kappa \in (-1, 1)$ et $\rho \in (0, 1)$. Alors la fonction*

$$\phi_\pm(x,\xi) = \pm 2^{-1} \int_0^\infty \Big(F_\pm(x \pm t\xi, \xi) - F_\pm(\pm t\xi, \xi)\Big) dt. \tag{2.1.10}$$

*est une solution de l'équation (2.1.8) qui vérifie pour tout $\alpha, \beta$ l'estimation*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi_\pm(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |x|)^{1-\rho-|\alpha|} |\xi|^{-1-\mu-|\beta|}, \quad \pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c. \tag{2.1.11}$$

**Preuve** Il suffit de différencier (2.1.10) pour voir qu'il s'agit bien d'une solution de (2.1.8). Pour montrer (2.1.11) commençons par le cas où $|\alpha| \geq 1$. Dans ce cas on doit estimer pour $|x|$ grand

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi_\pm(x,\xi) = \pm 2^{-1} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!} \int_0^\infty (\pm t)^{|\beta_1|} \partial_x^{\alpha+\beta_1} \partial_\xi^{\beta_2} F_\pm(x \pm t\xi, \xi) dt \tag{2.1.12}$$

dans le cône $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa$. Dans cette zone on a pour $\pm t \geq 0$

$$|x \pm \xi|^2 = |x|^2 \pm 2t < x, \xi > + t^2|\xi|^2 \geq |x|^2 + 2\kappa|t||x||\xi| + t^2|\xi|^2 \geq (1-\kappa^2)(|x|^2 + t^2|\xi|^2).$$

Maintenant en faisant le changement de variable $t = s|x|/|\xi|$ et en tenant compte de (2.1.9) on obtient que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi_\pm(x,\xi)| \leq \frac{1-\kappa^2}{2} C'_{\alpha,\beta} |x|^{1-\rho-|\alpha|} |\xi|^{\mu-1-|\beta|} \int_0^\infty \langle s \rangle^{-\rho-|\alpha|} ds.$$

Pour $\alpha = 0$ il suffit d'écrire le développement de Taylor de $\phi_\pm$

$$|\partial_\xi^\beta \phi_\pm(x,\xi)| \leq |\partial_\xi^\beta \phi_\pm(0,\xi)| + |x| \int_0^1 |\nabla_x \partial_\xi^\beta \phi_\pm(tx,\xi)| dt,$$

et d'utiliser l'estimation (2.1.11) pour $|\alpha| = 1$. □

Maintenant on peut construire par itération une fonction $\Phi_\pm$ vérifiant (2.1.4) et (2.1.7) dans tout cône $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa$, $\forall \kappa \in (-1,1)$, avec $q^{(N_e)}$ à courte portée. Posons

$$\Phi_\pm(x,\xi) = \sum_{n=1}^{N_e} \Phi_\pm^{(n)}(x,\xi), \tag{2.1.13}$$

où les fonctions $\Phi_\pm^{(n)}$ sont solutions des équations

$$\begin{aligned} 2 < \xi, \nabla\Phi_\pm^{(1)} > + V_L - 2 < A_L, \xi > &= 0, & (2.1.14)\\ 2 < \xi, \nabla\Phi_\pm^{(2)} > + |\nabla\Phi_\pm^{(1)}|^2 - 2 < A_L, \nabla\Phi_\pm^{(1)} > + |A_L|^2 &= 0, & (2.1.15)\\ 2 < \xi, \nabla\Phi_\pm^{(n+1)} > - 2 < A_L, \nabla\Phi_\pm^{(n)} > + \sum_{m+p=n+1} < \nabla\Phi_\pm^{(m)}, \nabla\Phi_\pm^{(p)} > &= 0, \ n \geq 2 & (2.1.16) \end{aligned}$$

La fonction $\Phi_\pm$, définie par (2.1.13), vérifie donc (2.1.4) avec $q_\pm^{(N_e)}$ qui s'écrit

$$q_\pm^{(N_e)}(x,\xi) = -2 < A_L(x), \nabla\Phi_\pm^{(N_e)}(x,\xi) > + \sum_{m+p>N_e} < \nabla\Phi_\pm^{(m)}(x,\xi), \nabla\Phi_\pm^{(p)}(x,\xi) > . \tag{2.1.17}$$

En utilisant le lemme 2.1.1 on déduit par induction des estimations pour les fonctions $\Phi_\pm^{(n)}$, $\Phi_\pm$ et $q_\pm^{(N_e)}$.

**Proposition 2.1.2** *Supposons que l'hypothèse* (1.3.4) *soit satisfaite pour un certain* $\rho \in (0,1)$. *Soient* $\Phi_\pm$ *la fonction définie par les égalités* (2.1.13)-(2.1.16), *et* $q_\pm^{(N_e)}$ *celle définie par* (2.1.4). *Alors pour tout multi-indices* $\alpha, \beta$ *on a dans la région* $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa$, *pour tout* $\kappa \in (-1,1)$ (*ou* $|x| \leq c$)

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Phi_\pm^{(n)}(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{1-n\rho-|\alpha|}\,|\xi|^{1-n-|\beta|} \tag{2.1.18}$$
$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Phi_\pm(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{1-\rho-|\alpha|}\,|\xi|^{-|\beta|} \tag{2.1.19}$$
$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q_\pm^{(N_e)}(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{-(N_e+1)\rho-|\alpha|}\,|\xi|^{1-N_e-|\beta|} \tag{2.1.20}$$

A partir d'ici on choisit $N_e = [\rho^{-1}]$ et on pose $\epsilon = (N_e+1)\rho - 1$ (on remarque que $\rho \geq \epsilon > 0$). Les estimations (1.3.4),(2.1.19) et (2.1.20) impliquent que $e^{i\varphi_\pm}$ vérifie l'équation de Schrödinger, au terme $e^{i\varphi_\pm}\mathrm{q}_\pm$ à courte portée près, en dehors de tout voisinage de la direction $\mp\xi$. Pour tout $\alpha, \beta$, et tout $\kappa \in (-1,1)$ on a alors l'estimation

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \mathrm{q}_\pm(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{-1-\epsilon-|\alpha|}\,|\xi|^{1-N_e-|\beta|}, \quad \pm < \hat{\xi}, \hat{x} > \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c. \tag{2.1.21}$$

**Remarque 2.1.3** Quand $\rho > 1/2$ dans (1.3.4) on n'a besoin que d'une seule étape pour construire la fonction $\Phi$ qui dans ce cas admet une expression tout à fait explicite

$$\Phi_\pm(x,\xi) = \pm 2^{-1} \int_0^\infty \Big( V_L(x \pm t\xi) - V_L(\pm t\xi) - 2 < A_L(x \pm t\xi) - A_L(\pm t\xi), \xi > \Big) dt. \tag{2.1.22}$$

En dérivant cette expression on remarque que la fonction $\Phi_\pm(x,\xi) = \Phi_\pm^{(1)}(x,\xi)$ ne dépend pas de la projection de $x$ sur la direction $\hat{\xi}$.

A partir de cette première approximation des fonctions propres de $H_1$ il est possible d'en construire de "meilleures" par itération. Si on pose $\Psi_\pm = e^{i\varphi_\pm} a_\pm$ alors en injectant cet Ansatz dans l'équation de Schrödinger et en tenant compte de (2.1.5) on obtient

$$\begin{aligned} &((D - A_L(x))^2 + V_L(x) - |\xi|^2)\Psi_\pm(x,\xi) \qquad (2.1.23)\\ &= e^{i\varphi_\pm(x,\xi)}(\mathrm{q}_\pm(x,\xi)a_\pm(x,\xi) - 2i < \xi + \nabla\Phi_\pm(x,\xi) - A_L(x), \nabla a_\pm(x,\xi) > - \Delta a_\pm(x,\xi)), \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'équation de transport pour $a_\pm$

$$\mathrm{q}_\pm(x,\xi)a_\pm(x,\xi) - 2i < \xi + \nabla\Phi_\pm(x,\xi) - A_L(x), \nabla a_\pm(x,\xi) > - \Delta a_\pm(x,\xi) = 0. \tag{2.1.24}$$

Là encore on résout (2.1.24) de manière approchée en utilisant la même démarche d'approximations successives que pour l'équation eiconale. On pose

$$a_\pm(x,\xi) = \sum_{n=0}^{N_t} b_\pm^{(n)}(x,\xi), \quad b_\pm^{(0)}(x,\xi) = 1, \tag{2.1.25}$$

où $b_\pm^{(n)}$ est défini par récurrence comme solution de l'équation

$$\begin{aligned} 2 < \xi, \nabla b_\pm^{(n)}(x,\xi) > -i\mathrm{q}_\pm(x,\xi) b_\pm^{(n-1)}(x,\xi) \\ +2 < \nabla\Phi_\pm(x,\xi) - A(x), \nabla b_\pm^{(n-1)}(x,\xi) > -\Delta b_\pm^{(n-1)}(x,\xi) = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Pour résoudre (2.1.26) on utilise un lemme similaire au lemme 2.1.1 (dont la démonstration est d'ailleurs la même).

**Lemme 2.1.4** *Supposons que $F = F_\pm$ vérifie pour tout multi-indice $\alpha, \beta$*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F_\pm(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{-1-\epsilon-|\alpha|}\,|\xi|^{-\mu-|\beta|}, \quad \pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c, \tag{2.1.27}$$

*pour tout $\kappa \in (-1,1)$ et $\epsilon > 0$. Alors la fonction*

$$\phi_\pm(x,\xi) = \pm 2^{-1} \int_0^\infty F_\pm(x \pm t\xi, \xi)dt. \tag{2.1.28}$$

*est une solution de l'équation (2.1.8) qui vérifie pour tout $\alpha, \beta$ l'estimation*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi_\pm(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{-\epsilon-|\alpha|}\,|\xi|^{-1-\mu-|\beta|}, \quad \pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c. \tag{2.1.29}$$

En utilisant (2.1.26) on conclut que la fonction $e^{i\varphi_\pm} a_\pm$ est une solution de l'équation de Schrödinger modulo le terme

$$((D - A_L(x))^2 + V_L(x) - |\xi|^2)\Psi_\pm(x,\xi) = e^{i\varphi_\pm(x,\xi)} \mathrm{q}_\pm^{(N_t)}(x,\xi), \tag{2.1.30}$$

où $\mathrm{q}_\pm^{(0)}(x,\xi) = \mathrm{q}_\pm(x,\xi)$ et

$$\mathrm{q}_\pm^{(N_t)}(x,\xi) = -2i < \xi, \nabla b_\pm^{(N_t+1)}(x,\xi) > . \tag{2.1.31}$$

Grâce au lemme 2.1.4 on obtient par induction des estimations sur $a_\pm, b_\pm^{(n)}, \mathrm{q}_\pm^{(N_t)}$.

**Proposition 2.1.5** *Supposons que l'hypothèse (1.3.4) soit satisfaite pour un certain $\rho \in (0,1)$. Soient $\epsilon = (N_e+1)\rho - 1 \in (0,\rho)$, $\Phi_\pm$ la fonction définie par les égalités (2.1.13)-(2.1.16), et $\mathrm{q}_\pm^{(N_t)}$ celle définie par (2.1.31). Alors pour tout multi-indice $\alpha, \beta$ on a dans la région $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa$, pour tout $\kappa \in (-1,1)$ (ou $|x| \leq c$)*

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_\pm^{(n)}(x,\xi)| &\leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{-n\epsilon-|\alpha|}\,|\xi|^{-n-|\beta|} && (2.1.32) \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\pm(x,\xi)| &\leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{-|\alpha|}\,|\xi|^{-|\beta|} && (2.1.33) \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \mathrm{q}_\pm^{(N_t)}(x,\xi)| &\leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|x|)^{-1-(N_t+1)\epsilon-|\alpha|}\,|\xi|^{-N_t-|\beta|} && (2.1.34) \end{aligned}$$

### 2.1.2 Existence et complétude asymptotique

On considère le couple de Hamiltoniens $H_0 = -\Delta, H_1 = (D - A_L)^2 + V_L$, où $A_L$ et $V_L$ vérifient (1.3.4). Soient $\Phi_\pm$ et $a_\pm$ les fonctions construites dans la section précédente (cf. propositions 2.1.2 et 2.1.5). Le modificateur $J_\pm = J_\pm(N_t, \zeta_\pm, \psi)$ est défini par la formule

$$(J_\pm f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,\xi>+i\Phi_\pm(x,\xi)} a_\pm(x,\xi)\zeta_\pm(x,\xi)\psi(|\xi|^2)\hat{f}(\xi)d\xi, \tag{2.1.35}$$

où la fonction de troncature

$$\zeta_\pm(x,\xi) = \sigma_\pm(<\hat{\xi},\hat{x}> \eta(|x|)), \quad \hat{\xi} = \xi/|\xi|, \ \hat{x} = x/|x|. \tag{2.1.36}$$

Les fonctions $\sigma_\pm$ et $\eta$ doivent vérifier les hypothèses suivantes

- $\sigma_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que : $\sigma_\pm(\tau) = 0$ pour $\pm\tau \le \theta'$ et $\sigma_\pm(\tau) = 1$ pour $\pm\tau \ge \theta$, pour $-1 < \theta' < \theta < 1$
- $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*, [0,1])$ telle que : $\eta(\tau) = 0$ pour $\tau \le a > 0$ et $\eta(\tau) = 1$ pour $\tau \ge 2a$.

Ainsi la fonction $\zeta_\pm(x,\xi) = 1$ si $\pm <\hat{x},\hat{\xi}> \ge \theta$ ou $|x| \le a$ (voir Figure 2.1). La fonction $\eta$ est introduite uniquement pour éliminer la singularité de la fonction $\hat{x}$ au point $x = 0$. La fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ nous permet de localiser notre étude sur un intervalle d'énergie $\Lambda$ borné et disjoint de 0

$$\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1), \quad [\lambda_0, \lambda_1] \subset (0,\infty). \tag{2.1.37}$$

Pour appliquer la théorie développée dans la section 1.2.2 à l'opérateur (2.1.35) On utilise l'astuce suivante. Soient $\tilde{\eta}$, $\tilde{\sigma}_\pm$, $\tilde{\psi}$ vérifiant les mêmes hypothèses que les fonctions $\eta$, $\sigma_\pm$, $\psi$, respectivement, et $\tilde{\zeta}_\pm(x,\xi) = \tilde{\sigma}_\pm(<\hat{\xi},\hat{x}> \tilde{\eta}(|x|))$. Si on choisit ces fonctions telles que $\tilde{\zeta}_\pm(x,\xi)\tilde{\psi}(|\xi|^2) = 1$ sur le support de $\zeta_\pm(x,\xi)\psi(|\xi|^2)$, on voit que la fonction $\Phi_\pm$ dans (2.1.35) peut être remplacée $\tilde{\Phi}_\pm = \Phi_\pm\tilde{\zeta}_\pm\tilde{\psi}$. Comme $\tilde{\zeta}_\pm(x,\xi)$ est supportée dans la région $\pm <\hat{x},\hat{\xi}> \ge \kappa$, $\kappa \in (-1,1)$, (ou $|x| \le a$), il découle de l'estimation (2.1.19) que $\tilde{\Phi}_\pm \in \mathcal{S}^{1-\rho}$. Finalement l'opd (2.1.35) a pour symbole

$$j_\pm(x,\xi) = e^{i\Phi_\pm(x,\xi)} a_\pm(x,\xi)\zeta_\pm(x,\xi)\psi(|\xi|^2) = e^{i\tilde{\Phi}_\pm(x,\xi)} a_\pm(x,\xi)\zeta_\pm(x,\xi)\psi(|\xi|^2) \in \mathcal{C}^0(\tilde{\Phi}_\pm), \tag{2.1.38}$$

et conséquemment, d'après la proposition 1.2.12, $J_\pm$ est un opérateur borné sur $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. On a aussi besoin d'opérateurs d'onde "inverse"

$$W_\pm(H_0, H_1; J^*) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{iH_0 t} J^* e^{-iH_1 t} P_1, \tag{2.1.39}$$

avec $J = J_+$ ou $J = J_-$ et $P_1$ est le projecteur sur le sous-espace absolument continu de $H_1$. Comme $H_1$ n'a pas de valeurs propres positives d'après le théorème 1.3.1 on a $P_1 = E_1(\mathbb{R}_+)$ .

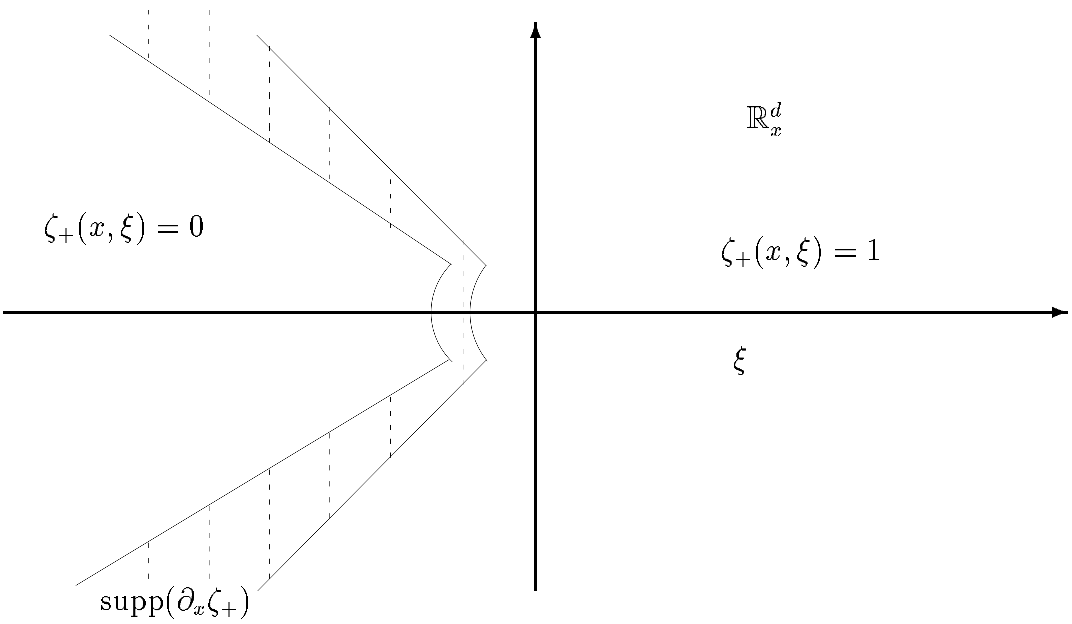


FIG. 2.1: Le support de $\zeta_+$

**Remarque 2.1.6** D'après les estimations de la proposition 2.1.5 on a pour un $\epsilon > 0$

$$J_\pm(0,\zeta_\pm,\psi) - J_\pm(N_t,\zeta_\pm,\psi) = \mathrm{Op}\left(e^{i\Phi_\pm(x,\xi)}(a_\pm(x,\xi)-1)\zeta_\pm(x,\xi)\psi(|\xi|^2)\right) \in \mathcal{C}^{-\epsilon}(\tilde{\Phi}_\pm). \tag{2.1.40}$$

En particulier l'opérateur $J_\pm(0,\zeta_\pm,\psi) - J_\pm(N_t,\zeta_\pm,\psi)$ est compact d'après la proposition 1.2.12. Il découle de la proposition 1.1.5 que

$$W_\pm(H_1,H_0;J_\pm(0,\zeta_\pm,\psi)) = W_\pm(H_1,H_0;J_\pm(N_t,\zeta_\pm,\psi))$$

pour tout $N_t$. On pourra donc supposer, sans perte de généralité, dans toute la section 2.1 que $a_\pm = 1$ dans (2.1.35).

Le but de cette section est de montrer que le couple $H_0, H_1$, avec les identifications $J_+$ et $J_-$, rentre dans le cadre de la théorie des perturbations lisses et que les opérateurs d'onde (24) et (2.1.39) existent. On doit en particulier obtenir une décomposition de la perturbation effective

$$T_\pm = HJ_\pm - J_\pm H_0, \tag{2.1.41}$$

de la forme (1.1.4). Pour cela nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.1.7** *Soit $T$ on opd de symbole*

$$t(x,\xi) = g(x,\xi)w(<\hat{x},\hat{\xi}> \eta(x))\psi(|\xi|^2),$$

*où* $g \in \mathcal{C}^{-1}(\Phi), \Phi \in \mathcal{S}^{1-\rho}$, $\rho > 0$, $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ *vérifiant* $w(\tau) = 0$ *si* $|\tau| \geq \varepsilon$ *avec* $\varepsilon \in (0,1)$. *Soient* $G_j, j = 1, \dots, d$, *définis par* (1.3.31). *Alors* $T$ *admet la représentation*

$$T = \sum_{j=1}^{d} G_j^* B^{(s)} G_j + \langle x \rangle^{-p} B^{(r)} \langle x \rangle^{-p}, \tag{2.1.42}$$

*avec* $p = (1+\rho)/2$ *et* $B^{(s)} \in \mathcal{C}^0(\Phi), B^{(r)}$ *sont bornés.*

**Preuve** Soient $B^{(s)}$ et $T_j, j = 1, \dots, d$, des opd de symboles

$$\begin{aligned} b^{(s)}(x,\xi) &= \langle x \rangle\, |\xi|^{-2}(1 - <\hat{\xi}, \hat{x}>^2)^{-1} g(x,\xi) w(<\hat{x}, \hat{\xi}>) \eta(x) \psi(|\xi|^2). \\ t_j(x,\xi) &= \langle x \rangle^{-1} (\xi_j - |x|^{-2} x_j \langle \xi, x \rangle)^2 b^{(s)}(x,\xi) \end{aligned}$$

La fonction $(1-\tau^2)^{-1} w(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R})$, de telle sorte que $b^{(s)} \in \mathcal{C}^0(\tilde{\Phi})$ et, d'après la proposition 1.2.12, L'opérateur $B^{(s)}$ est borné. Comme $G_j$ à pour symbole $\langle x \rangle^{-1/2} (\xi_j - |x|^{-2} x_j \langle \xi, x \rangle) \in \mathcal{S}^{-1/2}$ et que $t_j(x,\xi) = |g_j(x,\xi)|^2 b^{(s)}(x,\xi)$ on peut appliquer la proposition 1.2.14 pour obtenir que l'opérateur $\langle x \rangle^p \left( G_j^* B^{(s)} G_j - T_j \right) \langle x \rangle^p$ est borné pour $2p = \rho + 1$. Maintenant comme pour tout $|x| \geq 2a$

$$t(x,\xi) - \sum_{j=1}^{d} t_j(x,\xi) = g(x,\xi) \left( w(<\hat{x}, \hat{\xi}> \eta(x)) - w(<\hat{x}, \hat{\xi}>) \eta(x) \right) \psi(|\xi|^2) = 0,$$

on a que $t(x,\xi) - \sum_{j=1}^{d} t_j(x,\xi) \in \mathcal{S}^{-N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Ceci implique la continuité de l'opérateur

$$\begin{aligned} B^{(r)} &= \langle x \rangle^p \left( \sum_{j=1}^{d} G_j^* B^{(s)} G_j - T \right) \langle x \rangle^p \\ &= \langle x \rangle^p \left( \sum_{j=1}^{d} G_j^* B^{(s)} G_j - T_j \right) \langle x \rangle^p + \langle x \rangle^p \left( \sum_{j=1}^{d} T_j - T \right) \langle x \rangle^p. \end{aligned}$$

Au final on obtient (2.1.42). □

**Lemme 2.1.8** *L'opd* (2.1.41) *peut être représenté sous la forme* $T_\pm = T_\pm^{(s)} + T_\pm^{(r)}$ *où* $T_\pm^{(s)}, T_\pm^{(r)}$ *sont des opd de symboles respectifs*

$$t_\pm^{(s)}(x,\xi) = e^{i\Phi_\pm(x,\xi)} (-2i <\xi, \nabla \zeta_\pm(x,\xi)>) \psi(|\xi|^2) \in \mathcal{C}^{-1}(\tilde{\Phi}_\pm) \tag{2.1.43}$$

$$t_\pm^{(r)} = e^{i\Phi_\pm(x,\xi)} \tau_\pm^{(r)}(x,\xi) \psi(|\xi|^2) \in \mathcal{C}^{-1-\epsilon}(\tilde{\Phi}_\pm), \quad \epsilon > 0. \tag{2.1.44}$$

**Preuve** D'après (2.1.41),(2.1.5) et (2.1.35), on a

$$(T_\pm f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,\xi> + i\Phi_\pm(x,\xi)} \tau_\pm(x,\xi) \psi(|\xi|^2) \hat{f}(\xi) d\xi,$$

où

$$\begin{aligned}\tau_\pm(x,\xi) &= \mathrm{q}_\pm(x,\xi)a_\pm(x,\xi)\zeta_\pm(x,\xi) \qquad (2.1.45)\\ &-2i < \xi + \nabla\Phi_\pm(x,\xi) - A(x), \nabla(a_\pm(x,\xi)\zeta_\pm(x,\xi)) > -\Delta(a_\pm(x,\xi)\zeta_\pm(x,\xi))\end{aligned}$$

On élimine le seul terme à longue portée dans (2.1.45)

$$\tau_\pm^{(s)}(x,\xi) = -2i < \xi, \nabla\zeta_\pm(x,\xi) >,$$

qui ne décroît que comme $|x|^{-1}$ à cause de la fonction de troncature (2.1.36). Comme tous les autres termes dans (2.1.45) décroissent plus vite, on définit $t_\pm^{(r)}$ par les égalités

$$\tau_\pm^{(r)}(x,\xi) = \tau_\pm(x,\xi) - \tau_\pm^{(s)}(x,\xi), \quad t_\pm^{(r)}(x,\xi) = e^{i\Phi_\pm(x,\xi)}\tau_\pm^{(r)}(x,\xi).$$

Par conséquent, d'après (2.1.21) et les estimations des propositions 2.1.2 et 2.1.5, $t_\pm^{(r)}$ appartient à la classe $\mathcal{C}^{-1-\epsilon}(\tilde\Phi_\pm)$. □

Maintenant il est facile d'obtenir la représentation (2.1.42).

**Proposition 2.1.9** *L'opérateur $T_\pm$ admet la représentation* (2.1.42) *pour* $p = (1+\epsilon)/2 > 1/2$ *et deux opérateurs bornés* $B_\pm^{(r)}, B_\pm^{(s)}$.

**Preuve** Comme $t_\pm^{(s)} \in \mathcal{C}^{-1}(\tilde\Phi_\pm)$ et $\sigma'_\pm(\tau) = 0$ dans un voisinage des points $-1$ et 1, le lemme 2.1.7 peut être directement appliqué à $T_\pm^{(s)}$. Comme, par le lemme 2.1.8, $t_\pm^{(r)} \in \mathcal{C}^{-1-\epsilon}(\tilde\Phi_\pm)$ l'opérateur $\langle x\rangle^p T_\pm^{(r)} \langle x\rangle^p$ est borné pour $p \le (1+\epsilon)/2$, d'après la proposition 1.2.13. Ceci conduit à (2.1.42) avec $p = (1+\epsilon)/2 > 1/2$. □

En prenant en compte les propositions 1.1.3, 1.1.4, 1.3.7 and 1.3.13 on arrive au résultat suivant.

**Théorème 2.1.10** *Soient $A_L$ et $V_L$ vérifiant* (1.3.4). *Soit* $J_\pm = J_\pm(\zeta_\pm, \psi)$ *défini par* (2.1.35). *Alors les opérateurs d'onde*

$$W_\pm(H_1, H_0; J_\pm), \quad W_\pm(H_0, H_1; J_\pm^*) \tag{2.1.46}$$

*et*

$$W_\pm(H_1, H_0; J_\mp), \quad W_\pm(H_0, H_1; J_\mp^*) \tag{2.1.47}$$

*existent. Les opérateurs* (2.1.46) *ainsi que* (2.1.47) *sont mutuellement adjoints l'un de l'autre.*

La preuve de l'isométricité et de la complétude de $W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)$ repose sur des estimations du type (1.1.7) et (1.1.8).

**Lemme 2.1.11** *On a les deux limites suivantes*

$$s - \lim_{t\to\pm\infty} (J_\pm^* J_\pm - \psi^2(H_0))e^{-iH_0 t} = 0, \tag{2.1.48}$$

$$s - \lim_{t\to\pm\infty} J_\mp e^{-iH_0 t} = 0. \tag{2.1.49}$$

**Preuve** D'après la proposition 1.2.11, à des termes compacts près, $J_\pm^* J_\pm - \psi^2(H_0)$ est un opd (que l'on notera $A$) de symbole $(\zeta_\pm^2(x,\xi) - 1)\psi^2(|\xi|^2)$ et

$$(Ae^{-iH_0 t} f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\xi,x>-i|\xi|^2 t}(\zeta_\pm^2(x,\xi) - 1)\psi^2(|\xi|^2)\hat{f}(\xi)d\xi. \tag{2.1.50}$$

Pour les points stationnaires $\xi_0 = x/(2t)$ de cette intégrale on a $\zeta_\pm(x,\xi_0) = 1$ si $t \to \pm\infty$ (voir Figure 2.1). Par conséquent si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en intégrant par parties on peut estimer l'intégrale (2.1.50) par $C_N(1 + |x| + |t|)^{-N}$ pour tout $N$, ce qui prouve (2.1.49). Pour (2.1.48) on applique les mêmes arguments à l'opd de symbole $\zeta_\mp(x,\xi)\chi(x)\psi(|\xi|^2)$ où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vaut 0 pour $|x| \le 2a$ et 1 pour $|x| \le 3a$. □

**Proposition 2.1.12** *Soient* $\Lambda$ *vérifiant* (2.1.37) *et une fonction* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ *telle que* $\psi_{|\Lambda} = 1$. *Alors sous les hypothèses du théorème* 2.1.10 *les opérateurs* $W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)$ *sont isométriques sur le sous-espace* $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$ *et*

$$W_\pm(H_1, H_0; J_\mp) = 0, \quad W_\pm(H_0, H_1; J_\mp^*) = 0. \tag{2.1.51}$$

**Preuve** Les résultats pour les opérateurs $W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)$ et $W_\pm(H_1, H_0; J_\mp)$ découlent directement de (2.1.48) et (2.1.49), respectivement. La seconde égalité (2.1.51) est une conséquence de la première car $W_\pm(H_0, H_1; J_\mp^*) = W_\pm(H_1, H_0; J_\mp)^*$. □

Maintenant on peut montrer la complétude asymptotique des $W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)$.

**Théorème 2.1.13** *Soient* $A_L$ *et* $V_L$ *vérifiant* (1.3.4), $\Lambda$ *vérifiant* (2.1.37) *et* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ *telle que* $\psi_{|\Lambda} = 1$. *Alors les opérateurs d'onde* (24) *sont complets :*

$$\text{Ran}\,(W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)E_0(\Lambda)) = E(\Lambda)\mathcal{H}. \tag{2.1.52}$$

**Preuve** On doit vérifier que pour tout $f \in E(\Lambda)\mathcal{H}$ il existe $f_0 \in E_0(\Lambda)\mathcal{H}$ tel que

$$\lim_{t\to\pm\infty} ||e^{-iH_1 t} f - J_\pm e^{-iH_0 t} f_0|| = 0. \tag{2.1.53}$$

L'existence des opérateurs $W_\pm(H_0, H_1; J_\pm^*)$ implique que pour $f_0 = W_\pm(H_0, H_1; J_\pm^*)f$

$$\lim_{t\to\pm\infty} ||J_{\pm}^{*}e^{-iH_1t}f - e^{-iH_0t}f_0|| = 0$$

et

$$\lim_{t\to\pm\infty} ||J_{\pm}J_{\pm}^{*}e^{-iH_1t}f - J_{\pm}e^{-iH_0t}f_0|| = 0. \tag{2.1.54}$$

La seconde égalité (2.1.51) conduit à $\lim_{t\to\pm\infty} ||J_{\mp}^{*}e^{-iH_1t}f|| = 0$ puis

$$\lim_{t\to\pm\infty} ||J_{\mp}J_{\mp}^{*}e^{-iH_1t}f|| = 0. \tag{2.1.55}$$

D'après la proposition 1.2.11, à des termes compacts près, $J_{\pm}J_{\pm}^{*} + J_{\mp}J_{\mp}^{*}$ est un opd de symbole $(\zeta_{\pm}^2(x,\xi) + \zeta_{\mp}^2(x,\xi))\psi^2(|\xi|^2)$. Si on choisit les fonctions $\sigma_{\pm}$ (voir (2.1.36)) de telle sorte que $\sigma_{+}^2(\tau) + \sigma_{-}^2(\tau) = 1$ on déduit de (2.1.54), (2.1.55) que

$$\lim_{t\to\pm\infty} ||\psi^2(H_0)e^{-iH_1t}f - J_{\pm}e^{-iH_0t}f_0|| = 0.$$

Comme l'opérateur $\psi^2(H_1) - \psi^2(H_0)$ est compact, on aboutit à (2.1.53). □

Il ne reste plus qu'à traiter le cas des termes à courte portée.

**Proposition 2.1.14** *Sous les hypothèses* (1.3.2)-(1.3.7) *on a l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde* $W_{\pm}(H, H_1; Id)$ *et* $W_{\pm}(H_1, H; Id)$*, définis par* (1.1.5).

**Preuve** D'après l'hypothèse (1.3.5), le théorème 1.3.7 et les propositions 1.1.3, 1.1.4 et 1.3.11 il suffit de décomposer la perturbation

$$T = H - H_1 = -DA_S - A_SD + 2 < A_S, A_L > +|A_S|^2 + V_S \tag{2.1.56}$$

sous la forme

$$T = \langle x\rangle^{-p} B_1 \langle x\rangle^{-p} + \sum_{k=1}^{d} \langle x\rangle^{-p} B_{2,k} \langle x\rangle^{-p} D_k + D_k \langle x\rangle^{-p} B_{2,k} \langle x\rangle^{-p}, \tag{2.1.57}$$

$$B_1 = \langle x\rangle^{p} (2 < A_S(x), A_L(x) > |A_S(x)|^2 + V_S(x)) \langle x\rangle^{p},\ B_{2,k} = \langle x\rangle^{p} A_S(x) \langle x\rangle^{p}, \tag{2.1.58}$$

pour $p = \rho_0/2 > 1/2$. Les opérateurs d'onde ainsi construits sont automatiquement isométriques et complets d'après la proposition 1.1.7. □

Enfin le théorème de multiplication permet de conclure par

**Théorème 2.1.15** *Sous les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *les opérateurs d'onde modifiés* $W_{\pm}(H, H_0; J_{\pm})$ *et* $W_{\pm}(H_0, H; J_{\pm}^{*})$*, définis par* (24)*, existent et sont complets.*

### 2.1.3 Coïncidence avec l'approche dépendante du temps

Il nous reste maintenant à montrer que les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_0; J_\pm)$ construits dans la section précédente coïncident avec les opérateurs d'onde définis par une modification du groupe unitaire $e^{-iH_0 t}$ associé à l'évolution libre. On considérera dans cette partie une évolution modifiée $U_0(t)$ en représentation d'espace comme celle construite dans [Yaf80], mais on pourrait aussi bien considérer une modification en représentation de moment comme celle présentée dans [Hör76]. Dans cette section on adopte la même stratégie que dans [Yaf98, Yaf00b] : dans un premier temps on construit $U_0(t)$ en termes des solutions de l'équation eiconale (2.1.2), ensuite on montre que cette définition coïncide avec une définition du même type que celle dans [Yaf80]. Notre construction de $U_0(t)$ repose sur une description précise de l'asymptotique de

$$(J_\pm e^{-iH_0 t} f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi_\pm(x,\xi) - i|\xi|^2 t} \zeta_\pm(x,\xi)\psi(|\xi|^2)\hat{f}(\xi)d\xi, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad (2.1.59)$$

pour $t \to \pm\infty$. Les points stationnaires $\xi_0 = \xi_0(x,t)$ de la phase sont déterminés par l'équation

$$x + (\nabla_\xi \Phi_\pm)(x, \xi_0(x,t)) - 2\xi_0(x,t)t = 0, \quad \pm\, t > 0. \quad (2.1.60)$$

A cause de la fonction $\zeta_\pm(x,\xi)\psi(|\xi|^2)$ on s'intéresse seulement aux points $\xi_0(x,t)$ tels que $0 < c \leq |\xi_0|^2 \leq C < \infty$ et $\pm < \hat{\xi}_\pm, \hat{x} > \geq \pm\kappa$ pour $\kappa \in (-1,1)$. D'après l'estimation (2.1.19) sur $\nabla_\xi \Phi_\pm$ on a que pour $|t|$ grand l'équation (2.1.60) a une solution unique $\xi_0(x,t)$ et

$$\xi_0(x,t) = (2t)^{-1}x + O(|t|^{-\rho}). \quad (2.1.61)$$

Posons

$$\Xi(x,t) = < \xi_0(x,t), x > + \Phi_\pm(x, \xi_0(x,t)) - |\xi_0(x,t)|^2 t, \quad \pm t > 0, \quad (2.1.62)$$

la méthode de la phase stationnaire appliquée à l'intégrale (2.1.59), en tenant compte de $\zeta_\pm(x,\xi_0) = 1$, nous donne

$$(J_\pm e^{-iH_0 t} f)(x) = e^{\mp\pi i d/4} e^{i\Xi(x,t)} (2|t|)^{-d/2} \psi(|\xi_0(x,t)|^2)\hat{f}(\xi_0(x,t)) + \mathrm{r}_\pm(x,t), \quad (2.1.63)$$

où $\mathrm{r}_\pm(x,t)$ tend vers zéro dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ quand $t \to \pm\infty$. L'équation (2.1.60) permet de réécrire (2.1.62) de la manière suivante

$$\Xi(x,t) = |x|^2/4t + \Omega(x,t), \quad (2.1.64)$$

où

$$\Omega(x,t) = \Phi_\pm(x,\xi_0(x,t)) - (4t)^{-1}|(\nabla_\xi \Phi_\pm)(x,\xi_0(x,t))|^2. \tag{2.1.65}$$

Il découle de (2.1.61) que dans l'équation (2.1.63) le terme $\psi(|\xi_0|^2)\hat{f}(\xi_0)$ peut être remplacé par $\psi((2t)^{-2}|x|^2)\hat{f}((2t)^{-1}x)$. Ce qui nous conduit au lemme suivant

**Lemme 2.1.16** *Soit $\xi_0(x,t)$ vérifiant l'équation* (2.1.60) *et soit $\Xi(x,t)$ défini par* (2.1.64) *et* (2.1.65). *On définit une famille d'opérateurs unitaires par l'égalité*

$$(U_0(t)f)(x) = e^{\mp \pi d i/4} e^{i\Xi(x,t)} (2|t|)^{-d/2} \hat{f}((2t)^{-1}x), \quad \pm t > 0. \tag{2.1.66}$$

*Alors pour toute fonction $\zeta_\pm$, définie par* (2.1.36), *on a*

$$\lim_{t\to\pm\infty} ||J_\pm(\psi,\zeta_\pm)e^{-iH_0 t}f - U_0(t)\psi(H_0)f|| = 0, \quad \forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Le lemme 2.1.16 permet de reformuler les résultats de la partie précédente en particulier le théorème 2.1.15.

**Proposition 2.1.17** *Supposons que $A$ et $V$ vérifient les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *et soit $U_0(t)$ défini par* (2.1.66). *Alors les opérateurs d'onde*

$$\mathbf{W}_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt}U_0(t) \tag{2.1.67}$$

*existent, sont isométriques et* Ran $\mathbf{W}_\pm = P\mathcal{H}$. *De plus, pour tout $N_t \geq 0$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$ et toute fonction* (2.1.36)

$$\mathbf{W}_\pm \psi(H_0) = W_\pm(H,H_0;J_\pm(N_t,\psi,\zeta_\pm)).$$

**Remarque 2.1.18** Une conséquence directe de la proposition 2.1.17 est que les opérateurs d'onde $W_\pm(H,H_0;J_\pm(N_t,\psi,\zeta_\pm))$ ne dépendent pas du choix des fonctions de troncature $\zeta_\pm$ ni de l'ordre $N_t$ d'approximation de l'équation de transport (2.1.24) (ce qu'on savait déjà d'après la remarque 2.1.6).

Si $\rho > 1/2$ alors la fonction (2.1.64) peut être remplacée par une expression plus simple. Comme d'après (2.1.19) et (2.1.61) on a pour $|x| \sim |t|$ que

$$(4t)^{-1}|\nabla_\xi \Phi_\pm(x,\xi_0(x,t))|^2 = O\left(|t|^{1-2\rho}\right), \quad \Phi_\pm(x,\xi_0(x,t)) - \Phi_\pm(x,x/(2t)) = O\left(|t|^{1-2\rho}\right),$$

on peut poser $\Omega(x,t) = \Phi_\pm(x,x/(2t))$ dans (2.1.65) avec $\Phi_\pm = \Phi_\pm^{(1)}$. En tenant compte de (2.1.22) on arrive, pour $\pm t > 0$, a

$$\Xi(x,t) = \frac{|x|^2}{4t} + t\int_0^\infty \Big(V_L((1\pm s)x) - V_L(\pm sx)\Big)ds \qquad (2.1.68)$$
$$\mp \int_0^\infty < A_L((1\pm s)x) - A_L(\pm sx), x > ds.$$

Une conséquence directe de (2.1.68) est le résultat de Loss et Thaller sur l'existence des opérateurs d'onde usuels (8) pour des potentiels magnétiques à longue portée vérifiant la condition de jauge transverse [LT87].

**Proposition 2.1.19** *Supposons que $V$ et $A$ vérifient les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7)*, pour un $\rho > 1/2$, avec en plus $V_L = 0$ et $A_L$ satisfaisant la condition de jauge transverse* (19)*. Alors les opérateurs d'onde*

$$W_\pm(H, H_0) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t} \qquad (2.1.69)$$

*existent et coïncident avec les opérateurs* (24)*. En conséquence les opérateurs* (2.1.69) *sont complets.*

**Preuve** Sous les hypothèses énoncées il découle de (2.1.68) que $\Xi(x,t) = |x|^2/(4t)$. Donc pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left\|U_0(t)f - e^{-itH_0}f\right\| = 0,$$

et l'évolution modifiée $U_0(t)$ coïncide avec l'évolution libre $e^{-itH_0}$. □

Les opérateurs d'onde (2.1.67) avec $U_0(t)$ défini par (2.1.66) ont été étudiés dans [Yaf80] (pour $A = 0$). Dans cet article la fonction $\Xi$ était toujours définie par la formule (2.1.64) mais avec $\Omega(x,t)$ une solution approchée de l'équation

$$\partial_t\Omega(x,t) + t^{-1} < x, (\nabla\Omega)(x,t) > + |(\nabla\Omega)(x,t)|^2$$
$$-2 < A_L(x), x/(2t) + \nabla\Omega(x,t) > + V_L(x) + |A_L(x)|^2 = 0, \quad (2.1.70)$$

vérifiant la condition

$$\sup_{c|t|\le|x|\le c'|t|} |\partial_x^\alpha\Omega(x,t)| \le C|t|^{1-\varepsilon-|\alpha|}, \quad |\alpha| = 1,2, \quad \varepsilon > 0, \qquad (2.1.71)$$

Il convient donc de montrer que la construction développée dans la section 2.1 coïncide avec celle de [Yaf80].

**Proposition 2.1.20** *Soit $\xi_0(x,t)$ vérifiant l'équation* (2.1.60) *et soit $\Omega(x,t)$ définie par la formule* (2.1.65)*. Alors $\Omega(x,t)$ vérifie l'équation* (2.1.70)*, à un terme d'ordre $|t|^{-(N+1)\rho}$ près, dans la région $0 < c \le |x|/|t| \le c' < \infty$ ainsi que la condition* (2.1.71)*.*

**Preuve** Pour simplifier les notations, on omet ici les variables $t$ et $x$. En différenciant (2.1.65), on trouve que

$$\partial_t \Omega = \frac{1}{4t^2} |\nabla_\xi \Phi_\pm|^2 + \left\langle \nabla_\xi \Phi_\pm, \partial_t \xi_0 - \frac{1}{2t} \sum_{k=1}^{d} \partial_t \xi_{k,0} \partial_{\xi_k} \nabla_\xi \Phi_\pm \right\rangle, \tag{2.1.72}$$

$$\partial_{x_i} \Omega = \partial_{x_i} \Phi_\pm + \left\langle \nabla_\xi \Phi_\pm, \partial_{x_i} \xi_0 - \frac{1}{2t} \left( \partial_{x_i} \nabla_\xi \Phi_\pm + \sum_{k=1}^{d} \partial_{x_i} \xi_{k,0} \partial_{\xi_k} \nabla_\xi \Phi_\pm \right) \right\rangle. \tag{2.1.73}$$

En différenciant l'équation (2.1.60), on trouve que

$$\partial_t \xi_0 - \frac{1}{2t} \sum_{k=1}^{d} \partial_t \xi_{k,0} \partial_{\xi_k} \nabla_\xi \Phi_\pm = -\frac{1}{2t^2} x - \frac{1}{2t^2} \nabla_\xi \Phi_\pm \tag{2.1.74}$$

et

$$\partial_{x_i} \xi_{j,0} - \frac{1}{2t} \left( \partial_{x_i} \partial_{\xi_j} \Phi_\pm + \sum_{k=1}^{d} \partial_{x_i} \xi_{k,0} \partial_{\xi_k} \partial_{\xi_j} \Phi_\pm \right) = \frac{1}{2t} \delta_{ij}, \tag{2.1.75}$$

où $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. En comparant (2.1.72) et (2.1.74) on obtient que

$$\partial_t \Omega = -\frac{1}{2t^2} < x, \nabla_\xi \Phi_\pm > -\frac{1}{4t^2} |\nabla_\xi \Phi_\pm|^2. \tag{2.1.76}$$

De manière similaire, en comparant (2.1.73) et (2.1.75) on obtient que

$$\nabla_x \Omega = \nabla_x \Phi_\pm + \frac{1}{2t} \nabla_\xi \Phi_\pm. \tag{2.1.77}$$

Ces égalités entraînent que

$$\partial_t \Omega + \frac{1}{t} < x, \nabla_x \Omega > + |\nabla_x \Omega|^2 = \frac{1}{t} < x + \nabla_\xi \Phi_\pm, \nabla_x \Phi_\pm > + |\nabla_x \Phi_\pm|^2 \tag{2.1.78}$$

et d'après (2.1.60)

$$\frac{1}{2t} x + \nabla_x \Omega = \xi_0 + \nabla_x \Phi_\pm. \tag{2.1.79}$$

Les équations (2.1.4), (2.1.77) et (2.1.78) conduisent à

$$\begin{aligned}
&\partial_t \Omega + t^{-1} < x, \nabla_x \Omega > + |\nabla_x \Omega|^2 - 2 < A, x/(2t) + \nabla_x \Omega > + V + |A|^2 \\
&\quad = t^{-1} < x + \nabla_\xi \Phi, \nabla_x \Phi > + |\nabla_x \Phi|^2 - 2 < A, \xi + \nabla_x \Phi > + V + |A|^2 \\
&\quad = q^{(N)}
\end{aligned}$$

D'après l'estimation (2.1.20) le terme $q^{(N_e)} = q^{(N_e)}(x, \xi_0)$ est d'ordre $|t|^{-(N_e+1)\rho}$ dans la région considérée. La condition (2.1.71) découle des estimations (2.1.19) et (2.1.61). $\square$

## 2.2 La matrice de diffusion $S(\lambda; H, H_0)$

Dans cette section on s'intéresse à la matrice de la diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ les résultats pour $S(\lambda; H, H_0)$ découlant du théorème de multiplication 1.1.11. La première étape consiste à justifier une formule de représentation stationnaire du type de celle proposée dans [IK86, Yaf98]. C'est ici que l'on utilisera les estimations microlocales de la section 1.3.4. Une fois cette représentation justifiée on cherchera à en extraire la partie principale (à des termes compacts près) de la matrice de la diffusion. Si on considère $S(\lambda; H_1, H_0)$ comme un opérateur intégral sur $\mathfrak{N} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ alors son noyau $\mathrm{s}(\omega, \omega'; \lambda)$ est une fonction régulière en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$. C'est la structure de cette singularité diagonale qui détermine les propriétés spectrales de la partie principale de $S(\lambda; H_1, H_0)$ qui seront étudiées dans la section 2.3.1. A partir d'ici on fixe certaines contraintes sur les fonctions de troncature $\zeta_\pm$ définies par (2.1.36)

$$\begin{aligned} &\sigma_+(\tau) = 1 \text{ pour } \tau \in [-\varepsilon, 1] \quad \text{et} \quad \sigma_+(\tau) = 0 \text{ pour } \tau \in [-1, -2\varepsilon], \\ &\sigma_-(\tau) = 1 \text{ pour } \tau \in [-1, \varepsilon] \quad \text{et} \quad \sigma_-(\tau) = 0 \text{ pour } \tau \in [2\varepsilon, 1]. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

pour un certain $\varepsilon \in (0, 1/2)$ fixé.

### 2.2.1 Construction de $S(\lambda; H, H_0)$

D'après les théorèmes 2.1.10, 2.1.13 et 2.1.15 les opérateurs de diffusion pour les couples $H_0, H$ et $H_0, H_1$ définis par (1.1.9)

$$\mathbf{S}(H, H_0; J_+, J_-) = W_+^*(H, H_0; J_+) W_-(H, H_0; J_-), \tag{2.2.2}$$

$$\mathbf{S}(H_1, H_0; J_+, J_-) = W_+^*(H_1, H_0; J_+) W_-(H_1, H_0; J_-), \tag{2.2.3}$$

commutent avec $H_0$ et sont unitaires sur le sous-espace $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$. Donc d'après le théorème 1.1.9 dans une représentation de $\mathcal{H}$ où $H_0$ est diagonal ces deux opérateurs se ramènent à la multiplication par les fonctions à valeur opérateur $S(\lambda; H, H_0)$ et $S(\lambda; H_1, H_0)$ appelées matrices de diffusion. On considérera la représentation standard de $\mathcal{H}$ décrite en terme des opérateurs (1.2.23), (1.2.24) et

$$\begin{aligned} F_0 : E_0(\Lambda)\mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{L}^2(\Lambda, \mathfrak{N}) \\ f &\longmapsto (F_0 f)(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) f \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

qui vérifie

$$(F_0 H_0 f)(\lambda) = \lambda (F_0 f)(\lambda).$$

Les matrices de diffusion opèrent alors sur l'espace $\mathfrak{N} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ comme des opérateurs unitaires et ce pour presque tout $\lambda \in (0, \infty)$.

On commence par traiter le cas de $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$. On a besoin d'une formule de représentation stationnaire pour ces matrices de diffusion dans les cas où les modificateurs $J_+$ et $J_-$ pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$ sont différents. Cette formule nous est formellement donnée par (1.1.10) que l'on rappelle ici

$$S(\lambda) = \Omega_+(\lambda) - 2\pi i \Gamma_0(\lambda)\Big(J_+^* T_- - T_+^* R_1(\lambda + i0) T_-\Big)\Gamma_0^*(\lambda). \tag{2.2.5}$$

Les opérateurs $J_\pm$ sont définis par (2.1.35), $T_\pm$ sont définis par (2.1.41) et $\Omega_+(\lambda)$ représente les valeurs diagonales d'un opérateur d'onde auxiliaire $\Omega_+$

$$\Omega_+ = W_\pm(H_0, H_0; J_+^* J_-) = s - \lim_{t \to +\infty} e^{iH_0 t} J_+^* J_- e^{-iH_0 t}. \tag{2.2.6}$$

L'opérateur $\Omega_+$ existe pourvu que la perturbation effective $[H_0, J_+^* J_-] = J_+^* T_- - T_+^* J_-$ se décompose en un produit de perturbations $H_0$-lisses, mais on peut aussi déduire son existence du théorème de multiplication des opérateurs d'onde 1.1.8. Comme d'après la propriété d'entrelacement (cf. section 1.1.1) l'opérateur $\Omega_+$ commute avec $H_0$ il opère dans la représentation spectrale définie par (2.2.4) comme la multiplication par $\Omega_+(\lambda)$.

On commence par le lemme suivant.

**Lemme 2.2.1** *L'opérateur $J_\pm^* T_\mp$ admet une décomposition de type* (2.1.42) *pour $p = (1+\epsilon)/2 > 1/2$.*

$$J_\pm^* T_\mp = \sum_{j=1}^{d} G_j^* B_{JT,\pm}^{(s)} G_j + \langle x \rangle^{-p} B_{JT,\pm}^{(r)} \langle x \rangle^{-p},$$

*où les opérateurs $G_j$ sont définis par* (1.3.31) *et les opérateurs $B_{JT,\pm}^{(s)}, B_{JT,\pm}^{(r)}$ sont bornés.*

**Preuve** D'après la décomposition (2.1.42) pour l'opérateur $T_\mp$, On a pour $p = (1+\epsilon)/2 > 1/2$

$$\begin{aligned} J_\pm^* T_\mp &= J_\pm^* \langle x \rangle^{-p} B_\mp^{(r)} \langle x \rangle^{-p} + \sum_{j=1}^{d} J_\pm^* G_j^* B_\mp^{(s)} G_j \\ &= \langle x \rangle^{-p} \Big( \langle x \rangle^{p} J_\pm^* \langle x \rangle^{-p} B_\mp^{(r)} \Big) \langle x \rangle^{-p} + \sum_{j=1}^{d} G_j^* J_\pm^* B_\mp^{(s)} G_j + [G_j, J_\pm]^* B_\mp^{(s)} G_j \end{aligned}$$

où $B_\mp^{(s)} \in \mathcal{C}^0(\tilde{\Phi}_\mp)$ et $B_\mp^{(r)}$ sont des opérateurs bornés. On remarque d'abord que les opérateurs $B_{JT,\pm}^{(s)} = J_\pm^* B_\mp^{(s)}$ et $\widetilde{B}^{(r)} = \langle x \rangle^{p} J_\pm^* \langle x \rangle^{-p} B_\mp^{(r)}$ sont bornés par les propositions 2.1.9 et 1.2.13. D'après les propositions 1.2.9 et 1.2.10 le commutateur $[G_j, J_\pm] = A + R$ où $A$ appartient à la classe $\mathcal{C}^{-1/2-\rho}(\tilde{\Phi}_\pm)$ et $R$ à un symbole dans la classe de Schwartz, en conséquence l'opérateur $B_j = \langle x \rangle^{\rho/2} [G_j, J_\pm] \langle x \rangle^{p}$ est borné. Comme $\langle x \rangle^{-\rho/2} B_\mp^{(s)} G_j \in \mathcal{C}^{-(1+\rho)/2}(\tilde{\Phi}_\mp)$ on obtient que $\widetilde{B}_j = \langle x \rangle^{-\rho/2} B_\mp^{(s)} G_j \langle x \rangle^{p}$ est borné. Finalement l'égalité $[G_j, J_\pm]^* B_\mp^{(s)} G_j = \langle x \rangle^{-p} B_j^* \widetilde{B}_j \langle x \rangle^{-p}$ nous conduit à la représentation (2.1.42) pour $J_\pm^* T_\mp$

avec $B^{(r)}_{JT,\pm} = \widetilde{B}^{(r)} + \sum_{j=1}^d B_j^* \widetilde{B}_j$ bornés. □

Le lemme 2.2.1 assure en particulier l'existence des opérateurs d'onde $\Omega_+$ et permet de définir l'opérateur $\Gamma_0(\lambda) J_+^* T_- \Gamma_0^*(\lambda)$ grâce aux propositions 1.2.21 et 1.3.14. Pour l'étude du terme contenant la résolvante on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.2.2** *Soient $J_\pm = J_\pm(N_t, \zeta_\pm, \psi)$ définis par (2.1.35) et $T_\pm$ définis par (2.1.41). Alors l'opérateur $\langle x\rangle^p T_+^* R_1^l(\lambda + i0) T_- \langle x\rangle^p$ est borné dans $\mathcal{H}$ et continu en norme par rapport à $\lambda > 0$ si $p < 1 + (N_t+1)\epsilon/2 - l/2$.*

**Preuve** On a besoin d'une décomposition $T_\pm = T_\pm^{(sing)} + T_\pm^{(reg)}$ analogue à celle de la proposition 2.1.8 mais ou le terme $T_\pm^{(reg)}$ appartienne à une classe $\mathcal{C}^m(\tilde{\Phi}_\pm)$ avec un $m = m(N_t) \to -\infty$ quand $N_t \to \infty$. Pour obtenir cette décomposition on repart de l'équation (2.1.45) qu'on réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} \tau_\pm(x,\xi) &= \mathrm{q}_\pm^{(N_t)}(x,\xi)\zeta_\pm(x,\xi) - 2i < \xi + \nabla\Phi_\pm(x,\xi) - A(x), \nabla\zeta_\pm(x,\xi) > \\ &\quad a_\pm(x,\xi) - 2 < \nabla a_\pm(x,\xi), \nabla\zeta_\pm(x,\xi) > - a_\pm(x,\xi)\Delta\zeta_\pm(x,\xi). \end{aligned}$$

On pose alors

$$t_\pm^{(reg)}(x,\xi) = e^{i\phi_\pm(x,\xi)} \mathrm{q}_\pm^{(N_t)}(x,\xi)\zeta_\pm(x,\xi)\psi(|\xi|^2),\ t_\pm^{(sing)}(x,\xi) = t_\pm(x,\xi) - t_\pm^{(reg)}(x,\xi),$$

de sorte que les symboles de $T_\pm^{(reg)}$ et $T_\pm^{(sing)}$ vérifient

$$t_\pm^{(reg)} \in \mathcal{C}^{-1-(N_t+1)\epsilon}(\tilde{\Phi}_\pm), \tag{2.2.7}$$

$$t_\pm^{(sing)} \in \mathcal{C}^{-1}(\tilde{\Phi}_\pm), \quad \mathrm{supp}\ t_\pm^{(sing)} \subset \Gamma_\mp(-\varepsilon, a). \tag{2.2.8}$$

le fait que le symbole de $T_\pm^{(sing)}$ soit supporté dans la zone $\Gamma_\mp(-\varepsilon, a)$ découle des condition (2.2.1) et de ce que tous les termes qui composent $t_\pm^{(sing)}$ contiennent des dérivées de $\zeta_\pm$ (cf. Figures 1.2 et 2.1). Maintenant on décompose le problème de la manière suivante

$$\langle x\rangle^p T_+^* R_1^l(\lambda + i0) T_- \langle x\rangle^p = B_1(\lambda) + B_2(\lambda) + B_3(\lambda) : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \tag{2.2.9}$$

avec

$$B_1(\lambda) = \left(\langle x\rangle^s T_+^{(reg)} \langle x\rangle^p\right)^* \langle x\rangle^{-s} R_1^l(\lambda + i0) \langle x\rangle^{-s} \left(\langle x\rangle^s T_-^{(reg)} \langle x\rangle^p\right), \tag{2.2.10}$$

$$\begin{aligned} B_2(\lambda) &= \left(\langle x\rangle^s T_-^{(reg)} \langle x\rangle^p\right)^* \langle x\rangle^{-s} R_1^l(\lambda + i0) T_-^{(sing)} \langle x\rangle^p \\ &\quad + \langle x\rangle^p T_+^{(sing)*} R_1^l(\lambda + i0) \langle x\rangle^{-s} \left(\langle x\rangle^s T_\pm^{(reg)} \langle x\rangle^p\right), \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

$$B_3(\lambda) = \langle x\rangle^p T_+^{(sing)*} R_1^l(\lambda + i0) T_-^{(sing)} \langle x\rangle^p. \tag{2.2.12}$$

tout d'abord remarquons que, d'après la proposition 1.2.13 et (2.2.7), l'opd $\langle x\rangle^s T_\pm^{(reg)} \langle x\rangle^p$ est borné pour $s+p \leq 1+(N_t+1)\epsilon$. Les termes contenant la résolvante sont estimés grâce au théorème 1.3.21, puisque d'après (2.2.8) le symbole $t_\pm^{(sing)}$ en vérifie les hypothèses, si $l-1/2 < s$ et $l-1 < s-p$. En combinant ces estimations on obtient que $B(\lambda)$ est une somme d'opérateurs bornés, continu en norme par rapport à $\lambda > 0$, si on peut choisir un $s$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées $1/2 \geq p \leq 1+(N_t+1)\epsilon - l/2$. En remarquant que l'estimation pour $p$ entraîne celle pour n'importe quel $p' \leq p$ on conclut que la seule restriction est $p < 1+(N_t+1)\epsilon - l/2$. □

Maintenant on peut donner un sens à la formule (2.2.5) par le théorème 1.1.10.

**Théorème 2.2.3** *Supposons que l'hypothèse* (1.3.4) *soit vérifiée et que* $J_\pm$ *soient définis par* (2.1.35)*. Alors pour tout choix admissible de fonctions* (2.1.36)*, la matrice de diffusion* $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ *pour le couple* $H_0$, $H_1$, *avec identifications* $J_\pm$, *admet la représentation* (2.2.5)*, où* $\Omega_+(\lambda) = 0$. *L'opérateur* $S(\lambda)$ *est fortement continu par rapport à* $\lambda > 0$.

**Preuve** Pour justifier (2.2.5) il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 1.1.10. La représentation (2.1.42) pour $J_+^* T_-$ permet d'obtenir la factorisation

$$J_+^* T_- = K_0^* B K_0, \quad K_0 = \begin{pmatrix} \langle x\rangle^{-p} \\ \langle x\rangle^{-1/2} \nabla^\perp \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{JT,+}^{(r)} & 0 \\ 0 & B_{JT,+}^{(s)} Id_{\mathcal{H}^{\otimes d}} \end{pmatrix}.$$

avec $p = 1/2 + \epsilon/4$. Ici $K_0 : \mathcal{G} \to \mathfrak{N}$ est un "vecteur" opérateur et $B$ est un opérateur "matriciel" borné sur $\mathcal{G}$. L'espace $\mathcal{G} = \mathcal{H}^{\otimes d}$ consiste en plusieurs copies de $\mathcal{H}$ et d'après les propositions 1.2.21 et 1.3.14 l'opérateur $Z_0(\lambda, K_0) : \mathcal{G} \to \mathfrak{N}$ défini par (1.1.12) et son adjoint sont bornés et continus en $\lambda > 0$. Pour le terme contenant la résolvante on utilise la décomposition suivante

$$T_\pm = K_\pm^* K_0, \quad K_\pm = \begin{pmatrix} \langle x\rangle^{-p} T_\pm^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

car d'après le lemme 2.2.2 l'opérateur $\mathcal{R}(z, K_+, K_-)$ défini par (1.1.13) est bien borné et faiblement continu. La continuité forte de $S(\lambda; H_1, H_0)$ découle de la continuité faible puisque $S(\lambda; H_1, H_0)$ est unitaire. Il reste à montrer que $\Omega_+(\lambda) = 0$, pour tout $\lambda > 0$, ce qui découle de l'égalité $\Omega_+ = 0$ qui elle même résulte de la limite (2.1.49)

$$s - \lim_{t\to\pm\infty} J_\mp \exp(-iH_0 t) = 0. \qquad \square$$

Il reste à étudier la matrice de diffusion pour le couple $H_0, H$ avec identification $J_+, J_-$. D'après le théorème de multiplication 1.1.11 il suffit de construire la matrice de la diffusion pour le couple $H_1, H$ pour récupérer celle pour le couple $H_0, H$ avec identification $J_+, J_-$.

**Proposition 2.2.4** *Supposons que* $A$ *et* $V$ *vérifient les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *et que les opérateurs* $J_\pm$ *soient définis par* (2.1.35)*. Alors la matrice de la diffusion* $S(\lambda, H, H_1)$ (*avec identification* $J_\pm$) *vérifie la relation*

$$S(\lambda; H, H_1) = Id - 2i\pi\Gamma_1(\lambda)\Big(T - TR(\lambda + i0)T\Big)\Gamma_1^*(\lambda), \tag{2.2.13}$$

*où* $\Gamma_1(\lambda)$ *est défini dans le Corollaire* 1.3.12 *et* $T = T^*$ *est défini par* (2.1.56).

**Preuve** Dans ce cas les identifications pour $t \to \pm\infty$ coïncident avec l'identité, donc dans la formule (1.1.10) on a $\Omega_+(\lambda) = I$ et $J_+^* T_- = T_+^* = T_- = T$ ce qui mène formellement à (2.2.13). Il reste à justifier (2.2.13) en vérifiant les hypothèses du théorème 1.1.10. Pour cela il suffit de prendre pour $p = \rho_0/2 > 1/2$

$$T = K_0^* B K_0, \quad K_0 = \begin{pmatrix} \langle x\rangle^{-p} \\ \langle x\rangle^{-p} D_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{2,k} \\ B_{2,k} & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$T = K^* K_0, \quad K = \begin{pmatrix} B_1 \langle x\rangle^{-p} + \sum_{k=1}^d D_k \langle x\rangle^{-p} B_{2,k} \\ D_k \langle x\rangle^{-p} B_{2,k} \end{pmatrix}.$$

où les opérateurs $B_1, B_{2,k}, k = 1, \ldots, d$, sont définis dans (2.1.57) et (2.1.58) et sont bien bornés. Les hypothèses du théorème 1.1.10 sont vérifiées grâce au principe d'absorption limite et à la proposition 1.3.11. □

Via le théorème de multiplication on obtient une représentation de la matrice de diffusion $S(\lambda; H, H_0)$ donnée par (1.1.19).

### 2.2.2 Analyse des singularités de $S(\lambda; H, H_0)$

Maintenant on peut commencer l'analyse des singularités de la matrice de la diffusion. La première étape consiste à ramener l'étude de $S(\lambda; H, H_0)$ à celle de $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ via le théorème de multiplication 1.1.11. Pour cela on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.2.5** *Sous les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *l'opérateur* $S(\lambda; H, H_1) - Id$ *est compact.*

**Preuve** d'après la proposition 2.2.4

$$S(\lambda; H, H_1) - Id = -2i\pi\Gamma_1(\lambda)\Big(T - TR(\lambda + i0)T\Big)\Gamma_1^*(\lambda),$$

où la perturbation $T$ est définie par (2.1.57). D'après le théorème 1.3.7 et le corollaire 1.3.12 les opérateurs $\Gamma_1(\lambda)\langle x\rangle^{-p}$ et $\langle x\rangle^{-p} R(\lambda + i0)\langle x\rangle^{-p}$ étant compact pour $p > 1/2$ on obtient facilement la compacité de $S(\lambda; H, H_1) - Id$ en utilisant le décomposition (1.1.14).□

A partir de la proposition 1.1.12 on déduit facilement la proposition

**Proposition 2.2.6** *Supposons que les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *soient vérifiées et soit* $S(\lambda; H, H_0)$ *la matrice de diffusion pour le couple* $H_0, H$. *Alors la matrice de diffusion* $S(\lambda; H, H_0)$ *est continue en norme pour tout* $\lambda > 0$ *et l'opérateur* $S(\lambda; H, H_0) - S(\lambda; H_1, H_0)$ *est un opérateur compact sur* $\mathfrak{N}$.

Maintenant notre but est d'isoler la partie principale, à des termes compacts près, de la matrice de la diffusion $S(\lambda; H_1, H_0)$ à partir de sa représentation stationnaire (2.2.5). On rappelle que $T_\pm^{(r)} \in \mathcal{C}^{-1-\epsilon}(\tilde{\Phi}_\pm)$, $T_\pm^{(s)} \in \mathcal{C}^{-1}(\tilde{\Phi}_\pm)$ a pour symbole $t_\pm^{(s)}$ défini par (2.1.43). On décompose l'opérateur $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ comme suit

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= S_0(\lambda) + S_1(\lambda) + S_2(\lambda), && (2.2.14)\\ S_0(\lambda) &= -2\pi i \Gamma_0(\lambda) J_+^* T_-^{(s)} \Gamma_0^*(\lambda), && (2.2.15)\\ S_1(\lambda) &= -2\pi i \Gamma_0(\lambda) J_+^* T_-^{(r)} \Gamma_0^*(\lambda), && (2.2.16)\\ S_2(\lambda) &= 2\pi i \Gamma_0(\lambda) T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \Gamma_0^*(\lambda). && (2.2.17) \end{aligned}$$

Les termes (2.2.15) à (2.2.17) dépendent du choix des fonctions de troncature $\zeta_\pm$ ainsi que du degré d'approximation de l'équation eiconale mais, d'après les remarques 2.1.6 et 2.1.18, leur somme (2.2.14) n'en dépend pas puisque les opérateurs d'onde ne dépendent pas de ces choix. C'est cette liberté dans le choix des paramètres qui rend la représentation (2.2.5) particulièrement flexible à l'usage.

On commence par l'étude du terme $S_2(\lambda)$. Celui-ci peut être considéré comme un "reste" négligeable dans la formule (2.2.5) comme le montre la proposition suivante.

**Lemme 2.2.7** *L'opérateur* $S_2(\lambda)$ *défini par* (2.2.17) *est compact sur* $\mathfrak{N}$ *et continu en norme par rapport à* $\lambda > 0$. *De plus son noyau* $\mathrm{s}_2(\omega, \omega'; \lambda)$ *est une fonction* $C^n(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ *si* $n < (N_t + 1)\epsilon - d + 1$.

**Preuve** D'après le lemme 2.2.2, pour $l = 1$, on peut écrire que

$$S_2(\lambda) = 2\pi i \Big( \Gamma_0(\lambda) \langle x \rangle^{-p} \Big) \Big( \langle x \rangle^p T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \langle x \rangle^p \Big) \Big( \langle x \rangle^{-p} \Gamma_0^*(\lambda) \Big), \qquad (2.2.18)$$

pour $p = 1/2 + \epsilon/4 \in (1/2, 1/2 + (N_t + 1)\epsilon/2)$. Comme $\langle x \rangle^p T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \langle x \rangle^p$ est borné et continu en norme par rapport à $\lambda > 0$, on conclut grâce à la proposition 1.2.21 qui affirme que $\Gamma(\lambda) \langle x \rangle^p$ est compact et continu en norme pour $\lambda > 0$.

On peut en plus obtenir des résultats de régularité sur le noyau de $S_2(\lambda)$ en utilisant les résultats du lemme 2.2.2 pour $l > 1$. En effet d'après (1.2.23), (1.2.24) et (2.2.17) le noyau de $S_2(\lambda)$ est formellement donné par la formule

$$\mathrm{s}_2(\omega, \omega'; \lambda) = \frac{i k^{d-2}}{2(2\pi)^{d-1}} \left( T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \psi_0(\cdot, k\omega'), \psi_0(\cdot, k\omega) \right)_{\mathcal{H}}, \quad k = \lambda^{1/2}, \qquad (2.2.19)$$

où $\psi_0(x, k\omega) = \exp(ik < x, \omega >)$. La formule (2.2.19) est automatiquement justifiée si le membre de droite de cette équation est continu en $\omega, \omega' \in \mathbb{S}^{d-1}, \lambda > 0$. Si on calcule les dérivées $\partial_\omega^\alpha \partial_{\omega'}^{\alpha'} \partial_\lambda^m \mathrm{s}_2(\omega, \omega'; \lambda)$ jusqu'à l'ordre $n$ on obtient que ces dérivées sont des sommes de termes de la forme

$$\Big(T_+^* R_1^l(\lambda + i0) T_- \psi_0^{(\beta')}(\cdot, k\omega'), \psi_0^{(\beta)}(\cdot, k\omega)\Big)_{\mathcal{H}} \tag{2.2.20}$$

où $\psi_0^{(\beta)}(x, k\omega) = x^\beta \psi_0(x, k\omega)$ et

$$|\alpha| + |\alpha'| + m = |\beta| + |\beta'| + l \leq n, \ |\beta| \geq |\alpha|, \ |\beta| \geq |\alpha|, \ l \leq m.$$

Comme $\langle x \rangle^{-|\beta|-p} \psi_0^{(\beta)}(x, k\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ si $p > d/2$ il suffit donc que $\langle x \rangle^{|\beta|+p} T_+^* R_1^l(\lambda + i0) T_- \langle x \rangle^{|\beta'|+p}$ soit borné pour que immédiatement la dérivée $\partial_\omega^\alpha \partial_{\omega'}^{\alpha'} \partial_\lambda^m \mathrm{s}_2(\omega, \omega'; \lambda)$ soit définie et continue. D'après le lemme 2.2.2 on aboutit à la condition $\max\{|\beta|, |\beta'|\} - d/2 < 1 + (N_t + 1)\epsilon/2 - l/2$ celle-ci est vérifiée si

$$(|\beta| + |\beta'| + 1 + l)/2 - d/2 < 1 + (N_t + 1)\epsilon/2,$$

pour tous les indices tels que $|\beta| + |\beta'| + l \leq n$, ce qui conclut la preuve. □

Pour l'opérateur $S_1(\lambda)$ on a seulement un résultat de compacité.

**Lemme 2.2.8** *L'opérateur $S_1(\lambda)$ défini par (2.2.17) est compact sur $\mathfrak{N}$ et continu en norme par rapport à $\lambda > 0$. Son noyau $\mathrm{s}_1(\omega, \omega'; \lambda)$ est une fonction $C^\infty$ en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$ pour tout $\lambda > 0$.*

**Preuve** Soit $p = 1/2 + \epsilon/4 > 1/2$, on décompose $S_1(\lambda)$ comme suit

$$S_1(\lambda) = 2\pi i \Big(\Gamma_0(\lambda) \langle x \rangle^{-p}\Big) \Big(\langle x \rangle^{-p} J_+ \langle x \rangle^p\Big)^* \Big(\langle x \rangle^p T_-^{(r)} \langle x \rangle^p\Big) \Big(\Gamma_0(\lambda) \langle x \rangle^{-p}\Big)^*, \tag{2.2.21}$$

les termes contenant $\Gamma_0(\lambda)$ sont bornés et continus en norme, par rapport à $\lambda > 0$, d'après la proposition 1.2.21, et les termes contenant les opd $J_+$ et $T_-^{(r)}$ sont bornés d'après la proposition 1.2.13. La régularité de $\mathrm{s}_1(\omega, \omega'; \lambda)$ en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$ découle de la proposition 1.2.24. □

On va maintenant s'intéresser au terme (2.2.15). Comme d'après (2.2.21) on a la décomposition suivante pour l'opérateur $J_+^* T_-^{(r)} = \langle x \rangle^{-p} (\langle x \rangle^{-p} J_+ \langle x \rangle^p)^* (\langle x \rangle^p T_-^{(r)} \langle x \rangle^p) \langle x \rangle^p$ avec $p > 1/2$ d'après le lemme 2.2.1 l'opérateur $J_+^* T_-^{(s)}$ admet une décomposition du type (2.1.42). Sa restriction à la sphère de rayon $k = \lambda^{1/2}$ est donc bien définie en tant qu'opérateur borné sur $\mathfrak{N}$ d'après les propositions 1.2.21 et 1.3.14. On peut aussi définir $S_0(\lambda)$ à partir de la proposition 1.2.26. En effet l'opérateur $S_0(\lambda)$ peut être regardé comme la restriction à la sphère $\mathbb{S}_k^{d-1}$ de l'opd (1.2.14) définie par $\tilde{\mathbf{S}}_0 = -2i\pi \mathcal{F} J_+^* T_-^{(s)} \mathcal{F}^*$. Cet opd $\tilde{\mathbf{S}}_0$ a pour amplitude $\mathbf{s}_0(x, \xi, \xi') = -2i\pi \overline{j_+(x, \xi)} t_-^{(s)}(x, \xi')$ et , d'après les équations (2.1.38) et (2.1.43), cette amplitude admet une décomposition du type (1.2.17)

$$\mathbf{s}_0(x, \xi, \xi') = -4\pi e^{i\Theta(x,\xi,\xi')} \zeta_+(x, \xi) < \xi', \nabla \zeta_-(x, \xi') > \psi(|\xi|^2) \psi(|\xi'|^2), \tag{2.2.22}$$

avec

$$\Theta(x,\xi,\xi') = \Phi_-(x,\xi') - \Phi_+(x,\xi). \tag{2.2.23}$$

Comme $\Theta$ ne vérifie pas les estimations de la classe $\tilde{\mathcal{S}}^{1-\rho}$ dans tout l'espace on doit utiliser la même astuce que dans la sous-section 2.1.2 pour que la théorie développée dans la sous-section 1.2.2 s'applique à l'opérateur $\tilde{\mathbf{S}}_0$. On remplace $\Theta$ dans (2.2.22) par une fonction

$$\tilde{\Theta}(x,\xi,\xi') = \Theta(x,\xi,\xi')\tilde{\zeta}_-(x,\xi')\tilde{\zeta}_+(x,\xi)$$

où $\tilde{\zeta}_\pm$ sont des fonctions de troncature définies par (2.1.36) qui valent respectivement 1 sur les supports de $\zeta_\pm$. Dans ce cas on peut remplacer le facteur oscillant dans (2.2.22) par $\exp(i\tilde{\Theta}(x,\xi,\xi')) = \exp(i\Theta(x,\xi,\xi'))$ sur le support de $\mathbf{s}_0(x,\xi,\xi')$, on obtient donc que $\tilde{\mathbf{s}}_0(x,\xi,\xi') \in \tilde{\mathcal{C}}^{-1}(\tilde{\Theta})$. Pour des raisons techniques on introduit l'opérateur $\tilde{\mathbf{A}}$ qui diffère de $\tilde{\mathbf{S}}_0$ seulement par des termes compacts.

**Lemme 2.2.9** *Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ l'opd de type* (1.2.14) *d'amplitude*

$$\mathbf{a}(x,\xi,\xi') = -2\pi e^{i\Theta(x,\xi,\xi')}\zeta_+(x,\xi) < \xi+\xi', \nabla\zeta_-(x,\xi') > \psi(|\xi|^2)\psi(|\xi'|^2) \tag{2.2.24}$$

*où $\Theta$ est défini par* (2.2.23)*. Alors les restrictions $S_0(\lambda)$ et $A(\lambda)$ de $\tilde{\mathbf{S}}_0$ et $\tilde{\mathbf{A}}$ à la sphère $\mathbb{S}_k^{d-1}$ existent et l'opérateur $S_0(\lambda) - A(\lambda)$ est compact. De plus les noyaux des opérateurs $S_0(\lambda)$ et $A(\lambda)$ sont de classe $C^\infty$ en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$.*

**Preuve** L'existence de $S_0(\lambda)$ et $A(\lambda)$ découle de la proposition 1.2.26, la régularité des noyaux en dehors de la diagonale est une conséquence de la proposition 1.2.24. La différence $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{S}}_0 - \tilde{\mathbf{A}}$ est un opd (1.2.14) d'amplitude

$$\mathbf{b}(x,\xi,\xi') = -2\pi e^{i\Theta(x,\xi,\xi')}\sigma_+(<\hat{x},\hat{\xi}>) < \xi'-\xi, \nabla\sigma_-(<\hat{x},\hat{\xi'}>) > \eta^2(x)\psi(|\xi|^2)\psi(|\xi'|^2).$$

Comme $\mathbf{b}(x,\xi,\xi) = 0$ l'opérateur $\tilde{\mathbf{B}}$ admet, d'après la proposition 1.2.18, la représentation (1.2.18) avec un symbole de la classe $\tilde{\mathcal{C}}^{-1-\rho}(\Theta_0)$ pour une phase $\Theta_0 \in \tilde{\mathcal{S}}^{1-\rho}$. En conséquence, par la proposition 1.2.19, sa restriction $B(\lambda)$ est un opérateur compact dans $\mathfrak{N}$. La régularité des noyaux de $S_0(\lambda)$ et $A(\lambda)$ découle de la proposition 1.2.24. $\square$

D'après le lemme 2.2.7 la régularité du noyau de $S_2(\lambda)$ peut être rendue arbitraire quitte à choisir des solutions de l'équation de transport "suffisamment" approché (i.e. $N_t$ assez grand). En tenant compte des lemmes 2.2.8 à 2.2.9 on obtient le théorème

**Théorème 2.2.10** *Soient $\chi_0, \chi_1 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ deux fonctions de troncature $C^\infty$ aux supports disjoints et $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ la matrice de diffusion pour le couple $H_1, H_0$ définie par* (2.2.5)*. Alors le noyau l'opérateur $\chi_0 S(\lambda)\chi_1$ appartient à $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}_+)$ et l'opérateur $\chi_0 S(\lambda)\chi_1$ est compact dans $\mathfrak{N} = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$.*

D'après le théorème 2.2.10 la singularité du noyau de $A(\lambda)$ est contenue dans un voisinage de la diagonale $\omega = \omega'$. Cette singularité détermine les propriétés spectrales de l'opérateur $A(\lambda)$ auxquelles on s'intéressera par la suite. En effet d'après le théorème 2.2.10 les termes dont le noyau est supporté loin de la diagonale ont un noyau $C^\infty$. Ces termes appartiennent donc à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt et sont en particulier des opérateurs compacts. D'après le théorème de Weyl ces termes n'influencent pas le spectre essentiel de l'opérateur $A(\lambda)$ ni celui de la matrice de la diffusion $S(\lambda)$. C'est pourquoi dans la suite on va se concentrer sur l'étude de l'opérateur $A_0(\lambda) = \chi_0 A(\lambda)\chi_0$ où $\chi_0$ est supporté dans un petit voisinage $\mathcal{V} = \{\omega \in \mathbb{S}^{d-1},\ |\omega - \omega_0| < \varepsilon\}$ d'un point $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ fixé et qui ne diffère de $\chi_0 S(\lambda)\chi_0$ que par des termes compacts.

Dans la suite on utilisera un système de coordonnées spécial $(y, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ défini par (voir Figure 1.1)

$$x = z(\omega + \omega')/2 + y/k, \quad < y, \omega_0 >= 0. \tag{2.2.25}$$

Le changement de variables entre un système de coordonnées orthonormé de $\mathbb{R}^d$ et celui défini par (2.2.25) se traduira dans les intégrales par l'apparition d'un déterminant Jacobien $dx = k^{d-1} < \omega + \omega', \omega_0 > /2dzdy$.

Si on appelle $\Sigma$ (voir Figure 1.1) la projection orthogonale de $\mathcal{V}$ sur $\Lambda_{\omega_0}$ et $\mathcal{U}$ l'application unitaire qui identifie $\mathbb{L}^2(\mathcal{V})$ à $\mathbb{L}^2(\Sigma)$ définie par (1.2.33), on peut, par la proposition 1.2.26, considérer l'opérateur $A_0^\varkappa(\lambda) = \mathcal{U}A_0(\lambda)\mathcal{U}^*$ comme un opd de type (1.2.14) sur $\Sigma$ d'amplitude

$$\mathbf{a}_0^\varkappa(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = \frac{\alpha_0(\zeta, \zeta')}{4\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}\left(z(\omega + \omega')/2 + y/k, k\omega, k\omega'\right) dz, \tag{2.2.26}$$

où l'on adopte les notations

$$\alpha_0(\zeta, \zeta') = \alpha(\zeta, \zeta')\chi_0(\varkappa(\zeta))\chi_0(\varkappa(\zeta')), \quad \omega = \varkappa(\zeta), \quad \omega' = \varkappa(\zeta') \tag{2.2.27}$$

avec $\varkappa$ et $\alpha$ données par (1.2.32) et (1.2.36). Avant de remplacer $\mathbf{a}$ par son expression (2.2.24) on remarque que si $\nabla\sigma_-(< \hat{x}, \omega' >) \neq 0$ alors d'après (2.2.1) $< \hat{x}, \omega' >\geq \varepsilon$. D'un autre coté pour $\omega, \omega' \in \mathcal{V}$ on a $|\omega - \omega'| < 2\varepsilon$. Ceci implique que $< \hat{x}, \omega >\geq -\varepsilon$ et conséquemment $\sigma_+(< \hat{x}, \omega >) = 1$ sur le support de support de $\nabla\sigma_-$. Donc la fonction $\zeta_+$ peut être omise dans (2.2.24). Maintenant comme $\mathbf{a}(x, k\omega, k\omega')$ est supportée dans la région $< \omega_0, \hat{x} >\geq 0,\ < \omega_0, \omega + \omega' >\geq 2 - \varepsilon^2 > 0$ on obtient pour $x = z(\omega + \omega')/2 + y/k$ que

$$z = 2 < x, \omega_0 > / < \omega + \omega', \omega_0 >\geq 0.$$

Finalement en tenant compte de ce que la fonction $\psi$ vaut 1 dans un voisinage du point $\lambda$ on arrive à

**Lemme 2.2.11** *Soit $A_0^\varkappa(\lambda)$ l'opd* (1.2.14) *sur $\Sigma$ d'amplitude*

$$\mathbf{a}_0^\varkappa(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = -\alpha_0(\zeta, \zeta') \int_0^{\infty} e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} < (\omega + \omega')/2, \nabla\zeta_-(x, k\omega) > dz, \tag{2.2.28}$$

*où $\alpha_0, \omega$ et $\omega'$ sont définis par* (2.2.27)*, $x$ par* (2.2.25) *et $\Theta$ par* (2.2.23)*. Soit $\mathcal{U}$ défini par* (1.2.33)*, alors l'opérateur $\mathcal{U}\chi_0 S(\lambda)\chi_0\mathcal{U}^* - A_0^\varkappa(\lambda)$ est compact.*

Une conséquence de ce lemme est que l'amplitude de l'opérateur $A_0^{\varkappa}(\lambda)$ contient la fonction de troncature $\zeta_-$ alors que la matrice de diffusion n'en dépend pas. Dans la prochaine section on va montrer qu'en fait, à des termes compacts près, $A_0^{\varkappa}(\lambda)$ ne dépend pas du choix de $\zeta_-$.

### 2.2.3 La partie principale de $S(\lambda; H, H_0)$

Dans cette section on va montrer que l'opd $A^{\varkappa}(\lambda)$ d'amplitude (2.2.28) est, à des termes compacts près, un opd avec une amplitude oscillante de type (1.2.17). Dans le cas où $A = 0$, $V_S = 0$ et $V_L$ vérifie (1.3.4) avec $\rho > 1/2$ ce résultat à été montré par Yafaev dans [Yaf98]. Dans ce cas particulier, la démonstration est grandement simplifiée par le fait qu'on puisse définir le symbole principal de $A(\lambda)$ en tant qu'opd sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. D'après (1.2.16) et (1.2.31) ce symbole principal est donné, en un point $(b, \omega) \in T^*\mathbb{S}^{d-1}$, $|b|/k \geq 2a$, $k = \sqrt{\lambda}$, par

$$\begin{aligned} a^{\flat}(b, \omega; \lambda) &= \frac{1}{4\pi k}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}(z\omega + b/k, k\omega, k\omega)dz \\ &= -\int_0^{\infty} e^{i\Theta(z\omega + b/k, k\omega, k\omega)}\partial_z\sigma_-(z)dz \\ &= \exp\left(i\Theta(b/k, k\omega, k\omega)\right), \end{aligned}$$

car $\Theta(z\hat{\xi}+y, \xi, \xi) = \Theta(y, \xi, \xi)$, ne dépend pas de $z$ (cf. remarque 2.1.3) et $\int_0^{\infty}\partial_z\sigma_-(z)dz = \sigma_-(\infty) - \sigma_-(0) = -1$ (voir section 2.1.2 pour la définition de $\sigma_{\pm}$). La généralisation de ce résultat au cas d'un $\rho > 0$ arbitraire est plus délicate.

Dans toute la suite on travaillera avec le système de coordonnées défini par (2.2.25) et on notera $\omega = \varkappa(\zeta), \omega' = \varkappa(\zeta'), k = \lambda^{1/2}$. Comme dans ce système on a

$$< (\omega + \omega')/2, \nabla\zeta_-(x, \xi) >= \partial_z\zeta_-(x, \xi)$$

et que $\zeta_-$ varie de 1 à 0 quand $z$ varie de 0 à l'infini on obtient en intégrant par parties dans (2.2.28)

$$\mathbf{a}_0^{\varkappa}(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = \alpha_0(\zeta, \zeta')\left(e^{i\Theta(y/k, k\omega, k\omega')} + \int_0^{\infty}\zeta_-(x, k\omega)\partial_z e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')}dz\right). \qquad (2.2.29)$$

Il faut maintenant montrer que le second terme dans le membre de droite de (2.2.29) est l'amplitude d'un opérateur compact. Pour simplifier les notations dans la suite on omettra les indices $\varkappa$ et $\lambda$. Soit $\tilde{\mathbf{A}}_1$ l'opd sur $\Sigma$ dont l'amplitude est le deuxième terme du second membre de (2.2.29)

$$\mathbf{a}_1(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta')\int_0^{\infty} e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} i < (\omega + \omega')/2, \nabla\Theta(x, k\omega, k\omega') > \zeta_-(x, k\omega)dz, \qquad (2.2.30)$$

On considère son noyau formellement défini par

$$\mathrm{p}(\zeta,\zeta') = \frac{\alpha_0(\zeta,\zeta')}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i<\zeta'-\zeta,y>} \int_0^\infty e^{i\Theta(x,k\omega,k\omega')} i < (\omega+\omega')/2, \nabla\Theta(x,k\omega,k\omega') > \zeta_-(x,k\omega) dz dy \tag{2.2.31}$$

Comme, à partir de (2.2.27) et (2.2.25), on a que

$$< \zeta'-\zeta, y > = < \omega'-\omega, y > = < k\omega' - k\omega, y/k > = < k\omega' - k\omega, x >$$

on peut réécrire cette intégrale oscillante[†] sous la forme

$$\mathrm{p}(\zeta,\zeta') = \frac{\alpha_1(\zeta,\zeta')}{(2\pi)^{d-1}} \int_{<x,\omega_0>\geq 0} e^{iG(x,k\omega,k\omega')} i < (\omega+\omega')/2, \nabla\Theta(x,k\omega,k\omega') > \zeta_-(x,k\omega) dx. \tag{2.2.32}$$

où

$$\alpha_1(\zeta,\zeta') = k^{1-d}\alpha_0(\zeta,\zeta')(< (\omega+\omega')/2, \omega_0 >)^{-1}, \tag{2.2.33}$$

et

$$G(x,\xi,\xi') = < \xi'-\xi, x > + \Theta(x,\xi,\xi'). \tag{2.2.34}$$

Si la phase $G(x,k\omega,k\omega')$ ne possédait pas de points stationnaires, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $< x,\omega_0 > \geq 0$ on ait

$$|\nabla_x G(x,k\omega,k\omega')| \geq c > 0,$$

il serait possible en intégrant par partie, modulo une hypothèse de décroissance des $\partial_x^\alpha G(x,\xi,\xi')$ quand $|x| \to \infty$, de donner un sens à l'intégrale oscillante (2.2.31). Ce sont donc les points critiques de $G$ qui posent problème pour définir le noyau p sauf si l'amplitude dans l'intégrale (2.2.32) s'annule en ces points. Par chance on se trouve quasiment dans cette situation.

**Lemme 2.2.12** *La fonction* (2.2.23) *vérifie l'égalité*

$$< \xi+\xi', \nabla\Theta(x,\xi,\xi') > = < \nabla G(x,\xi,\xi'), F(x,\xi,\xi') > + \mathbf{q}(x,\xi,\xi'), \tag{2.2.35}$$

*où $G$ est défini par* (2.2.34) *et les fonctions $F$ et $\mathbf{q}$ sont définies par*

$$F(x,\xi,\xi') = 2A(x) - \nabla\left(\Phi_-(x,\xi') + \Phi_+(x,\xi)\right), \tag{2.2.36}$$

$$\mathbf{q}(x,\xi,\xi') = \left(q_-^{(N_e)}(x,\xi') - q_+^{(N_e)}(x,\xi)\right). \tag{2.2.37}$$

*En particulier les fonctions $F$ et $\mathbf{q}$ vérifient dans la région $< \hat{x},\hat{\xi} > \geq -\kappa$, $< \hat{x},\hat{\xi}' > \leq \kappa$, pour tout $\kappa \in (0,1)$, et tout $\alpha,\beta$, les estimations*

$$|\partial_x^\alpha \partial_{\xi,\xi'}^\beta F(x,\xi,\xi')| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|x|)^{-\rho-|\alpha|} \tag{2.2.38}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_{\xi,\xi'}^\beta \mathbf{q}(x,\xi,\xi') \leq C_{\alpha,\beta}(1+|x|)^{-1-\epsilon-|\alpha|} \tag{2.2.39}$$

[†]Pour justifier les manipulations que l'on va faire sur le noyau (2.2.31) il faudrait "tester" le noyau $\mathrm{p}(\zeta,\zeta')$ contre une fonction $u(\zeta,\zeta') \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2(d-1)})$ et intégrer par parties par rapport à la variable $x$ jusqu'à obtenir des intégrales absolument convergentes. On omettra ces détails pour lesquels on renvoie le lecteur au chapitre 1 section 1 de [Shu87].

**Preuve** D'après (2.2.23) on a

$$\begin{aligned} <\xi+\xi', \nabla\Theta(x,\xi,\xi')> &= 2\,(<\xi', \nabla\Phi_-(x,\xi')> - <\xi, \nabla\Phi_+(x,\xi)>) \\ &\quad - <\xi'-\xi, \nabla\Phi_-(x,\xi') + \nabla\Phi_+(x,\xi)> . \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

Comme $\Phi_\pm$ sont solutions de l'équation eiconale (2.1.4), on a que

$$\begin{aligned} &2\,(<\xi', \nabla\Phi_-(x,\xi')> - <\xi, \nabla\Phi_+(x,\xi)>) \\ &\quad = q_-^{(N_e)}(x,\xi') - q_+^{(N_e)}(x,\xi) + |\nabla\Phi_+(x,\xi)|^2 - |\nabla\Phi_-(x,\xi')|^2 \\ &\qquad +2 <A(x), \nabla\Phi_-(x,\xi') - \nabla\Phi_+(x,\xi)> +2 <A(x), \xi'-\xi> . \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

En combinant (2.2.40) et (2.2.41) on obtient (2.2.35). Les estimations (2.2.38) et (2.2.39) sont des conséquences directes de (2.1.19) et (2.1.20). □

Maintenant en injectant (2.2.35) et (2.2.34) dans (2.2.31), on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(\zeta,\zeta') &= \frac{\alpha_1(\zeta,\zeta')}{2k(2\pi)^{d-1}} \int_{<x,\omega_0>\geq 0} e^{iG(x,k\omega,k\omega')} i\Big( <\nabla G(x,k\omega,k\omega'), F(x,k\omega,k\omega')> \\ &\qquad + \mathbf{q}(x,k\omega,k\omega')\Big)\zeta_-(x,k\omega)dx. \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Ensuite on intègre par parties le terme contenant $\nabla G$

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(\zeta,\zeta') &= \frac{\alpha_1(\zeta,\zeta')}{(2\pi)^{d-1}} \Big( -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{iG(y/k,k\omega,k\omega')} <F(y/k,k\omega,k\omega'), \omega_0> /(2k^d)dy \\ &\qquad + \int_{<x,\omega_0>\geq 0} e^{iG(x,k\omega,k\omega')} \tilde{\mathbf{q}}(x,k\omega,k\omega')dx \Big) , \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

où l'hyperplan $\Lambda_{\omega_0}$ a été identifié à $\mathbb{R}^{d-1}$ et

$$\tilde{\mathbf{q}}(x,\xi,\xi') = (2k)^{-1}\Big(i\ \mathbf{q}(x,\xi,\xi')\zeta_-(x,\xi) - \mathrm{div}_x\,(F(x,\xi,\xi')\zeta_-(x,\xi))\Big). \quad (2.2.44)$$

D'après les estimations (2.2.38) et (2.2.39), la fonction (2.2.44) vérifie, comme $\mathbf{q}$, l'estimation (2.2.39) dans la région $|x| \leq c$ ou $<\hat{x}, \hat{\xi}> \leq \kappa$, pour tout $\kappa \in (-1, 0)$. On obtient donc une décomposition de l'opd $\tilde{\mathbf{A}}_1$ d'amplitude (2.2.30) en deux opd $\tilde{\mathbf{A}}_2$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ d'amplitudes[†]

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2(y,\zeta,\zeta') &= -\alpha_1(\zeta,\zeta')e^{i\Theta(y/k,k\omega,k\omega')} <F(y/k,k\omega,k\omega'), \omega_0> /(2k^d), && (2.2.45) \\ \mathbf{k}(y,\zeta,\zeta') &= \alpha_0(\zeta,\zeta') \int_0^\infty e^{i\Theta(x,k\omega,k\omega')} \tilde{\mathbf{q}}(x,k\omega,k\omega')dz, && (2.2.46) \end{aligned}$$

où $\Theta$ est défini par (2.2.23). la compacité de $\tilde{\mathbf{A}}_2$ repose sur la proposition 1.2.19.

[†]La somme des amplitudes $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{k}$ n'est pas égale à $\mathbf{a}_1$ ce qui ne doit pas surprendre, au vu des manipulations faites sur le noyau p, puisque l'amplitude ne définit pas l'opérateur associé de manière intrinsèque (voir aussi le théorème 1.3 dans [Shu87] chapitre 1 section 3).

**Lemme 2.2.13** *L'opd* $\tilde{\mathbf{A}}_2$ *d'amplitude* (2.2.45) *appartient à la classe* $\tilde{\mathcal{C}}^{-\rho}(\Theta)$ *où* $\Theta = \Theta(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta), \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta'))$ *est donnée par* (2.2.23)*. En particulier, c'est un opérateur compact dans* $L_2(\Sigma)$*.*

**Preuve** Comme $< \hat{y}, \omega_0 >= 0$ on a $| < \hat{y}, \omega > | \leq \varepsilon$ et $| < \hat{y}, \omega' > | \leq \varepsilon$ pour $\omega, \omega' \in \mathcal{V}$. Ceci implique que l'estimation (2.2.38) est vérifiée par $\alpha_1(\zeta, \zeta') < F(y/k, k\omega, k\omega'), \omega_0 >$, et $\tilde{\mathbf{A}}_2$ appartient à $\tilde{\mathcal{C}}^{-\rho}(\Theta)$, en conséquence c'est un opérateur compact. □

La compacité de $\tilde{\mathbf{K}}$ repose essentiellement sur la proposition 1.2.25.

**Lemme 2.2.14** *l'opd* $\tilde{\mathbf{K}}$ *d'amplitude* (2.2.46) *est compact dans* $\mathbb{L}^2(\Sigma)$*.*

**Preuve** Soit $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\vartheta(t) = 0$ pour $t \leq 1/2$ et $\vartheta(t) = 1$ pour $t \geq 1$. On décompose $\tilde{\mathbf{q}}(x, \xi, \xi') = \tilde{\mathbf{q}}_0(x, \xi, \xi') + \tilde{\mathbf{q}}_1(x, \xi, \xi')$ où $\tilde{\mathbf{q}}_0(x, \xi, \xi') = \tilde{\mathbf{q}}(x, \xi, \xi')\vartheta(z)$ et $\tilde{\mathbf{q}}_1(x, \xi, \xi') = \tilde{\mathbf{q}}(x, \xi, \xi')(1 - \vartheta(z))$. Pour $\hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \mathcal{V}$ on peut remarquer que les fonctions $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1$, définies par (2.2.44), vérifient les estimations (2.2.39). On considère d'abord l'opérateur $\tilde{\mathbf{K}}_0$ d'amplitude

$$\mathbf{k}_0(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} \tilde{\mathbf{q}}_0(x, k\omega, k\omega') dz.$$

D'après (1.2.35) $\tilde{\mathbf{K}}_0$ est la restriction à $\mathbb{S}_k^{d-1}$ de l'opd (1.2.14) d'amplitude

$$\mathbf{h}_0(x, \xi, \xi') = 4\pi k \exp(i\Theta(x, \xi, \xi'))\tilde{\mathbf{q}}_0(x, \xi, \xi')\chi_0(\hat{\xi})\chi_0(\hat{\xi}').$$

Comme $\mathbf{h}_0 \in \tilde{\mathcal{C}}^{-1-\epsilon}(\tilde{\Theta})$, l'opérateur $\tilde{\mathbf{K}}_0$ est compact par la proposition 1.2.19.

Ensuite on considère l'opd $\tilde{\mathbf{K}}_1$ de type (1.2.14) sur $\Sigma$ et d'amplitude

$$\mathbf{k}_1(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta') \int_0^1 e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} \tilde{\mathbf{q}}_1(x, k\omega, k\omega') dz.$$

On réécrit cette expression de la manière suivante

$$\mathbf{k}_1(y, \zeta, \zeta') = e^{i\Theta(y/k, k\omega, k\omega')} \mathbf{h}_1(y, \zeta, \zeta'),$$

où

$$\mathbf{h}_1(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta') \int_0^1 e^{i(\Theta(x, k\omega, k\omega') - \Theta(y/k, k\omega, k\omega'))} \tilde{\mathbf{q}}_1(x, k\omega, k\omega') dz.$$

Comme $| < \hat{x}, \omega > | \leq 2\varepsilon, | < \hat{x}, \omega' > | \leq 2\varepsilon$, pour $\omega, \omega' \in \mathcal{V}$ on déduit de (2.1.19) et (2.2.23) que

$$\left| \partial_y^\alpha \partial_{\zeta, \zeta'}^\beta e^{i(\Theta(x, k\omega, k\omega') - \Theta(y/k, k\omega, k\omega'))} \right| = O\left( \langle y \rangle^{-\rho - |\alpha|} \right)$$

uniformément en $z \in [0, 1]$. En tenant compte des estimations (2.2.39) pour $\tilde{\mathbf{q}}_1(x, \xi, \xi')$ on obtient que $\mathbf{k}_1 \in \tilde{\mathcal{C}}^{-1-\rho-\epsilon}(\Theta)$. En conclusion l'opérateur $\tilde{\mathbf{K}}_1$ est compact. □

Le premier terme dans le membre de droite de (2.2.29) représente donc la partie non-compacte de $A_0^{\varkappa}(\lambda)$. comme d'après (1.2.36) le terme $\alpha(\zeta,\zeta) = 1$ on peut, d'après la proposition 1.2.18, éliminer ce facteur de la partie principale de $A_0^{\varkappa}(\lambda)$. Maintenant on peut énoncer le résultat principal de la thèse dans le théorème qui suit.

**Théorème 2.2.15** *Supposons que les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *sont vérifiées et que* $S(\lambda; H, H_0)$, $\lambda \in (0,\infty)$, *est la matrice de diffusion pour le couple* $H_0, H$ *avec identifications* $J_\pm$. *Soit* $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ *une fonction de troncature supportée dans un petit voisinage de* $\omega_0$, $S_0^{\varkappa}(\lambda)$ *l'opd* (1.2.14) *sur* $\Lambda_{\omega_0}$ *(l'hyperplan orthogonal à* $\omega_0$*) d'amplitude*

$$\mathbf{s}_0^{\varkappa}(y,\zeta,\zeta';\lambda) = \exp\left(i\Theta\left(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta), \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta')\right)\right)\chi_0(\varkappa(\zeta))\chi_0(\varkappa(\zeta')) \tag{2.2.47}$$

*où* $\varkappa$ *et* $\Theta$ *sont définis par* (1.2.32) *et* (2.2.23), *et* $\mathcal{U}$ *défini par* (1.2.33). *Alors l'opérateur* $\chi_0 S(\lambda; H, H_0)\chi_0 - \mathcal{U}^* S_0^{\varkappa}(\lambda)\mathcal{U}$ *est compact sur* $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$. *Si* $\chi_1$ *est une autre fonction de troncature telle que* $\operatorname{supp}\chi_0 \cap \operatorname{supp}\chi_1 = \emptyset$, *alors* $\chi_0 S(\lambda; H, H_0)\chi_1$ *est compact.*

**Remarque 2.2.16** D'après la preuve du lemme 2.2.11, la représentation (2.2.28) est encore vraie si l'intégrale sur $(0,\infty)$ est remplacée par la même intégrale mais sur l'intervalle $(-\delta,\infty)$ pour un $\delta \in (0,\varepsilon)$. Alors, d'après la preuve du théorème 2.2.15 on obtient à la place de (2.2.47) l'expression

$$\mathbf{s}_0^{\varkappa}(y,\zeta,\zeta';\lambda) = e^{i\Theta\left(\lambda^{-1/2}y - \delta(\varkappa(\zeta)+\varkappa(\zeta'))/2, \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta), \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta')\right)}\chi_0(\varkappa(\zeta))\chi_0(\varkappa(\zeta')). \tag{2.2.48}$$

pour l'amplitude de l'opérateur $S_0^{\varkappa}(\lambda)$. D'après le théorème 2.2.15, la différence entre (2.2.47) et (2.2.48) doit être l'amplitude d'un opérateur compact. On peut le vérifier par un calcul direct en remarquant que

$$\Theta\left(y/k - \delta(\varkappa(\zeta)+\varkappa(\zeta'))/2, k\varkappa(\zeta), k\varkappa(\zeta')\right) - \Theta\left(y/k, k\varkappa(\zeta), k\varkappa(\zeta')\right) \in \tilde{\mathcal{S}}^{-\rho}.$$

## 2.3 Propriétés spectrales de $S(\lambda; H, H_0)$

Dans cette dernière section on va utiliser le résultat du théorème 2.2.15 pour l'étude des propriétés spectrales de la matrice de diffusion $S(\lambda)$. L'objectif est de généraliser le résultat de [Yaf98] où il est démontré que le spectre de $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité pour des potentiels électrostatiques $V$ homogènes de degré $-\rho$ avec $\rho \in (1/2, 1]$ (et $A = 0$). Ce résultat reste vrai pour la plupart des potentiels électromagnétiques asymptotiquement homogènes de degré $-\rho$, $\rho \in (0,1)$. Par contre, on verra que le cas critique $\rho = 1$, dans (1.3.4), peut donner lieu à d'autres comportements.

### 2.3.1 Le spectre essentiel dans le cas $\rho < 1$

Commençons par définir la fonction

$$\mathbf{V}(x,\xi) = 2^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(V_L(t\xi) - V_L(x+t\xi) + 2 < A_L(x+t\xi) - A_L(t\xi), \xi >\Big)dt. \qquad (2.3.1)$$

qui sera l'objet central de toute cette section. La fonction $\mathbf{V}$ joue le rôle de partie principale de la fonction $\Theta$ définie par (2.2.23). D'après la remarque 2.1.3, il est clair que cette fonction ne dépend pas de la projection de $x$ sur la direction $\hat{\xi}$.

**Théorème 2.3.1** *Supposons que les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *soient satisfaites et que pour un certain point* $(x_0, k\omega_0) \in \mathbb{R}^{2d}$, $< x_0, \omega_0 >= 0$, *la fonction* (2.3.1) *vérifie les estimations*

$$|\mathbf{V}(\tau x_0, k\omega_0))| \geq c\tau^{1-\rho}, \quad |\nabla \mathbf{V}(\tau x_0, k\omega_0))| \geq c\tau^{-\rho}, \quad \rho \in (0,1), \quad \tau \to +\infty. \qquad (2.3.2)$$

*Alors le spectre de la matrice de la diffusion* $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ *coïncide, pour tout* $\lambda > 0$, *avec le cercle unité* $\mathbb{T}$.

**Preuve** Il découle des équations (2.1.10), (2.1.13), (2.1.14), (2.2.23) et (2.3.1) que

$$\Theta(x,\xi,\xi) - \mathbf{V}(x,\xi) = \sum_{n=2}^{N}\left(\Phi_-^{(n)}(x,\xi) - \Phi_+^{(n)}(x,\xi)\right),$$

donc d'après l'estimation (2.1.18) on obtient pour tout $\alpha$

$$|\partial_x^\alpha\left(\Theta(x,\xi,\xi) - \mathbf{V}(x,\xi)\right)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{1-2\rho-|\alpha|},$$

pour $| < \hat{x}, \hat{\xi} > | \leq \kappa$, $\kappa \in (0,1)$. Si $x = \tau x_0$, $\xi = k\omega_0$ et $< x_0, \omega_0 >= 0$, pour $\tau \to +\infty$ on arrive à

$$|\Theta(\tau x_0, k\omega_0, k\omega_0)| \geq C\tau^{1-\rho}, \quad |\nabla\Theta(\tau x_0, k\omega_0, k\omega_0)| \geq C\tau^{-\rho}. \qquad (2.3.3)$$

Si maintenant on choisit la fonction de troncature $\chi_0$ dans le théorème 2.2.15 telle que $\chi_0(\omega_0) = 1$, on peut appliquer la proposition 1.2.20 à l'opérateur $S_0^{\varkappa}(\lambda)$ et obtenir que son spectre essentiel recouvre le cercle unité†. Soit $u_n$ une suite de Weyl pour $S_0^{\varkappa}(\lambda)$ associée à $\mu \in \mathbb{T}$, alors $f_n = \mathcal{U}^* u_n$ est une suite de Weyl pour $\chi_0 S(\lambda)\chi_0$. Comme d'après la proposition 1.2.20 le support de $f_n$ "s'écrase" au point $\omega_0$, donc on peut choisir la fonction de troncature $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ supportée sur l'ensemble où $\chi_0$ vaut 1 de telle sorte que $\chi_0 f_n = \chi_1 f_n = f_n$ pour $n$ grand. Ce choix conduit à l'estimation

$$\|S(\lambda)f_n - \mu f_n\| \leq \|\chi_0 S(\lambda)\chi_0 f_n - \mu f_n\| + \|(1-\chi_0)S(\lambda)\chi_1 f_n\|. \qquad (2.3.4)$$

†On remarquera ici que par rapport à l'énoncé de la proposition 1.2.20 la dimension d'espace est $d-1$

Comme supp $(1-\chi_0)\cap$supp $\chi_1 = \emptyset$, d'après le théorème 2.2.15, l'opérateur $(1-\chi_0)S(\lambda)\chi_1$ est compact le membre de droite de (2.3.4) tend vers zéro quand $n$ tend vers l'infini. En conséquence, le spectre de la matrice de diffusion recouvre le cercle unité. Comme $S(\lambda)$ est unitaire son spectre coïncide avec $\mathbb{T}$. $\square$

**Remarque 2.3.2** Le théorème 2.3.1 ne donne aucune information sur la nature du spectre de $S(\lambda)$. Si les potentiels $A$ et $V$ sont radiaux, ce spectre est constitué de valeurs propres qui par le théorème 2.3.1 sont denses sur le cercle unité [Yaf98]. Dans le cas du potentiel de Coulomb, le calcul des valeurs propres de $S(\lambda)$ peut être trouvé dans [Yaf97].

**Remarque 2.3.3** Lorsque $\rho > 1/2$ on peut définir le symbole principal de l'opd $S_0(\lambda)$ défini par (2.2.15). D'après le théorème 2.2.15, et surtout (2.2.47), ce symbole, défini sur $T^*\mathbb{S}^{d-1}$ modulo $\mathcal{S}^{-1}(T^*\mathbb{S})$, vaut

$$s_0^\flat(b,\omega;\lambda) = \exp(i\Theta(b/k, k\omega, k\omega)) = \exp(i\mathbf{V}(b/k, k\omega)),\ \ \omega \in \mathbb{S}^{d-1}, < b, \omega >= 0,\ \ k = \lambda^{1/2}. \tag{2.3.5}$$

Dans ce cas il suffit de montrer que $|\Theta(b/k, k\omega, k\omega)| \to \infty$ quand $|b| \to \infty$ pour obtenir que le spectre essentiel de $S(\lambda)$ recouvre $\mathbb{T}$. Dans l'hypothèse (2.3.2) la seconde inégalité est une condition purement technique due à l'utilisation des classes de symboles oscillants (cf. [Yaf00a]).

**Remarque 2.3.4** Si $A_L(x)$ et $V_L(x)$ sont des fonctions asymptotiquement homogènes d'ordre $-\rho$ alors les fonctions

$$\begin{aligned} 2^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(V_L(t\xi) - V_L(x+t\xi)\Big)dt &= C_V(\hat{x},\hat{\xi})|\xi|^{-1}|x|^{1-\rho}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} < A_L(x+t\xi) - A_L(t\xi), \xi > dt &= C_A(\hat{x},\hat{\xi})|x|^{1-\rho}, \end{aligned}$$

sont homogènes en $x$ de degré $1-\rho$. Si on arrive à vérifier que $C_V(\hat{x},\hat{\xi}) \neq 0$ ou $C_A(\hat{x},\hat{\xi}) \neq 0$ pour un certain couple de points $x, \xi$ alors la fonction (2.3.1) vérifie la condition (2.3.2).

Sous les hypothèses de la proposition 2.1.19 les conclusions du théorème 2.2.15 restent encore vraies pour la matrice de diffusion définie en terme des opérateurs d'onde usuels.

**Proposition 2.3.5** *Supposons que les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7) *soient vérifiées avec* $V_L = 0$ *et* $\rho > 1/2$ *et qu'en plus* $A_L$ *vérifie la condition de jauge transverse* (19). *Si de plus la fonction* (2.3.1) *vérifie l'estimation* (2.3.2) *pour un point* $(x_0, \omega_0)$, $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, $< x_0, \omega_0 >= 0$. *Alors le spectre de la matrice de diffusion* $S(\lambda)$ *recouvre le cercle unité* $\mathbb{T}$ *pour tout* $\lambda > 0$.

On peut donner un exemple explicite de potentiel vérifiant les hypothèses de la proposition 2.3.5. En dimension $d = 2$, pour le potentiel $A(x) = |x|^{-1-\rho}(-x_2, x_1)$, $\rho \in (1/2, 1)$ la fonction (2.3.1) s'exprime pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$ par

$$\mathbf{V}(x, \xi) = \pm v_0 |x|^{1-\rho}, \quad v_0 = \int_{\mathbb{R}} \langle s \rangle^{-1-\rho} \, ds > 0, \quad < x, \xi >= 0,$$

selon que $\hat{\xi}$ est obtenu à partir de $\hat{x}$ par rotation d'angle $\pm\pi/2$. En conséquence, la condition (2.3.2) est bien vérifiée. Cet exemple peut se généraliser facilement aux dimensions supérieures.

**Remarque 2.3.6** La proposition 2.3.5 contredit un résultat de Nicoleau. Le théorème 2 dans [Nic94] affirme que $S(\lambda) - Id$ est compact sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.3.5. Ce résultat est incompatible avec le fait que le spectre essentiel de $S(\lambda)$ recouvre cercle unité. Outre le contre-exemple cité plus haut il faut bien garder à l'esprit que le résultat de la proposition 2.3.5 est assez général pour les potentiels vérifiant (1.3.4) puisque d'après la remarque 2.3.4 elle doit être vérifiée pour la plupart des potentiels homogènes.

### 2.3.2 Le cas $\rho = 1$

Désormais on considère le cas $\rho = 1$ pour lequel le théorème 2.3.1 ne s'applique pas. D'après la remarque 2.3.3 il suffit de trouver le spectre essentiel de l'opd $S_0(\lambda)$, de symbole principal (2.3.5), pour identifier, via le théorème de Weyl, celui de $S(\lambda; H, H_0)$. Ceci revient en fait à trouver l'ensemble de valeurs prises par la fonction $\mathbf{V}(x, \xi)$ pour $< x, \xi >= 0$ (cf. proposition 1.2.28). Contrairement au cas $\rho = 1$ on va voir qu'on peut obtenir ici des situations très variées pour le spectre de $S(\lambda; H, H_0)$.

On commence par le cas où $A_L = 0$. La fonction (2.3.1) s'écrit alors

$$\mathbf{V}(x, \xi) = \frac{1}{2|\xi|} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big( V_L(t\hat{\xi}) - V_L(x + t\hat{\xi}) \Big) dt.$$

Pour des potentiels $V_L$ asymptotiquement homogènes de degré $-1$ $V_L(x) = v(\hat{x})/|x|$, $|x| \geq R > 0$ il a été montré dans [Yaf98] que la fonction $\mathbf{V}(x, \xi)$ admet, pour $< x, \xi >= 0$, l'asymptotique

$$\mathbf{V}(x, \xi) = (2|\xi|)^{-1} \Big( \mathbf{v}(\hat{\xi}) \ln |x| + \nu(\hat{\xi}, \hat{x}) + \nu_1(\hat{\xi}) \Big), \quad |x| \geq R > 0 \tag{2.3.6}$$

où

$$\nu(\hat{\xi}, \hat{x}) = \int_{|t|\geq 1} \left( \frac{v(\hat{\xi})}{|t\hat{\xi}|} - \frac{v\left(\widehat{x+t\hat{\xi}}\right)}{|x+t\hat{\xi}|} \right) dt - \int_{|t|\leq 1} \frac{v\left(\widehat{x+t\hat{\xi}}\right)}{|x+t\hat{\xi}|} dt, \tag{2.3.7}$$

$$\nu_1(\hat{\xi}) = \int_{-R}^{R} V_L(t\hat{\xi})dt - \mathbf{v}(\hat{\xi}) \ln R, \quad \mathbf{v}(\hat{\xi}) = v(\hat{\xi}) + v(-\hat{\xi}). \tag{2.3.8}$$

En particulier, la fonction $\mathbf{V}(x,\xi)$ a une croissance logarithmique quand $|x| \to +\infty$ si il existe $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\mathbf{v}(\omega) \neq 0$. D'après la remarque 2.3.3 ceci suffit à montrer que dans ce cas le spectre de $S(\lambda; H, H_0)$ recouvre le cercle unité $\mathbb{T}$. Pour le potentiel de Coulomb $V(x) = c/|x|$, $|x| \geq R > 0$, on a bien $\mathbf{v}(\omega) \neq 0$ $\forall \omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ et les conclusions du théorème 1.2.20 restent vraies [Yaf98].

Pour que $\mathbf{v}(\omega) = 0$, $\forall \omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ il faut que $V_L(-x) = -V_L(x)$ pour $|x|$ assez grand, c'est ce qu'on appelle un potentiel de type dipolaire$^\dagger$. Dans ce cas la fonction $\mathbf{V}(x,\xi)$ ne tend pas vers l'infini quand $|x| \to \infty$ d'après (2.3.6) et est déterminée par les deux coefficients $\nu, \nu_1$ définis par (2.3.7) et (2.3.8). La proposition suivante décrit, sur un exemple type, les résultats qu'on obtient dans cette situation.

**Proposition 2.3.7** *Soit $H = (D-A)^2 + V$ vérifiant les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.5) *avec $A_L = 0$, et*

$$V_L(x) = \gamma < x, n > /|x|^2, \quad |x| \geq R > 0, \quad n \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \gamma > 0. \tag{2.3.9}$$

*Si on note $[m, M]$ l'intervalle de valeurs prises par la fonction $\nu_1$ donnée par* (2.3.8) *alors le spectre essentiel de la matrice de diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ est donné par*

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \left\{ e^{i\nu} \in \mathbb{C} : \nu \in \left[ \frac{m-\gamma\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{M-\gamma\pi}{2\sqrt{\lambda}} \right] \cup \left[ \frac{m+\gamma\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{M+\gamma\pi}{2\sqrt{\lambda}} \right] \right\}. \tag{2.3.10}$$

*En particulier le spectre de $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité si $\lambda \leq ((M-m)/4\pi)^2$.*

**Preuve** Pour démontrer ce résultat il suffit d'identifier l'intervalle de valeurs prises à "l'infini" par la fonction $\mathbf{V}$, d'après (2.3.6) on doit donc calculer les coefficients $\mathbf{v}, \nu, \nu_1$ de ce développement asymptotique. Comme d'après (2.3.9) on a $V_L(-x) = -V_L(x)$ pour $|x| \geq R$ ce qui impose que $\mathbf{v}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$. La fonction $\nu_1(\omega) = \int_{-R}^{R} V_L(t\omega)dt$ est une fonction continue de $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$, l'image de $\mathbb{S}^{d-1}$ par cette fonction est donc un certain intervalle compact $[m, M] \subset \mathbb{R}$. Il reste à calculer la fonction $\nu(\omega, \hat{x})$ ce qui est assez simple vu la forme explicite du potentiel (2.3.9) :

$^\dagger$Nommément le terme dipolaire désigne les potentiels de la forme $V(x) = |x-a|^{-1} - |x+a|^{-1} = O(|x|^{-2})$ qui sont donc à courte portée.

$$\begin{aligned}
\nu(\omega,\hat{x}) &= \int_{|t|\geq 1}\frac{\gamma t<\omega,n>}{|t|^2}-\frac{\gamma<x+t\omega,n>}{|x|^2+t^2}dt-\int_{|t|\leq 1}\frac{\gamma<x+t\omega,n>}{|x|^2+t^2}dt\\
&= \gamma<\omega,n>\left(\int_{|t|\geq 1}\frac{|x|^2}{|t|(t^2+|x|^2)}dt-\int_{|t|\leq 1}\frac{t}{t^2+|x|^2}dt\right)-\int_{\mathbb{R}}\frac{\gamma<x,n>}{t^2+|x|^2}dt\\
&= -\gamma\pi<\hat{x},n>+2<\hat{x},n>\arctan(|x|^{-1})+\gamma\frac{<\omega,n>}{|x|^2}\int_{|t|\geq|x|}(|t|\langle t\rangle^2)^{-1}dt.
\end{aligned}$$

En particulier modulo des termes compacts $S(\lambda)$ est un opd sur $\mathbb{S}^{d-1}$ de symbole principal

$$s_0(b,\omega;\lambda)=\exp\left(i(\nu_1(\omega)-\gamma\pi<\hat{b},n>)/2\sqrt{\lambda}\right). \tag{2.3.11}$$

En utilisant la proposition 1.2.24 et le théorème de Weyl on obtient que le spectre essentiel de $S(\lambda)$ coïncide avec l'intervalle (2.3.10). Si la longueur des intervalles qui composent le spectre (2.3.10) est supérieure à $2\pi$, i.e. $(M-m)/2\sqrt{\lambda}\geq 2\pi$ alors le spectre de $S(\lambda)$ recouvre $\mathbb{T}$. $\square$

**Remarque 2.3.8** Dans le cas des potentiels de type dipolaire, comme la fonction $\mathbf{V}(x,\xi)$ est homogène de degré -1 en $\xi$, il existe forcément un seuil critique pour l'énergie $\lambda$ au dessous duquel le spectre de $S(\lambda)$ recouvre $\mathbb{T}$. La valeur $\lambda\leq((M-m)/4\pi)^2$ donnée dans la proposition 2.3.7 n'est pas optimale. Si $V_L(-x)=-V_L(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ alors $\nu_1\equiv 0$ et le spectre essentiel de $S(\lambda)$ est constitué de seulement deux points $\exp(\pm i\gamma\pi/2\sqrt{\lambda})$ qui peuvent être confondus si $\gamma\in 2\sqrt{\lambda}\mathbb{Z}$ et valent 1 si $\gamma\in 4\sqrt{\lambda}\mathbb{Z}$.

On passe maintenant au cas magnétique $V_L=0$. La fonction (2.3.1) se réduit dans ce cas à

$$\mathbf{V}(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}}<A_L(x+t\hat{\xi})-A_L(t\hat{\xi}),\hat{\xi}>dt. \tag{2.3.12}$$

Contrairement au cas électrique cette fonction est homogène de degré 0 en $\xi$ et le spectre essentiel de la matrice de diffusion ne dépendra pas de l'énergie. Pour commencer on va se concentrer sur le cas de la dimension $d=2$ avec des potentiels de type (40) introduit par Aharonov et Bohm [AB59]. D'après la proposition 2.1.19 les opérateurs d'onde usuels $W_\pm(H,H_0)$ existent et sont complets. En particulier la matrice de diffusion $S(\lambda)=S(\lambda;H,H_0)$ pour le couple $H_0,H$ est définie en terme de ces opérateurs d'onde usuels. Le spectre essentiel de $S(\lambda)$ est alors décrit par la proposition suivante.

**Théorème 2.3.9** *Soit* $H=(D-A)^2+V$ *vérifiant les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.5) *avec* $V_L=0$ *et*

$$A_L(x)=f(\vartheta)(-x_2,x_1)/|x|^2,\ |x|\geq R>0, \tag{2.3.13}$$

*où* $\vartheta$ *est l'angle polaire associé à* $x$ *et* $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *est une fonction* $2\pi$*-périodique. Posons*

$$g(u)=\int_{u-\pi}^{u}f(v)dv \tag{2.3.14}$$

*(qui est aussi $2\pi$-périodique), alors, pour tout $\lambda > 0$, la partie principale de la matrice de diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ est un opd sur $\mathbb{S}$ de symbole principal*

$$\exp\left(i\frac{\omega_2 x_1 - \omega_1 x_2}{|x|} g(\theta)\right), \quad |x| \geq R > 0, \tag{2.3.15}$$

*et le spectre essentiel de $S(\lambda)$ est donné par*

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \{e^{i\nu} \in \mathbb{C} : \pm\nu \in g(\mathbb{R})\}. \tag{2.3.16}$$

**Preuve** Comme le potentiel (2.3.13) vérifie la condition de jauge transverse on obtient que

$$\mathbf{V}(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} < A_L(x + t\hat{\xi}), \hat{\xi} > dt. \tag{2.3.17}$$

On va donc calculer explicitement la fonction $\mathbf{V}(x, \omega)$ pour $< x, \omega >= 0$ et identifier l'ensemble des valeurs prises par cette fonction. Comme $\mathbf{V}(x, -\omega) = -\mathbf{V}(x, \omega)$ il suffit de calculer la fonction $\mathbf{V}$ pour $(x, \omega)$ vérifiant $x_1\omega_2 - x_2\omega_1 = |x| \geq 0$. Si on appelle $\theta$ l'angle polaire associé à $\omega$ en injectant (2.3.13) dans (2.3.17) on obtient

$$\mathbf{V}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\vartheta_t) \frac{|x|}{|x|^2 + t^2} dt,$$

où

$$\vartheta_t = \theta - \pi/2 + \arctan(t/|x|),$$

est l'angle polaire associé au point $x + t\omega$ (voir Figure 2.2). Si on fait le changement de variables $t \to \vartheta_t$ comme $d\vartheta/dt = |x|/(|x|^2 + t^2)$ et en tenant compte de (2.3.14) on arrive à

$$\mathbf{V}(x, \omega) = \int_{\theta-\pi}^{\theta} f(\vartheta) d\vartheta = g(\theta), \quad |x| \geq R > 0.$$

Maintenant pour une orientation relative quelconque de $x$ et $\omega$ on trouve que $\exp(i\mathbf{V}(x, \omega))$ est bien donné par (2.3.15). L'intervalle de valeurs prises par la fonction $\mathbf{V}(x, \omega) = \pm g(\vartheta)$ coïncide avec l'ensemble

$$I = \{\nu \in \mathbb{R} : \nu \in g(\mathbb{R})\} \cup \{\nu \in \mathbb{R} : -\nu \in g(\mathbb{R})\}.$$

La proposition 2.3.9 découle donc directement de la proposition 1.2.28 puisque d'après la remarque 2.3.3 la partie principale de $S(\lambda)$ est un opd de symbole principal asymptotiquement homogène de degré 0 égal à $\exp(i\mathbf{V}(b/k, k\omega))$. $\square$

Pour un choix particulier de la fonction $f$ dans (2.3.13) on peut calculer explicitement la fonction (2.3.14) et donner des exemples où le spectre essentiel de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ est un sous ensemble strict du cercle unité $\mathbb{T}$.

**Corollaire 2.3.10** *Soit $H = (D - A)^2 + V$ vérifiant les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.5) *avec $V_L = 0$ et $A_L$ vérifiant* (2.3.13) *où*

$$f(\vartheta) = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{\varphi}{2} cos\vartheta. \tag{2.3.18}$$

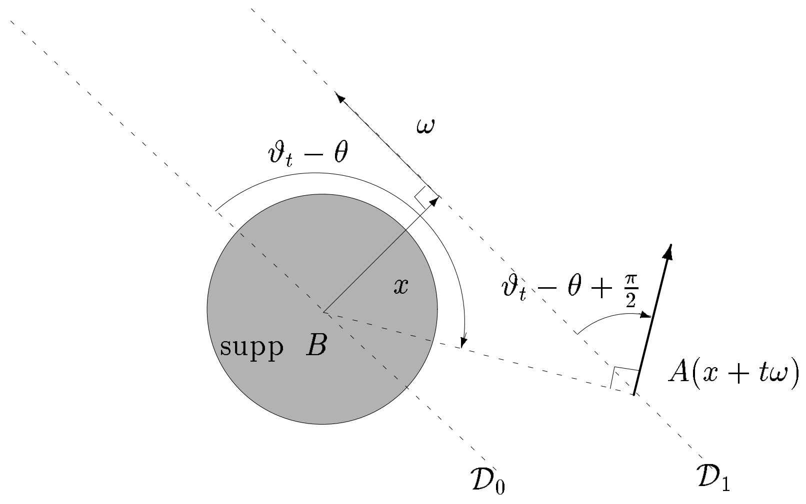


FIG. 2.2: Calcul de $\mathbf{V}$ pour le potentiel de Aharonov-Bohm en dimension 2

*Alors, pour tout $\lambda > 0$, le spectre essentiel de la matrice de diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ est donné par*

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \{e^{i\nu} \in \mathbb{C} : \nu \in [-\phi/2 - \varphi, -\phi/2 + \varphi] \cup [\phi/2 - \varphi, \phi/2 + \varphi]\}. \qquad (2.3.19)$$

*En particulier si $f(\vartheta) = \phi/2\pi$ alors pour tout $\lambda > 0$*

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \{\exp(i\phi/2), \exp(-i\phi/2)\}.$$

**Preuve** Pour la fonction (2.3.18) on obtient d'après (2.3.14) que $g(u) = \phi/2 + \varphi \sin u$ donc les valeurs prises par $g$ coïncident avec l'intervalle $[\phi/2 - \varphi, \phi/2 + \varphi]$ (où $\{\phi/2\}$ dans le cas $\varphi = 0$). Une application directe de la proposition 2.3.9 conduit à (2.3.19). $\square$

**Remarque 2.3.11** Si $\varphi \in (0, \pi/2)$ alors (2.3.19) est un sous ensemble strict de $\mathbb{T}$. Si $\varphi = 0$ le corollaire 2.3.10 généralise le résultat connu dans le cas où $V = 0$ et $A$ est le potentiel de Aharonov-Bohm (40) que le spectre de $S(\lambda)$ est constitué de deux valeurs propres $\exp(\pm i\phi/2)$ de multiplicité infinie [Hen80, Rui83] qui sont confondues si $\phi \in 2\pi\mathbb{Z}$ et valent 1 si de plus $\phi \in 4\pi\mathbb{Z}$.

Le type de comportement spectral de $S(\lambda)$ exhibé dans la proposition 2.3.10 n'est en rien spécifique à la dimension $d = 2$ comme le montre l'exemple suivant[†] en dimension $d = 3$.

[†]On pourra trouver une analyse très récente de l'effet Aharonov-Bohm, étudié du point de la formule de Van-Vleck, par Bily et Robert dans [BR01].

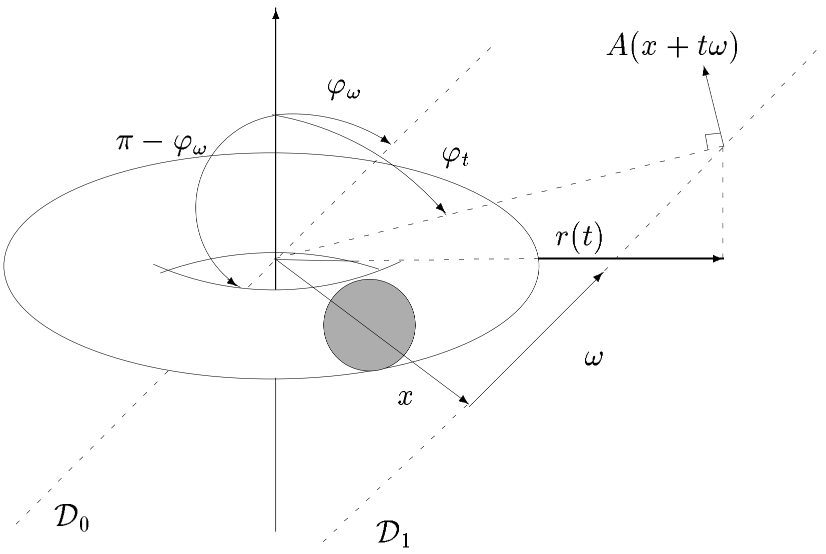


FIG. 2.3: Calcul de $\mathbf{V}$ pour le potentiel (2.3.20) en dimension 3

**Proposition 2.3.12** *Soit $H = (D-A)^2 + V$ vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.5) avec $V_L = 0$ et $A_L$ vérifiant*

$$A_L(x) = \frac{f(\varphi)}{|x|^2}\left(-\frac{x_1x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, -\frac{x_2x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right), \quad |x| \geq R > 0, \tag{2.3.20}$$

*où $\varphi$ est la colatitude associée à $x$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ est une fonction $\pi$-périodique positive. Si on note $\tilde{S}$ l'opérateur de multiplication par la fonction*

$$\exp\left(i\int_{\varphi_\omega}^{\pi-\varphi_\omega} f(\varphi)d\varphi\right), \tag{2.3.21}$$

*$\varphi_\omega$ étant la colatitude associée à $\omega$, alors l'opérateur $S(\lambda; H, H_0) - \tilde{S}$ est compact. En particulier si on appelle*

$$\phi = \int_0^\pi f(\varphi)d\varphi, \tag{2.3.22}$$

*alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\sigma_{ess}(S(\lambda; H, H_0)) = \{e^{i\nu} \in \mathbb{C} : \nu \in [-\phi, \phi]\}. \tag{2.3.23}$$

**Preuve** Calculons la fonction (2.3.17) pour $x \in \mathbb{R}^3$, $\omega \in \mathbb{S}^2$ et $< x, \omega >= 0$. Dans la suite on note $\varphi_t$ la colatitude associée au point $x(t) = x + t\omega$, $\varphi_\omega$ celle associée à $\omega$ et

$r(t) = ((x_1+t\omega_1)^2 + (x_2+t\omega_2)^2)^{1/2}$ (cf. Figure 2.3). D'après (2.3.20) un premier calcul nous donne

$$\begin{aligned}
< A_L(x+t\omega), \omega > &= \frac{f(\varphi_t)}{|x+t\omega|^2 r(t)} \left\langle (-x_1(t)x_3(t), -x_2(t)x_3(t), r^2(t)), \omega \right\rangle \\
&= \frac{f(\varphi_t)}{|x+t\omega|^2 r(t)} \left\langle -x_3(t)\ (x+t\omega) + (0,0,|x+t\omega|^2), \omega \right\rangle \\
&= \frac{f(\varphi_t)}{r(t)} \left( \omega_3 - \frac{(x_3+t\omega_3)t}{|x+t\omega|^2} \right) \\
&= \frac{f(\varphi_t)}{r(t)} \frac{\omega_3|x|^2 - tx_3}{|x+t\omega|^2}.
\end{aligned}$$

D'un autre coté on a

$$\sin\varphi_t = r(t)/|x+t\omega|, \quad \cos\varphi_t = (x_3+t\omega_3)/|x+t\omega|,$$

d'où l'on tire que

$$-\sin\varphi_t \frac{d\varphi_t}{dt} = \frac{\omega_3}{|x+t\omega|} - \frac{t(x_3+t\omega_3)}{|x+t\omega|^3},$$

puis

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = \frac{1}{r(t)} \frac{tx_3 - \omega_3|x|^2}{|x+t\omega|^2}.$$

Ce qui permet de faire le changement de variable $t \to \varphi_t$ dans (2.3.17) et d'obtenir

$$\mathbf{V}(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} < A_L(x+t\omega), \omega > dt = \int_{\varphi_\omega}^{\pi-\varphi_\omega} f(\varphi)d\varphi.$$

La fonction $\mathbf{V}$ ne dépend donc pas de $x$ et la partie principale de $S(\lambda)$, qui d'après la remarque 2.3.3 est l'opd de symbole principal $\exp(i\mathbf{V}(b/k, k\omega))$, se réduit à l'opérateur de multiplication par (2.3.21). Comme la fonction $f$ est positive et en tenant compte de (2.3.22) on obtient que l'image de $T^*\mathbb{S}^2$ par $\mathbf{V}$ coïncide avec l'intervalle $[-\phi, \phi]$. La proposition 1.2.28 conduit alors à (2.3.23). □

### 2.3.3 La section efficace

Dans cette dernière section on va déterminer le terme principal de la singularité diagonale du noyau $\mathrm{s}(\omega,\omega';\lambda)$ de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ quand $|\omega-\omega'| \to 0$, pour la famille de potentiels magnétiques (2.3.13). Nous en déduirons des résultats sur la section efficace différentielle

$$\Sigma_{diff}(\omega,\omega';\lambda) = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} |\mathrm{s}(\omega,\omega';\lambda)|^2, \quad \omega \neq \omega', \tag{2.3.24}$$

et la section efficace totale (3). Dans le cas particulier de la dimension $d=2$ la matrice de diffusion agissant dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S})$ il est naturel de représenter cet opérateur comme agissant sur les fonctions $2\pi$-périodiques (i.e. d'exprimer son noyau en fonction des angles polaires $\vartheta$ et $\vartheta'$ de $\omega$ et $\omega'$) plutôt que dans le système de coordonnées locales défini par (1.2.32) (cf. Figure 1.1). Soit $\omega_0$ une direction d'angle polaire $\vartheta_0$, le lien entre les angles polaires $\vartheta,\vartheta'$ et les variables $\zeta,\zeta'$ est donné par les formules

$$\zeta=\sin(\vartheta-\vartheta_0),\quad \zeta'=\sin(\vartheta'-\vartheta_0),$$

Soient maintenant $u,v\in C^\infty(\mathbb{S})$ supportées dans un petit voisinage de $\omega_0$ le lien entre ces deux représentations peut être exprimé de la manière suivante

$$\begin{aligned}(S(\lambda)u,v)_{\mathfrak{N}} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{s}^{\varkappa}(\zeta,\zeta';\lambda)\mathcal{U}u(\zeta')\overline{\mathcal{U}v(\zeta)}d\zeta d\zeta' \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{s}(\vartheta,\vartheta';\lambda)u(\vartheta')\overline{v(\vartheta)}d\vartheta d\vartheta'\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{s}(\vartheta,\vartheta';\lambda)=\mathrm{s}^{\varkappa}(\zeta,\zeta';\lambda)\left(1-|\zeta|^2\right)^{-1/4}\left(1-|\zeta'|^2\right)^{-1/4}. \tag{2.3.25}$$

Les résultats sont formulés avec ces conventions dans les deux théorèmes suivants.

**Théorème 2.3.13** *Soient $H=(D-A_L)^2$ avec $A_L$ vérifiant* (2.3.13)*, $S(\lambda)$ la matrice de diffusion pour le couple $H_0,H$ et $S_{AB}$ un opérateur sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S})$ ayant pour noyau*

$$\mathrm{s}_{AB}(\vartheta,\vartheta_0)=\frac{e^{ig(\vartheta)}+e^{-ig(-\vartheta)}}{2}\delta(\theta)-\frac{e^{ig(\vartheta)}-e^{-ig(-\vartheta)}}{2i\pi}\mathrm{P.V.}\frac{1}{\sin\theta} \tag{2.3.26}$$

*où $\theta=\vartheta-\vartheta_0$, $\delta$ est la masse de Dirac et* P.V. *désigne la valeur principale. Alors l'opérateur $S(\lambda)-S_{AB}$ est Hilbert-Schmidt pour tout $\lambda>0$, et on a pour $\vartheta\neq\vartheta_0$, $\vartheta\to\vartheta_0$ l'estimation uniforme en $\vartheta_0$*

$$|\mathrm{s}(\vartheta,\vartheta_0;\lambda)-\mathrm{s}_{AB}(\vartheta,\vartheta_0)|=O\left(|\ln|\theta||\right). \tag{2.3.27}$$

**Preuve** On décompose $\tilde{S}(\lambda)=\tilde{S}_1(\lambda)+S_2(\lambda)$ avec

$$\tilde{S}_1(\lambda)=-2i\pi\Gamma_0(\lambda)J_+^*T_-\Gamma_0^*(\lambda), \tag{2.3.28}$$

et $S_2(\lambda)$ donné par (2.2.17). D'après le lemme 2.2.7 le noyau de $S_2(\lambda)$ ne contribue pas à la singularité diagonale du noyau $\mathrm{s}(\vartheta,\vartheta';\lambda)$ de la matrice de diffusion (quitte à résoudre l'équation de transport (2.1.24) avec un nombre suffisant d'étapes $N_t$). En particulier $S_2(\lambda)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Intéressons nous maintenant à $\tilde{S}_1(\lambda)$. D'après la proposition 1.2.24 cet opérateur possède un noyau $C^\infty$ en dehors de la diagonale, il suffit donc d'étudier ce qui se passe au voisinage de cette dernière. Si $\chi_0$ est une fonction de troncature supportée dans un petit voisinage de $\omega_0 \in \mathbb{S}$, $\chi(\omega) = 1$ pour $|\omega - \omega_0|$ assez petit, $\varkappa$ et $\mathcal{U}$ sont définis par (1.2.32) et (1.2.33), alors on peut, grâce à (2.3.25), relier le noyau $\mathrm{p}_1^{\varkappa}$ de $\mathcal{U}\chi_0\tilde{S}_1(\lambda)\chi_0\mathcal{U}^*$ à celui $\mathrm{p}_1$ de $\tilde{S}_1(\lambda)$ par

$$\mathrm{p}_1(\vartheta, \vartheta_0; \lambda) = \left(1 - |\zeta|^2\right)^{-1/4} \mathrm{p}_1^{\varkappa}(\zeta, 0),$$

où $\vartheta$ et $\vartheta_0$ sont les angles polaires associés à $\varkappa(\zeta)$ et $\omega_0$. Il est facile d'extraire la partie principale de $\mathrm{p}_1^{\varkappa}$ en considérant l'opérateur $\mathcal{U}\chi_0\tilde{S}_1(\lambda)\chi_0\mathcal{U}^*$ comme un opd de type (1.2.14) sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème 2.2.15, la remarque 2.3.3 et l'équation (2.3.15), on peut calculer explicitement son "symbole" principal, modulo des termes asymptotiquement homogènes de degré -1. En tenant compte de ce que $\mathbf{V}(y, \omega) = g(\vartheta)$ et $\mathbf{V}(-y, \omega) = -\mathbf{V}(-y, -\omega) = -g(-\vartheta)$ on obtient que

$$\tilde{s}_0(y, \zeta; \lambda) = e^{ig(\vartheta)} h(y) + e^{-ig(-\vartheta)} h(-y),$$

où $\vartheta$ est l'angle polaire associé à $\omega = \varkappa(\zeta)$, $g$ est la fonction définie par (2.3.14) et $h$ est la fonction de Heaviside. Il suffit donc de calculer la transformée de Fourier de $\tilde{s}_0(y, \zeta; \lambda)$ en variable $y$ prise au point $\zeta$. Puisque la transformée de Fourier de $h$ est

$$\widehat{h}(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\zeta) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{P.V.}\frac{1}{\zeta}, \tag{2.3.29}$$

que

$$|\vartheta - \vartheta_0| = O\left(|\zeta|\right), \quad (1 - |\zeta|^2)^{-1/4} = 1 + O\left(|\vartheta - \vartheta_0|^2\right)$$

et que d'après le lemme 1.2.29 les termes asymptotiquement homogènes de degré -1 dans le symbole de $\tilde{S}_1(\lambda)$ contribuent à la singularité diagonale du noyau au plus comme un $O\left(|\ln|\theta||\right)$. On peut affirmer grâce à l'équation (2.3.25)

$$|\mathrm{p}_1(\vartheta, \vartheta_0; \lambda) - \mathrm{s}_{AB}(\vartheta, \vartheta_0)| = O\left(|\ln|\theta||\right). \tag{2.3.30}$$

On obtient la même estimation pour s puisque la contribution de $S_2(\lambda)$ est bornée. $\square$

**Théorème 2.3.14** *Soient $H = (D - A_L)^2$ avec $A_L$ vérifiant* (2.3.13), *$S(\lambda)$ la matrice de diffusion pour le couple $H_0, H$. Alors pour $\omega \neq \omega_0$, $\omega \to \omega_0$ et tout $\lambda > 0$ on a l'estimation uniforme en $\omega_0$*

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2\left(\left(g(\vartheta) + g(-\vartheta)\right)/2\right)}{\sin^2(\theta/2)} + O\left(\frac{|\ln|\theta||}{|\theta|}\right), \tag{2.3.31}$$

*où $\vartheta$ est l'angle polaire associé à $\omega$, $2\sin(\theta/2) = |\omega - \omega_0| \neq 0$. En particulier la section efficace totale*

$$\Sigma_{tot}(\omega; \lambda) = \int_{\mathbb{S}} \Sigma_{diff}(\omega, \omega'; \lambda) d\omega' \tag{2.3.32}$$

*diverge sauf si $g(\vartheta) + g(-\vartheta)$ est un multiple de $2\pi$ auquel cas*

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = O\left(|\ln|\theta||^2\right). \tag{2.3.33}$$

**Preuve** D'après la définition de la section efficace différentielle (2.3.24) au premier ordre d'approximation celle-ci est déterminé par le carré de (2.3.26) où l'on a négligé la masse de Dirac (supportée sur la diagonale). En tenant compte du reste on obtient

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \frac{2\sin^2\left(\left(g(\vartheta) + g(-\vartheta)\right)/2\right)}{\sin^2(\theta)} + O\left(\frac{|\ln|\theta||}{|\theta|}\right).$$

Comme

$$\frac{2}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{2\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{2\sin^2(\theta/2)} + O(1),$$

on a bien obtenu (2.3.31). Si $\sin((g(\vartheta) + g(-\vartheta))/2) = 0$ alors pour $\omega \neq \omega_0$ on a en repartant de (2.3.26) et (2.3.27) $\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = O(|\ln|\theta||^2)$. Cette quantité étant intégrable la section totale (2.3.32) est finie. Si par contre $\sin((g(\vartheta) + g(-\vartheta))/2) \neq 0$ la singularité dominante $O(|\theta|^{-2})$ sur la diagonale n'est pas intégrable et la quantité (2.3.32) diverge.□

En particulier pour le potentiel (40) on a $g(\vartheta) = \phi/2$ ce qui permet de retrouver les résultats connus pour la section efficace [AB59, Hen80, Rui83].

**Corollaire 2.3.15** *Soient $H = (D - A_L)^2$, $A_L$ vérifiant (40), et $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$. Alors pour $\omega \neq \omega_0$, $\omega \to \omega_0$ et tout $\lambda > 0$ on a l'estimation uniforme en $\omega_0$*

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2(\phi/2)}{\sin^2(\theta/2)} + O\left(\frac{|\ln|\theta||}{|\theta|}\right), \tag{2.3.34}$$

*où $\vartheta$ est l'angle polaire associé à $\omega$, $2\sin(\theta/2) = |\omega - \omega_0| \neq 0$. En particulier la section efficace totale diverge sauf si $\phi$ est un multiple de $2\pi$.*

**Remarque 2.3.16** Les asymptotiques (2.3.2) et (2.3.34) sont conservées si on ajoute au hamiltonien $H$ un terme électrique à courte portée $V_S$ vérifiant (1.3.5) avec un $\rho_0 > 2$.

**Remarque 2.3.17** Lorsque $\rho \in (0,1)$ on peut obtenir une asymptotique de la singularité diagonale de $s(\omega, \omega'; \lambda)$ par une méthode de phase stationnaire comme dans [Yaf98, Yaf00b].

# APPENDICE : Le principe d'absorption limite pour $H$.

Comme on l'a signalé dans la remarque 1.3.9, le Principe d'absorption limite pour $H$ ne peut pas être obtenu de la même manière que pour $H_1$ si on n'a pas $\rho_0 \geq 2$ dans l'hypothèse (1.3.5). Cependant la méthode de Mourre permet quand même d'établir le principe d'absorption limite pour $H$ à condition de remplacer l'hypothèse iv) de la définition 1.1.13 par une condition un peu plus faible†, précisément on demande que $\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)B_2f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}$ soit borné pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On procède ici de la même manière que dans [Yaf85] (où il était supposé que $A = 0$) et [GY00] (où c'est l'opérateur de Dirac qui était considéré). La difficulté supplémentaire par rapport à ces deux travaux vient de la structure plus complexe de la partie courte portée (non différentiable) de la perturbation $-DA_S - A_SD + 2 < A_S, A_L > +|A_S|^2 + V_S$ qui n'est plus un opérateur de multiplication. Ces difficultés sont cependant facilement surmontées dans la proposition A.3.

Commençons par fixer quelques notations pour la suite. On se donne deux intervalles

$$\Lambda_{2\delta} \subset \Lambda_\delta = (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (0, \infty), \tag{A.1}$$

avec $\lambda > 2\delta > 0$, et une fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$

$$\text{supp } f \subset \Lambda_{2\delta}, \quad f_{|\Lambda_\delta} = 1. \tag{A.2}$$

On supposera que les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) sont vérifiées avec $1 + \rho \leq \rho_0 < 2$. Si $\rho_0 \geq 2$ le principe d'absorption limite découle de toute façon directement de (1.1.24) et du lemme 1.3.24 d'après la remarque 1.3.9. Si éventuellement $\rho > \rho_0 - 1$ cela ne pose aucun problème de remplacer $\rho$ par $\rho_0 - 1$ dans l'hypothèse (1.3.4). On rappelle que sous ces hypothèses

$$B_1 = i[H, \mathcal{A}] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}), \quad M = f(H)B_1f(H) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}), \tag{A.3}$$

†Cette condition peut être rapprochée des conditions de régularité fractionnaire de la fonction $t \mapsto \exp(-it\mathcal{A})H\exp(it\mathcal{A})$, en $t = 0$, énoncées dans [ABdMG96].

et que de plus si on choisit $\delta$ assez petit on a d'après la proposition 1.3.4 (et en particulier l'inégalité (1.3.20)) que

$$M = f(H)B_1 f(H) \geq c f(H)^2. \tag{A.4}$$

Notre objectif est d'appliquer le lemme 1.1.18 à la famille d'opérateurs

$$F_\varepsilon(z) = K_\varepsilon G_\varepsilon(z) K_\varepsilon, \tag{A.5}$$

où

$$K_\varepsilon = \langle x \rangle^{-\sigma-1/2} / \langle \varepsilon x \rangle^{1/2-\sigma}, \; \sigma = r - 1/2 \in (0, 1/2), \tag{A.6}$$
$$G_\varepsilon(z) = (H - i\varepsilon M - z)^{-1}, \;\; \pm \operatorname{sgn}\varepsilon = \pm \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z > 0. \tag{A.7}$$

On doit donc récolter plusieurs estimations a priori pour établir (1.1.28). On commence par les plus classiques qui peuvent être tirées de [PSS81, Mou81, JMP84].

**Lemme A.1** *Pour tout* $\operatorname{Im} z, \varepsilon \in (0,1]$ *l'opérateur* $H - i\varepsilon M - z$ *est inversible et* $G_\varepsilon(z)$ *est continûment différentiable en* $\varepsilon$ *et continu pour* $\varepsilon \in [0,1]$. *De plus pour tout* $\operatorname{Re} z \in \Lambda_{\delta/2}, \operatorname{Im} z, \varepsilon \in (0,1]$ *on a les estimations*

$$\|G_\varepsilon(z)(f(H) - Id)(H+i)\| \leq c, \;\; \|G_\varepsilon(z) f(H)\| \leq c\varepsilon^{-1}, \tag{A.8}$$
$$\|(H+i)G_\varepsilon(z)\| + \|G_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon^{-1}. \tag{A.9}$$

*Pour tout opérateur* $Q$ *borné sur* $\mathcal{H}$ *et* $\varepsilon \in (0,1]$ *on a*

$$\|QG_\varepsilon(z)f(H)\| \leq c\varepsilon^{-1/2}\|QG_\varepsilon(z)Q\|^{1/2} \tag{A.10}$$

Les suivantes sont tirées de [Yaf85, GY00].

**Lemme A.2** *Pour tout* $\operatorname{Re} z \in \Lambda_{\delta/2}, \operatorname{Im} z, \varepsilon \in (0,1]$ *on a*

$$\|K_\varepsilon\| \leq 1, \;\; \|K_\varepsilon \langle x \rangle\| \leq c\varepsilon^{\sigma-1/2}, \;\; \left\|\tfrac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon}\right\| \leq c\varepsilon^{\sigma-1/2}, \tag{A.11}$$
$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)\langle x \rangle^s\| \leq c\varepsilon^{-1/2-s}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|)^{1/2}, \;\; s \in [0,1]. \tag{A.12}$$

**Preuve** La première inégalité de (A.11) découle de $\langle \varepsilon x \rangle^{1/2-\sigma} \geq 1$. Pour la seconde il suffit d'écrire que

$$K_\varepsilon \langle x \rangle = \frac{\langle x \rangle^{1/2-\sigma}}{\langle \varepsilon x \rangle^{1/2-\sigma}} \leq C \frac{1 + |x|^{1/2-\sigma}}{\langle \varepsilon x \rangle^{1/2-\sigma}} \leq C + C\frac{|x|^{1/2-\sigma}}{|\varepsilon x|^{1/2-\sigma}} \leq c\varepsilon^{1/2-\sigma}.$$

Pour la troisième les mêmes arguments fonctionnent après un calcul explicite de la dérivé

$$\frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon} = (1-2\sigma)\varepsilon|x|^2 \frac{\langle x \rangle^{-1/2-\sigma}}{\langle \varepsilon x \rangle^{3/2-\sigma}} \leq (1-2\sigma)\varepsilon \frac{\langle x \rangle^{3/2-\sigma}}{\langle \varepsilon x \rangle^{3/2-\sigma}} \leq c\varepsilon\varepsilon^{\sigma-3/2} = c\varepsilon^{\sigma-1/2}.$$

Pour l'égalité (A.12) un argument d'interpolation permet de restreindre la preuve aux cas $s=0$ et $s=1$. Pour le cas $s=0$ l'estimation

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z) f(H)(H+i)\| \leq C\varepsilon^{-1/2}\|F_\varepsilon(z)\|^{1/2},$$

découle de (A.10) avec $Q=K_\varepsilon$ et l'estimation

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(Id-f(H))(H+i)\| \leq C,$$

découle de (A.8) et (A.11). La somme de ces deux estimations donne l'inégalité recherchée pour $s=0$.

Pour le cas $s=1$ on cherche à montrer que

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)\langle x\rangle\| \leq c\varepsilon^{-3/2}(1+\|F_\varepsilon(z)\|)^{1/2}. \tag{A.13}$$

On commence par commuter $\langle x\rangle$ et $(H+i)$

$$K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)\langle x\rangle = K_\varepsilon G_\varepsilon(z)\langle x\rangle (H+i) + K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[H,\langle x\rangle].$$

Comme l'opérateur $[H,\langle x\rangle] \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_{-1})$ (cf. l'équation (1.3.26)) le second terme s'estime par (A.9) et (A.11)

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[H,\langle x\rangle]\| \leq \|G_\varepsilon(z)(H+i)\|\|(H+i)^{-1}[H,\langle x\rangle]\| \leq C\varepsilon^{-1}.$$

Maintenant on commute $\langle x\rangle$ et $G_\varepsilon(z)$

$$K_\varepsilon G_\varepsilon(z)\langle x\rangle (H+i) = K_\varepsilon \langle x\rangle G_\varepsilon(z)(H+i) + K_\varepsilon[G_\varepsilon(z),\langle x\rangle](H+i).$$

Le premier terme s'estime facilement par (A.9) et (A.11)

$$\|K_\varepsilon \langle x\rangle G_\varepsilon(z)(H+i)\| \leq \|K_\varepsilon \langle x\rangle\|\|G_\varepsilon(z)(H+i)\| \leq C\varepsilon^{\sigma+1/2}.$$

Le second terme se réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} K_\varepsilon[G_\varepsilon(z),\langle x\rangle](H+i) &= K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x\rangle, H-i\varepsilon M-z]G_\varepsilon(z)(H+i) \\ &= K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x\rangle, H]G_\varepsilon(z)(H+i) \\ &\quad -i\varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x\rangle, M]G_\varepsilon(z)(H+i). \end{aligned}$$

L'estimation du premier terme repose encore sur (1.3.26), (A.9), (A.11) et (A.12) pour $s=0$ (qui vient d'être démontrée)

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x\rangle, H]G_\varepsilon(z)(H+i)\| &\leq \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)\|\|(H+i)^{-1}[\langle x\rangle, H]\| \\ &\qquad \|G_\varepsilon(z)(H+i)\| \\ &\leq C\varepsilon^{-3/2}\|F_\varepsilon(z)\|^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour le second terme on va utiliser que

$$\begin{aligned}\varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x\rangle\,,M]G_\varepsilon(z)(H+i) &= \varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x\rangle\,,f(H)]B_1f(H)G_\varepsilon(z)(H+i)\\ &\quad+\varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)f(H)B_1[\langle x\rangle\,,f(H)]G_\varepsilon(z)(H+i)\\ &\quad+\varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)f(H)[\langle x\rangle\,,B_1]f(H)G_\varepsilon(z)(H+i).\end{aligned}$$

Les deux premiers termes s'estiment à partir de (A.3), (A.9), (A.12) pour $s=0$ et du lemme A.5

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x\rangle\,,f(H)]B_1f(H)G_\varepsilon(z)(H+i)\|\\ &\qquad\leq\varepsilon\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)\|\|(H+i)^{-1}[\langle x\rangle\,,f(H)]\|\|B_1f(H)\|\|G_\varepsilon(z)(H+i)\|\\ &\qquad\leq C\varepsilon^{-3/2}(1+\|F_\varepsilon(z)\|)^{1/2}.\end{aligned}$$

Il reste donc un ultime terme à estimer

$$\varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)f(H)[\langle x\rangle\,,B_1]f(H)G_\varepsilon(z)(H+i).$$

Pour ce faire nous allons d'abord calculer le commutateur $[\langle x\rangle\,,B_1]$. L'expression de $B_1$ est donnée par (1.3.15), ce qui conduit à

$$[\langle x\rangle\,,B_1]=2[\langle x\rangle\,,H]+\sum_{k=1}^{d}[\langle x\rangle\,,a_k(x)D_k]-[\langle x\rangle\,,[DA_S+A_SD-2A_LA_S-|A_S|^2-V_S,x.\nabla]].$$

Le premier terme s'estime toujours grâce à (1.3.26). Pour le second il est clair, d'après (1.3.12), que $[\langle x\rangle\,,a_k(x)D_k]=-ia_k(x)(\partial_k\langle x\rangle)$ est borné sur $\mathcal{H}$. Le troisième terme est un opérateur borné de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_{-1}$ car d'une part pour les termes sans dérivées $[\langle x\rangle\,,[V_S,x.\nabla]]=0$ et d'autre part pour ceux contenant des dérivées

$$\begin{aligned}[\langle x\rangle\,,[\nabla A_S,x.\nabla]] &= A_S(x).\nabla(x.\nabla\langle x\rangle)+d(A_S(x).\nabla\langle x\rangle)\\ &\quad+\nabla.\left(A_S(x)(x.\nabla\langle x\rangle)+x(A_S(x).\nabla\langle x\rangle)\right)\\ &= u(x)+\nabla w(x),\end{aligned}$$

avec $u(x)=O\left(\langle x\rangle^{-\rho_0}\right),w(x)=O(\langle x\rangle^{-(\rho_0-1)})$, d'après l'hypothèse (1.3.5). Au final d'après (A.9) et (A.12) (pour $s=0$) on obtient que

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)f(H)[\langle x\rangle\,,B_1]f(H)G_\varepsilon(z)(H+i)\|\\ &\qquad\leq\varepsilon\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)\|\|f(H)[\langle x\rangle\,,B_1]f(H)\|\|G_\varepsilon(z)(H+i)\|\\ &\qquad\leq C\varepsilon^{-1/2}(1+\|F_\varepsilon(z)\|)^{1/2}.\end{aligned}$$

Toutes ces estimations réunies conduisent à (A.13) ce qui prouve (A.12). □

Comme on l'a signalé dans la remarque 1.3.9 la condition iv) dans la définition 1.1.13 doit être légèrement affaiblie pour permettre l'obtention du principe d'absorption limite pour $H$. Le lemme suivant donne une hypothèse admissible qui remplacera celle sur le double commutateur $B_2$.

**Proposition A.3** *Soit $H$ défini par* (1.3.1) *avec $A$ et $V$ vérifiant les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7). *Alors pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ on a*

$$\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}(H+i)^{-1}[M,\mathcal{A}](H+i)^{-1}\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}), \tag{A.14}$$

*ce qui entraîne que*

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[M,\mathcal{A}]G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| \le c\varepsilon^{-2+\rho}(1+\|F_\varepsilon(z)\|). \tag{A.15}$$

**Preuve** Comme $\langle x\rangle^{\mp(1-\rho)/2}(H+i)^{-1}\langle x\rangle^{\pm(1-\rho)/2}$ est borné de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}_2$ (voir le lemme A.5) il suffit de montrer que $\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}[M,\mathcal{A}]\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}$ est borné de $\mathcal{H}_1$dans $\mathcal{H}_{-1}$. Si on décompose le commutateur de la manière suivante

$$\begin{aligned}\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}[M,\mathcal{A}]\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} &= \langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}(f(H)B_1[\mathcal{A},f(H)]\\ &\quad+[\mathcal{A},f(H)]B_1f(H)+f(H)[\mathcal{A},B_1]f(H))\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\end{aligned}$$

comme $[\mathcal{A},f(H)]$ est borné sur $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_2$, d'après le lemme A.6, il reste à montrer que

$$\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}f(H)[\mathcal{A},B_1]f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} \tag{A.16}$$

est borné de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_{-1}$. On utilise la décomposition $H=H_0+\tilde V_L+\tilde V_S$, avec

$$\tilde V_L = 2iA_L(x)\nabla + i\mathrm{div}A_L(x)+|A_L(x)|^2+V_L(x), \tag{A.17}$$

$$\tilde V_S = -DA_S(x)-A_S(x)D+|A_S(x)|^2+2A_S(x)A_L(x)+V_S(x), \tag{A.18}$$

de telle sorte que

$$i[[H,\mathcal{A}],\mathcal{A}] = 4H_0 + i[[\tilde V_L,\mathcal{A}],\mathcal{A}] + i[[\tilde V_S,\mathcal{A}],\mathcal{A}].$$

D'après (A.17) l'opérateur $i[[\tilde V_L,\mathcal{A}],\mathcal{A}]=\sum_{k=1}^d \tilde a_k(x)\partial_k+\tilde v(x)$ est un opérateur différentiel à coefficients réguliers vérifiant

$$|\partial^\alpha\tilde a_k(x)|+|\partial^\alpha\tilde v(x)| = O(\langle x\rangle^{-\rho-|\alpha|}).$$

En particulier l'opd $i[[\tilde V_L,\mathcal{A}],\mathcal{A}]$ est borné de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$, l'opérateur

$$\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}f(H)(4H_0+i[[\tilde V_L,\mathcal{A}],\mathcal{A}])f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}$$

est borné de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}_2$. Il reste à estimer les termes à courte portée

$$\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}f(H)[[\tilde V_S,\mathcal{A}],\mathcal{A}]f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}. \tag{A.19}$$

Pour ce terme on ne commute pas vraiment les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\tilde V_S$ mais on décompose comme suit

$$[[\tilde V_S,\mathcal{A}],\mathcal{A}] = \tilde V_S\mathcal{A}^2 - 2\mathcal{A}\tilde V_S\mathcal{A} + \mathcal{A}^2\tilde V_S. \tag{A.20}$$

Comme d'après (A.18) l'opérateur $\langle x\rangle^a \tilde V_S \langle x\rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})$, $a+b-\rho_0\le 0$, pour montrer que (A.19) est borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_{-1}$ il faut "sandwicher" $\tilde V_S$ par des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_1$, à droite, et $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}$, à gauche. Pour cela on utilise les lemmes A.5 et A.7. Le terme symétrique est dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1)$ si $1+\rho\le\rho_0$

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)\mathcal{A}\tilde V_S\mathcal{A}f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\\ &\quad=\left(\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)\mathcal{A}\langle x\rangle^{-\rho_0/2}\right)\left(\langle x\rangle^{\rho_0/2}\tilde V_S\langle x\rangle^{\rho_0/2}\right)\\ &\qquad\left(\langle x\rangle^{-\rho_0/2}\mathcal{A}f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\right)\end{aligned}$$

puisque les deux termes qui "sandwishent" $\langle x\rangle^{\rho_0/2}\tilde V_S\langle x\rangle^{\rho_0/2}$ sont alors dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1)$. Pour les termes non-symétriques on écrit on décompose $\tilde V_S=-A_SD+Q$ et on remarque que $\langle x\rangle^a Q\langle x\rangle^b\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_{-1})$ si $a+b-\rho_0\le 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)Q\mathcal{A}^2f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\\ &\quad=\left(\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)\langle x\rangle^{(1-\rho)/2}\right)\left(\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}Q\langle x\rangle^{1+\rho_0/2}\right)\\ &\qquad\left(\langle x\rangle^{-1-\rho_0/2}\mathcal{A}^2f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\right)\end{aligned}$$

est bien borné de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}_1$ si $1+\rho\le\rho_0$. Le dernier terme est lui aussi borné de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}_1$ si $1+\rho\le\rho_0$, mais on doit pour l'estimer utiliser une décomposition plus astucieuse

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)A_S(x)D\mathcal{A}^2f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\\ &\quad=\left(\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)\langle x\rangle^{(1-\rho)/2}\right)\left(\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}A_S(x)\langle x\rangle^{1+\rho_0/2}\right)\\ &\qquad\left(\langle x\rangle^{-1-\rho_0/2}D\mathcal{A}\langle x\rangle^{\rho_0/2}\right)\left(\langle x\rangle^{-\rho_0/2}\mathcal{A}f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\right).\end{aligned}$$

En effet ci-dessus l'opd $\langle x\rangle^{-1-\rho_0/2}D\mathcal{A}\langle x\rangle^{\rho_0/2}$ est bien borné de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}$ et le terme contenant $A_S$ est lui borné dans $\mathcal{H}$. De la même manière en posant $\tilde V_S=-DA_S+\tilde Q$ et en remarquant que $\langle x\rangle^a\tilde Q\langle x\rangle^b\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H})$ si $a+b-\rho_0\le 0$, $\langle x\rangle^{1+\rho/2}D\langle x\rangle^{-1-\rho/2}\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_{-1})$ et $\langle x\rangle^{1+\rho/2}A_S(x)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$, on obtient que les termes

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)\mathcal{A}^2\tilde Qf(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\\ &\quad=\left(\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)\mathcal{A}^2\langle x\rangle^{-1-\rho_0/2}\right)\left(\langle x\rangle^{1+\rho_0/2}\tilde Q\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\right)\\ &\qquad\left(\langle x\rangle^{(1-\rho)/2}f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)\mathcal{A}^2DA_S(x)f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\\ &\quad=\left(\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)\mathcal{A}^2\langle x\rangle^{-1-\rho_0/2}\right)\left(\langle x\rangle^{1+\rho/2}D\langle x\rangle^{-1-\rho/2}\right)\\ &\qquad\left(\langle x\rangle^{1+\rho/2}A_S(x)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\right)\left(\langle x\rangle^{(1-\rho)/2}f(H)\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\right).\end{aligned}$$

sont bornés de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}_1$ si $1+\rho \leq \rho_0$. Au final l'opérateur (A.16) est bien borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ si $1+\rho \leq \rho_0$ et (A.14) est bien vérifiée sous les hypothèses de la section 1.3.1. Maintenant d'après (A.12) et (A.14) on a

$$\begin{aligned}\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[M,\mathcal{A}]G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| &\leq \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)^{-1}\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\| \\ &\qquad \|\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}(H+i)^{-1}[M,\mathcal{A}](H+i)^{-1}\langle x\rangle^{-(1-\rho)/2}\| \\ &\qquad \|\langle x\rangle^{(1-\rho)/2}(H+i)G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| \\ &\leq c\varepsilon^{-2+\rho}(1+\|F_\varepsilon(z)\|),\end{aligned}$$

ce qui prouve (A.15). □

On peut maintenant démontrer le principe d'absorption limite sous des hypothèses minimales.

**Théorème A.4** *Soit $H$ défini par* (1.3.1) *avec $A$ et $V$ vérifiant les hypothèses* (1.3.2) *à* (1.3.7). *Alors pour tout intervalle $\Lambda \subset (0,\infty)$ disjoint de 0 on a l'estimation*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z\in\Lambda \\ 1\geq|\operatorname{Im} z|>0}} \|\langle x\rangle^{-p} R(z)\langle x\rangle^{-p}\| \leq c, \quad p>1/2. \tag{A.21}$$

*En particulier l'opérateur $\langle x\rangle^{-p}$, $p>1/2$, est $H$-lisse sur tout intervalle $\Lambda \subset (0,\infty)$ disjoint de 0.*

**Preuve** D'après le lemme 1.1.18 il suffit de vérifier l'hypothèse (1.1.28) pour $F_\varepsilon(z)$ définie par (A.5). L'estimation a priori $\|F_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon^{-1}$ découle directement de (A.9). Il faut maintenant vérifier l'estimation sur la dérivée $dF_\varepsilon(z)/d\varepsilon$. Pour cela on calcule cette dérivée

$$\frac{dF_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} = \frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon}G_\varepsilon(z)K_\varepsilon + K_\varepsilon G_\varepsilon(z)\frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon} + K_\varepsilon\frac{dG_\varepsilon(z)}{d\varepsilon}K_\varepsilon.$$

les deux premiers termes s'estiment directement par (A.11) et (A.12)

$$\left\|\frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon}\right\|(\|G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| + \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)\|) \leq c\varepsilon^{\sigma-1}(1+\|F_\varepsilon(z)\|).$$

Pour le troisième terme il faut d'abord calculer $dG_\varepsilon(z)/d\varepsilon$

$$\begin{aligned}\frac{dG_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} &= iG_\varepsilon(z)MG_\varepsilon(z) \\ &= iG_\varepsilon(z)(f(H)-Id)B_1f(H)G_\varepsilon(z) + iG_\varepsilon(z)B_1(f(H)-Id)G_\varepsilon(z) \\ &\quad -[\mathcal{A},G_\varepsilon(z)] - i\varepsilon G_\varepsilon(z)[M,\mathcal{A}]G_\varepsilon(z).\end{aligned}$$

D'après (A.3), (A.8), (A.11) et (A.12) on a que

$$\begin{aligned}\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(f(H)-Id)B_1f(H)G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| &\leq \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(f(H)-Id)\|\|B_1(H+i)^{-1}\| \\ &\qquad \|(H+i)G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| \\ &\leq c\varepsilon^{-1/2}(1+\|F_\varepsilon(z)\|),\end{aligned}$$

et de même pour $\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)B_1(f(H)-Id)G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\|$. D'après (A.11), (A.12) et (1.3.9)

$$\begin{aligned}\|K_\varepsilon[\mathcal{A},G_\varepsilon(z)]K_\varepsilon\| &\leq 2\|K_\varepsilon\langle x\rangle\|\|\langle x\rangle^{-1}\mathcal{A}(H+i)^{-1}\|\|(H+i)G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\|\\ &\leq c\varepsilon^{\sigma-1}(1+\|F_\varepsilon(z)\|).\end{aligned}$$

Enfin en tenant compte de la proposition A.3 et de toutes les estimations précédentes on obtient que

$$\left\|K_\varepsilon\frac{dG_\varepsilon(z)}{d\varepsilon}K_\varepsilon\right\|\leq c\varepsilon^{-a}(1+\|F_\varepsilon(z)\|),$$

et en conséquence

$$\left\|\frac{dF_\varepsilon(z)}{d\varepsilon}\right\|\leq c\varepsilon^{-a}(1+\|F_\varepsilon(z)\|),$$

pour un $a=\max\{1/2,1-\sigma,1-\rho\}\in(0,1)$. Le lemme 1.1.18 conduit donc à l'estimation $\|F_\varepsilon(z)\|\leq C$ uniforme en $z$ et en $\varepsilon$. En particulier pour $\varepsilon=0$ on récupère (A.21). □

On termine par la démonstration de quelques lemmes utilisés dans certaines preuves. Ces lemmes reposent sur le théorème de Stone-Weierstrass selon une méthode bien connue (cf. [CFKS87]).

**Lemme A.5** *Soient $f\in C^0(\mathbb{R})$, telle que $\lim_{\tau\to\pm\infty}f(\tau)=0$, et $g\in C^2(\mathbb{R}^d)$ telle que ses dérivées soient uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d$ jusqu'à l'ordre 2. Alors on a que $[g(x),f(H)]\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_2)$. En particulier $\langle x\rangle^r f(H)\langle x\rangle^{-r}\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_2)$, pour tout $r\in[-1,1]$.*

**Preuve** D'après (1.3.26) on a

$$[g(x),H]=[g(x),(D-A)^2]=-2\nabla g(x)\nabla-\Delta g(x)+iA(x)\nabla g(x),\tag{A.22}$$

qui montre que $[g(x),H]\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H})$. Pour $f(H)=R(z)$, $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ on en déduit que $[g(x),R(z)]=R(z)[H,g(x)]R(z)\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_2)$. Maintenant on désigne par $\mathcal{E}$ l'algèbre de fonctions engendrée par

$$\{f(\tau)=(\tau-z)^{-1}\in C^0(\mathbb{R}_+):z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\}.$$

Une simple modification du théorème de Stone-Weierstrass montre que cette algèbre est dense dans l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini, ce qui conclue la preuve.

La fonction $\langle x\rangle^r$, $r\in[0,1]$, satisfait aux hypothèses de la première partie du lemme ce qui permet d'écrire que

$$\langle x\rangle^r f(H)\langle x\rangle^{-r}=f(H)+[\langle x\rangle^r,f(H)]\langle x\rangle^{-r}$$

qui est bien une somme d'opérateurs bornés. Pour $\langle x\rangle^{-r}f(H)\langle x\rangle^r$ on procède de la même manière. □

**Lemme A.6** *Soit $\mathcal{A}$ le générateur des dilatations défini par* (1.3.9). *Alors pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que* $\lim_{\tau\to\pm\infty} f(\tau) = 0$ *on a* $[\mathcal{A}, f(H)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2)$.

**Preuve** D'après la proposition 1.3.4 l'opérateur $[\mathcal{A}, H] = iB_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H})$ ce qui conduit à $[\mathcal{A}, R(z)] = R(z)[H, \mathcal{A}]R(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2)$. On conclut par densité comme dans le lemme A.5. □

**Lemme A.7** *Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que* $\lim_{\tau\to\pm\infty} f(\tau) = 0$, *alors pour $a \in [-1, 0]$ on a*

$$\langle x\rangle^b \mathcal{A}f(H)\langle x\rangle^a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_1), \quad \langle x\rangle^a f(H)\mathcal{A}\langle x\rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_1),$$

*si $a + b + 1 \leq 0$ et*

$$\langle x\rangle^b \mathcal{A}^2 f(H)\langle x\rangle^a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}), \quad \langle x\rangle^a f(H)\mathcal{A}^2\langle x\rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1),$$
$$\langle x\rangle^a f(H)\mathcal{A}^2\langle x\rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H})$$

*si $a + b + 2 \leq 0$.*

**Preuve** D'après le lemme A.5 l'opérateur $\langle x\rangle^{-a} f(H)\langle x\rangle^a$ est borné de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}_2$. L'opd $\langle x\rangle^a \mathcal{A}^k\langle x\rangle^b$ est borné de $\mathcal{H}_j$ dans $\mathcal{H}_{j-k}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ si $a + b + k \leq 0$. Au final l'opérateur

$$\langle x\rangle^b \mathcal{A}^k f(H)\langle x\rangle^a = \langle x\rangle^b \mathcal{A}\langle x\rangle^a \langle x\rangle^{-a} f(H)\langle x\rangle^a,$$

est borné de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}_{2-k}$. Par dualité on récupère la continuité des deux autres opérateurs. La dernière égalité demande encore un peu de travail. On décompose de la manière suivante

$$\langle x\rangle^a f(H)\mathcal{A}^2\langle x\rangle^b = \langle x\rangle^a \mathcal{A}f(H)\mathcal{A}\langle x\rangle^b + \langle x\rangle^a [f(H), \mathcal{A}]\mathcal{A}\langle x\rangle^b.$$

En remarquant que l'opd $\langle x\rangle^r \mathcal{A}\langle x\rangle^{r'}$ est borné de de $\mathcal{H}_j$ dans $\mathcal{H}_{j-1} \forall j \in \mathbb{Z}$ si $r + r' + 1 \leq 0$, le premier terme s'estime grâce au lemme A.5

$$\langle x\rangle^a \mathcal{A}f(H)\mathcal{A}\langle x\rangle^b = \left(\langle x\rangle^a \mathcal{A}\langle x\rangle^{-1-a}\right)\left(\langle x\rangle^{1+a} f(H)\langle x\rangle^{-1-a}\right)\left(\langle x\rangle^{1+a} \mathcal{A}\langle x\rangle^b\right)$$

et est borné de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}$ dès que $a + b + 2 \leq 0$ et $|1 + a| \leq 1$. Il reste à estimer le terme

$$\langle x\rangle^a [f(H), \mathcal{A}]\mathcal{A}\langle x\rangle^b = \langle x\rangle^a [f(H), \mathcal{A}]\langle x\rangle^{-a-1}\left(\langle x\rangle^{a+1} \mathcal{A}\langle x\rangle^b\right)$$

qui est borné de $\mathcal{H}_{-1}$ dans $\mathcal{H}$ dès que $a + b + 2 \leq 0$ et $1 + a \geq 0$ et $a \leq 0$ grâce au lemme A.6. □

**Lemme A.8** *Si $H - H_0$ est $H_0$-compact alors pour toute fonction $f \in C_0^0(\mathbb{R}_+)$ l'opérateur $f(H) - f(H_0)$ est compact.*

**Preuve** Comme pour le lemme A.5 on vérifie que pour des fonctions de la forme $f(\tau) = (\tau - z)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ on a

$$f(H) - f(H_0) = R(z) - R_0(z) = -R(z)(H - H_0)R_0(z),$$

qui est bien compact. Cette propriété est donc vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ et par densité pour tout $f \in C_0^0(\mathbb{R}_+)$. □

# Notations

- $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$, $\hat{x} = x/|x|$ pour $|x| \neq 0$
- $D = -i\nabla_x$, $D_k = -i\partial_{x_k} = -i\partial/\partial x_k$
- $\mathbb{S}^{d-1}$ sphère unité de l'espace $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{S}_k^{d-1}$ sphère de rayon $k$
- $\mathbb{T}$ ensemble des nombres complexes de module 1
- $\Gamma_\pm(\theta, a) = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} : \pm < \widehat{x}, \widehat{\xi} > \geq \theta,\ |x| \geq a,\ |\xi| \geq a\}$ (cf. Figure 1.2)
- $\mathcal{F}f = \hat{f}$ transformée de Fourier de $f$, cf.(1.2.1)
- $\mathcal{M}f = f^\sharp$ transformée de Mellin de $f$, cf. (1.3.45)
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ classe de Schwartz des fonction $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à décroissance rapide
- $C_0^\infty(\Omega)$ classe des fonction $C^\infty$ à support compact dans l'ouvert $\Omega$
- $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ : espace de Banach des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$
- $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_p,\ p \in [1,\infty]$, classes de Schatten d'opérateurs compact sur $\mathcal{H}$
- $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ classe des fonctions essentiellement bornées sur $\mathbb{R}^d$
- $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ classe des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$
- $\|.\|$ norme hilbertienne sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ou norme uniforme sur $\mathcal{B}\left(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d), \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)\right)$
- $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$ : espace de Sobolev
- $\tilde{\mathbf{A}}$ opérateur pseudodifférentiel définit par une amplitude en représentation de moment, cf. (1.2.14)
- $A(\lambda) : \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ valeur diagonales, dans la représentation spectrale associé à $-\Delta$, de l'opérateur $A$ ou aussi restriction de l'opérateur $\tilde{\mathbf{A}} = \mathcal{F}A\mathcal{F}^*$ à la sphère de rayon $\lambda^{1/2}$, cf. section 1.2.3
- $A^\varkappa(\lambda) : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{d-1}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{d-1})$ représentation de l'opérateur $A(\lambda)$ dans la carte locale décrite par le difféomorphisme $\varkappa : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$, cf. Proposition 1.2.26 et Figure 1.1
- $a^\flat$ symbole principal de l'opd $A$ de la classe $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}(T^*\mathbb{S}^{d-1}),\ 1 \geq \varrho > \delta \geq 0$ définit modulo $\mathcal{S}^{m-\varrho+\delta}_{\varrho,\delta}(T^*\mathbb{S}^{d-1})$

# Bibliographie


[AB59] Y. Aharonov et D. Bohm. *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory.* Phys. Rev. (2), **115**, 1959, pp. 485–491.

[AB61] Y. Aharonov et D. Bohm. *Further considerations on electromagnetic potentials in the quantum theory.* Phys. Rev. (2), **123**, 1961, pp. 1511–1524.

[AB63] Y. Aharonov et D. Bohm. *Further discussion of the role of electromagnetic potentials in the quantum theory.* Phys. Rev. (2), **130**, 1963, pp. 1625–1632.

[ABdMG96] Werner O. Amrein, Anne Boutet de Monvel et Vladimir Georgescu. *$C_0$-groups, commutator methods and spectral theory of $N$-body Hamiltonians.* Basel, Birkhäuser Verlag, 1996, xiv+460p.

[AT98] R. Adami et A. Teta. *On the Aharonov-Bohm Hamiltonian.* Lett. Math. Phys., **43**, n° 1, 1998, pp. 43–53.

[BM70] V. S. Buslaev et V. B. Matveev. *Wave operators for the Schrödinger equation with slowly decreasing potential.* Teoret. Mat. Fiz., **2**, n° 3, 1970, pp. 367–376.

[BR01] J. M. Bily et D. Robert. *The Semi-classical Van-Vleck Formula. Application to the Aharonov-Bohm effect.* Preprint, 2001. Disponible à l'adresse http ://mpej.unige.ch/mp_arc/index.html.

[CFKS87] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch et B. Simon. *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry.* Berlin, Springer-Verlag, 1987, study édition, x+319p.

[Cha60] R.G. Chambers. Phys. Rev. (2), **115**, 1960, pp. 3–5.

[Coo57] J. M. Cook. *Convergence to the Møller wave-matrix.* J. Math. Phys., **36**, 1957, pp. 82–87.

[CV71] Alberto-P. Calderón et Rémi Vaillancourt. *On the boundedness of pseudo-differential operators.* J. Math. Soc. Japan, **23**, 1971, pp. 374–378.

[CV72] Alberto-P. Calderón et Rémi Vaillancourt. *A class of bounded pseudo-differential operators.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **69**, 1972, pp. 1185–1187.

[DG97] Jan Dereziński et Christian Gérard. *Scattering theory of classical and quantum $N$-particle systems.* Berlin, Springer-Verlag, 1997, xii+444p.

[Dol64] John D. Dollard. *Asymptotic convergence and the Coulomb interaction.* J. Mathematical Phys., **5**, 1964, pp. 729–738.

[DŠ98] L. Dąbrowski et P. Šťovíček. *Aharonov-Bohm effect with $\delta$-type interaction.* J. Math. Phys., **39**, n° 1, 1998, pp. 47–62.

[Ens89] V. Enss. *Long-range scattering of two and three body systems.* Actes des journées équations aux dérivées partielles, Saint-Jean de Mont, **21**, 1989, pp. 1–31.

[ES49] W. Ehrenberg et R. W. Siday. PROC. PHYS. SOC. London B, **62**, 1949, pp. 8–21.

[GG99] V. Georgescu et C. Gérard. *On the virial theorem in quantum mechanics.* Comm. Math. Phys., **208**, n° 2, 1999, pp. 275–281.

[GY00] Y. Gâtel et D. R. Yafaev. *Scattering theory for the Dirac operator with a long-range electromagnetic potential.* Preprint, 2000. Disponible à l'adresse http ://mpej.unige.ch/mp_arc/index.html.

[Hen80] Walter C. Henneberger. *Some aspects of the Aharonov-Bohm effect.* Phys. Rev. A (3), **22**, n° 4, 1980, pp. 1383–1388.

[Hör76] Lars Hörmander. *The existence of wave operators in scattering theory.* Math. Z., **146**, n° 1, 1976, pp. 69–91.

[Hör83] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Berlin, Springer-Verlag, 1983, viii+391p. Distribution and Fourier analysis.

[Hör85] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III.* Berlin, Springer-Verlag, 1985, viii+525p. Pseudodifferential operators.

[IK84] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *Microlocal resolvent estimates for 2-body Schrödinger operators.* J. Funct. Anal., **57**, n° 3, 1984, pp. 270–300.

[IK85a] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *Modified wave operators with time-independent modifiers.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **32**, n° 1, 1985, pp. 77–104.

[IK85b] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *A remark on the microlocal resolvent estimates for two body Schrödinger operators.* Publ. Res. Inst. Math. Sci., **21**, n° 5, 1985, pp. 889–910.

[IK86] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *Scattering matrices for two-body Schrödinger operators.* Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo, **35**, n° 2, 1986, pp. 81–107.

[IU71] Teruo Ikebe et Jun Uchiyama. *On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operators.* J. Math. Kyoto Univ., **11**, 1971, pp. 425–448.

[Jen85] Arne Jensen. *Propagation estimates for Schrödinger-type operators.* Trans. Amer. Math. Soc., **291**, n° 1, 1985, pp. 129–144.

[JMP84] Arne Jensen, Éric Mourre et Peter Perry. *Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **41**, n° 2, 1984, pp. 207–225.

[JP85] Arne Jensen et Peter Perry. *Commutator methods and Besov space estimates for Schrödinger operators.* J. Operator Theory, **14**, n° 1, 1985, pp. 181–188.

[Kat59] Tosio Kato. *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient.* Comm. Pure Appl. Math., **12**, 1959, pp. 403–425.

[KI66] Tosio Kato et Teruo Ikebe. *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators.* Sûgaku, **18**, 1966, pp. 33–39.

[Lav71] Richard B. Lavine. *Commutators and scattering theory. I. Repulsive interactions.* Comm. Math. Phys., **20**, 1971, pp. 301–323.

[Lav72] Richard B. Lavine. *Commutators and scattering theory. II. A class of one body problems.* Indiana Univ. Math. J., **21**, 1971/72, pp. 643–656.

[LL64] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Physique théorique, Tome 1 Mécanique.* 1964, quatrième édition, 242p. Traduit du Russe par C. Ligny (1982), Éditions Mir, Moscou.

[LL66] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Physique théorique, Tome 3 Mécanique Quantique.* 1966, troisième édition, 766p. Traduit du Russe par E. Gloukhian (1975), Éditions Mir, Moscou.

[LT87] Michael Loss et Bernd Thaller. *Scattering of particles by long-range magnetic fields.* Ann. Physics, **176**, n° 1, 1987, pp. 159–180.

[LY98] N. Lerner et D. R. Yafaev. *Trace theorems for pseudo-differential operators.* J. Anal. Math., **74**, 1998, pp. 113–164.

[Mou83] E. Mourre. *Operateurs conjugués et propriétés de propagation.* Comm. Math. Phys., **91**, n° 2, 1983, pp. 279–300.

[Mou81] E. Mourre. *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators.* Comm. Math. Phys., **78**, n° 3, 1980/81, pp. 391–408.

[Nic91] François Nicoleau. *Théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence de champ magnétique.* Thèse, 1991.

[Nic94] François Nicoleau. *Matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **61**, n° 3, 1994, pp. 329–346.

[NR91] François Nicoleau et Didier Robert. *Théorie de la diffusion quantique pour des perturbations à longue et courte portée du champ magnétique.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5), **12**, n° 2, 1991, pp. 185–194.

[Per80] Peter A. Perry. *Mellin transforms and scattering theory. I. Short range potentials.* Duke Math. J., **47**, n° 1, 1980, pp. 187–193.

[Per81] Peter A. Perry. *Propagation of states in dilation analytic potentials and asymptotic completeness.* Comm. Math. Phys., **81**, n° 2, 1981, pp. 243–259.

[PSS81] P. Perry, I. M. Sigal et B. Simon. *Spectral analysis of $N$-body Schrödinger operators.* Ann. of Math. (2), **114**, n° 3, 1981, pp. 519–567.

[Rui83] S. N. M. Ruijsenaars. *The Aharonov-Bohm effect and scattering theory.* Ann. Physics, **146**, n° 1, 1983, pp. 1–34.

[Shu87] M. A. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory.* Berlin, Springer-Verlag, 1987, x+278p. Traduit du Russe par Stig I. Andersson.

[Tay81] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential operators.* Princeton, N.J., Princeton University Press, 1981, xi+452p.

[Uch87] Jun Uchiyama. *Polynomial growth or decay of eigenfunctions of second-order elliptic operators.* Publ. Res. Inst. Math. Sci., **23**, n° 6, 1987, pp. 975–1006.

[Uhl82] Karen K. Uhlenbeck. *Removable singularities in Yang-Mills fields.* Comm. Math. Phys., **83**, n° 1, 1982, pp. 11–29.

[Yaf80] D. R. Yafaev. *Wave operators for the Schrödinger equation.* Teoret. Mat. Fiz., **45**, n° 2, 1980, pp. 224–234.

[Yaf85] D. R. Yafaev. *Remarks on the spectral theory for the multiparticle-type Schroedinger operator.* J. Sov. Math., **31**, 1985, pp. 3445–3459. Traductions de Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova (Russe).

[Yaf92] D. R. Yafaev. *Mathematical scattering theory.* Providence, RI, American Mathematical Society, 1992, x+341p. General theory, Traduit du Russe par J. R. Schulenberger.

[Yaf93] D. R. Yafaev. *Radiation conditions and scattering theory for $N$-particle Hamiltonians.* Comm. Math. Phys., **154**, n° 3, 1993, pp. 523–554.

[Yaf95] D. R. Yafaev. *Resolvent estimates and scattering matrix for $N$-particle Hamiltonians.* Integral Equations Operator Theory, **21**, n° 1, 1995, pp. 93–126.

[Yaf97] D. R. Yafaev. *On the classical and quantum Coulomb scattering.* J. Phys. A, **30**, n° 19, 1997, pp. 6981–6992.

[Yaf98] D. R. Yafaev. *The scattering amplitude for the Schrödinger equation with a long-range potential.* Comm. Math. Phys., **191**, n° 1, 1998, pp. 183–218.

[Yaf00a] D. R. Yafaev. *A class of pseudodifferential operators with oscillating symbols.* St. Petersburg Math. J., **11**, n° 2, 2000, pp. 375–403.

[Yaf00b] Dmitri Yafaev. *Scattering theory : some old and new problems.* Berlin, Springer-Verlag, 2000, xvi+169p.

**Résumé.** La théorie de la diffusion admet différentes formulations qui se répartissent en deux famille : l'une dépendante du temps l'autre stationnaire. La première approche, reposant sur l'existence de limites en grand temps de certaines observables, et la seconde, qui s'appuie sur des estimations de résolvantes, sont essentiellement équivalentes cependant l'approche stationnaire permet d'obtenir une formule de représentation pour l'objet principal de la théorie : la matrice de diffusion.

Dans cette thèse on développe la théorie des perturbations lisses pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel électromagnétique à longue portée. Après avoir obtenues certaines estimations pour la résolvante (principe d'absorption limite, estimation de radiation et estimations de propagation microlocales) on construit des opérateurs d'onde modifiés de type Isozaki-Kitada et l'on obtient une formule de représentation stationnaire pour la matrice de diffusion. On rencontre de nombreux problèmes liés aux opérateurs pseudo-différentiel utilisés que l'on résout en utilisant des classes de symboles oscillants pour lesquelles un calcul pseudo-différentiel non-standard a été développé.

Au final on obtient sans hypothèses de jauge sur le potentiel magnétique la complétude des opérateurs d'onde modifiés et leur coïncidence avec d'autres constructions dépendant du temps. Pour la matrice de diffusion on montre que en général son spectre recouvre le cercle unité. Parmi les exceptions à cette règle on trouve le cas des champs magnétiques à support compact. L'approche développée dans cette thèse permet de généraliser les propriétés spécifiques de la matrice de diffusion, connues sous le nom d'effet Aharonov-Bohm, à une large classe de tels potentiels.

**Mots clés.** théorie de la diffusion, opérateur de Schrödinger, potentiels à longue portée, matrice de diffusion, effet Aharonov-Bohm.

**Abstract.** Scattering theory admits different formulations divided in two families : one time dependent and the other stationary. The first approach, based on the existence of large time limits of certain observables, and the second, supported by some resolvent estimates, are essentially equivalent however the stationary approach gives a stationary representation formula for the most important object of the theory : the scattering matrix.

In this thesis we show that the Schrödinger operator with a long-range electromagnetic potential fits into the scheme of smooth scattering . After having proved some resolvent estimates (limiting absorption principle, radiation estimates, microlocal propagations estimates) we construct modified wave operators of the Isozaki-Kitada type and get a stationary representation formula for the scattering matrix. Some difficulties arise with the pseudodifferential calculus which are solved by using non-standard classes of pseudodifferential operators with oscillating symbols.

Finally we obtain the asymptotic completeness, without any gauge assumptions on the magnetic potential, of the wave operators and their coincidence with others time-dependent constructions. For the scattering matrix we prove that, in general, its spectrum covers the unit circle. Among the exceptions to this rule the case of compactly supported magnetic fields is studied. The approach developed allows us to generalize some special properties of the scattering matrix, known as the Aharonov-Bohm effect, to a large class of such potentials.

**Key words.** scattering theory, Schrödinger operator, long-range potentials, scattering matrix, Aharonov-Bohm effect.

**MSC :** 35P25, 35S99, 81U05, 81U20 **PACS :** 03.65.N, 11.55, 72.15.R