

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention : Mathématiques et Applications

par

Philippe ROUX

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

*La matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger
avec un potentiel électromagnétique à longue portée*

Soutenue le 21 Décembre 2001 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

Mr	Jean Ginibre	rapporteur
Mr	François Nicoleau	examineur
Mr	Francis Nier	examineur
Mr	Jean Nourrigat	rapporteur
Mr	Didier Robert	examineur
Mr	Dimitri Yafaev	Directeur de thèse

“- *Qu’est-ce que vous faites dans la vie, vous ?*
demanda le professeur.
- *J’apprend des choses, dit Colin, et j’aime Chloé.*”

Boris Vian, *L’écume des jours*.

A Armelle et Sterenn ...

Table des matières

Table des matières	i
Liste des figures	iii
Remerciements	v
Introduction	1
1 Une expérience de diffusion	1
2 La théorie de la diffusion quantique	2
3 L'opérateur de Schrödinger, approche dépendante du temps	5
4 L'approche stationnaire	8
5 Les résultats principaux	11
6 L'effet Aharonov-Bohm	14
1 Préliminaires	19
1.1 Théorie de la diffusion abstraite	19
1.1.1 Théorie des perturbations lisses	19
1.1.2 Représentation stationnaire de la matrice de diffusion	21
1.1.3 La théorie de Mourre	24
1.2 Les opérateurs pseudodifférentiels	27
1.2.1 Les classes de Hörmander	27
1.2.2 Les classes de symboles oscillants	29
1.2.3 Restriction d'un opd à la sphère	34
1.3 L'opérateur de Schrödinger	42
1.3.1 Les hypothèses	42
1.3.2 La théorie de Mourre pour H	44
1.3.3 Principe d'absorption limite et estimation de radiation	47
1.3.4 Estimations de propagation microlocales	50
2 Théorie de la diffusion	59
2.1 Les opérateurs d'onde	59
2.1.1 Les équations eiconale et de transport	59
2.1.2 Existence et complétude asymptotique	64
2.1.3 Coïncidence avec l'approche dépendante du temps	70
2.2 La matrice de diffusion $S(\lambda; H, H_0)$	74
2.2.1 Construction de $S(\lambda; H, H_0)$	74

2.2.2	Analyse des singularités de $S(\lambda; H, H_0)$	78
2.2.3	La partie principale de $S(\lambda; H, H_0)$	83
2.3	Propriétés spectrales de $S(\lambda; H, H_0)$	87
2.3.1	Le spectre essentiel dans le cas $\rho < 1$	88
2.3.2	Le cas $\rho = 1$	90
2.3.3	La section efficace	96
APPENDICE : Le principe d'absorption limite pour H.		101
Notations		111
Bibliographie		113

Liste des figures

1	Une expérience de diffusion	2
2	Vision dynamique de la théorie de la diffusion	4
3	L'expérience d'Aharonov et Bohm	14
4	Exemples de champs magnétiques à support compact	16
1.1	Carte locale (\varkappa, Σ)	38
1.2	Les cônes tronqués $\Gamma_{\pm}(\theta, a)$	51
2.1	Le support de ζ_+	65
2.2	Calcul de \mathbf{V} pour le potentiel de Aharonov-Bohm en dimension 2	94
2.3	Calcul de \mathbf{V} pour le potentiel (2.3.20) en dimension 3	95

Remerciements

Tout au long de ces années j'ai pu bénéficier de l'attention, de l'aide ou du soutien de nombreuses personnes auxquelles je tiens à exprimer ma sympathie.

Je voudrais tout d'abord remercier Dimitri Yafaev de m'avoir donné la chance de faire cette thèse. Tout au long de ces quatre années il a su à la fois me laisser une grande liberté dans mon travail de recherche tout en veillant aux exigences de rigueur nécessaires à la concrétisation de mes efforts. Son encadrement et ses conseils m'ont beaucoup apporté bien au delà du simple point de vue mathématique.

Je tiens ensuite à remercier les membres du jury pour leur participation. En premier lieu Jean Ginibre et Jean Nourrigat qui ont accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs de cette thèse. En plus de leur participation je remercie vivement Didier Robert et Francis Nier pour l'attention qu'ils ont portée sur mon travail. Mais je tiens à remercier tout particulièrement François Nicoleau ; les échanges d'idées que nous avons eu ont largement contribué à développer la dernière partie de cette thèse.

Durant ces quelques années j'ai pu bénéficier de l'expérience des membres de l'équipe EDP de l'IRMAR. Je pense en particulier à Nicolas Lerner qui n'a jamais été avare de son temps lorsque je frappais à son bureau pour lui poser mes nombreuses questions. Je leur adresse à tous ma profonde gratitude.

Je n'aurais pas pu finir cette thèse sans l'aide et le dynamisme des personnels de l'IRMAR depuis les bibliothécaires en passant par la reprographie, les secrétaires (Danielle Lanneau, Claude Boscher et Anita Texier) sans oublier les femmes de ménage qui n'ont jamais effacé le résultat d'un laborieux calcul entouré en rouge sur le tableau noir.

Je me dois de remercier Thierry Brault, Mouhamadou Seck et Paul Dirkx ainsi que tous mes collègues Lannionais pour le soutien chaleureux qu'ils m'ont apporté lors de ces derniers mois.

Je pense aussi à tous les autres enseignants, chercheurs ou thésards que j'ai côtoyés dans la "tour des maths", et plus globalement à tous mes amis. Les discussions que nous avons eu, scientifiques ou non, m'ont beaucoup appris. Je pense aux membres de l'association Jacques Binet et à ceux qui sont passés par le bureau 234 (pour y boire le fameux café qu'on y faisait) : Éric, Claude et Maël, Yannick, Rémi, Fred, Marc, Gilles, David, Yasmine, Ghislaine, François, Patricia, ... , quelques (ex-)membres de la SAR : Olivier (les deux!), Franck, Yves, ... , et tant d'autres ...

Enfin j'ai une pensée émue pour ma famille et pour Charles mon grand père.

Introduction

D'un point de vue mathématique on peut dire que, grossièrement, la théorie de la diffusion est une branche de la théorie des perturbations des opérateurs auto-adjoints pour le spectre (absolument) continu. Cette théorie trouve ses origines en physique théorique, aussi bien dans le cadre de la mécanique classique que dans celui de la mécanique quantique, et plus particulièrement dans la description des collisions élastiques. Les principales problématiques étudiées ainsi qu'une grande partie du vocabulaire de la théorie de la diffusion sont en fait issus de la physique c'est pourquoi il convient de commencer cette thèse en décrivant, brièvement, une expérience de diffusion pour fixer quelques concepts importants.

1 Une expérience de diffusion

Un faisceau de particules d'énergie λ arrive de l'infini dans la direction $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ sur une cible fixe (le centre diffuseur) à raison de N particules par unité de temps et de surface (orthogonale à ω_0). Le flux de particules $d\phi$ passant dans l'élément de surface $|\mathbb{S}^{d-2}| b db d\varphi$, correspondant à un paramètre d'impact b , se trouve diffusé après interaction avec le centre diffuseur dans l'angle solide $d\omega = d\theta d\varphi$ dans la direction ω . Si le faisceau de particules est homogène et suffisamment peu dense (pour qu'on puisse négliger les interactions entre particules du faisceau) le flux sortant au travers de l'élément $d\omega$, mesuré par un détecteur, sera directement proportionnel à la densité du flux entrant N

$$d\phi = N \Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) d\omega. \quad (1)$$

En mécanique classique le facteur de proportionnalité vaut (voir Figure 1)

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = |\mathbb{S}^{d-2}| \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|, \quad (2)$$

et est appelé section efficace différentielle. C'est la principale grandeur mesurable dans une telle expérience et elle est homogène à une surface[†]. On parle aussi parfois de la

[†]Dans le cas où le centre diffuseur est une sphère "dure" $\Sigma(\omega, \omega_0; \lambda) d\omega$ est égal à la surface que présente cette sphère face à la partie du flux entrant $d\phi$ qui repart dans la direction ω [LL64].

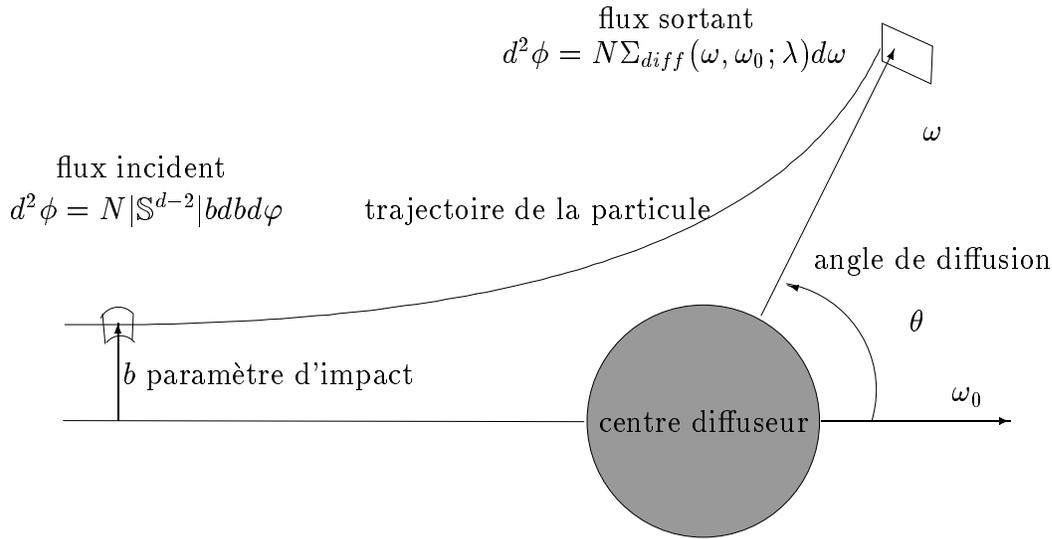


FIG. 1: Une expérience de diffusion

section efficace totale

$$\Sigma_{tot}(\omega; \lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Sigma_{diff}(\omega, \omega'; \lambda) d\omega', \quad (3)$$

qui mesure le champ d'action du centre diffuseur. Dans les cas “physique” (particules élémentaires) la zone où la particule subit la part la plus importante de sa déviation est très petite comparée aux échelles de temps et de distance auxquelles on a affaire. La trajectoire de la particule semble donc formée de deux branches (l’une pour $t \rightarrow -\infty$ l’autre pour $t \rightarrow +\infty$) pour lesquelles le mouvement semble asymptotiquement libre. Le flux dans la direction ω est relié au flux incident par la section efficace différentielle (2).

2 La théorie de la diffusion quantique

Dans la théorie quantique l’évolution d’un système physique au cours du temps est décrite par une fonction $\Psi(t)$ à valeur dans un espace de Hilbert, \mathcal{H} , vérifiant une équation, appelée équation de Schrödinger, du type

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(t) = H\Psi(t) \\ \Psi(0) = f \end{cases} \quad (4)$$

où H est un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} appelé Hamiltonien et f est l'état initial du système. Bien souvent on a envie de comparer la solution de (4) à celle d'un système du même type où H est remplacé par un opérateur H_0 plus "simple" que H mais proche, dans un certain sens, de H . C'est le principe de base de la théorie de la diffusion qui de ce point de vue est une théorie perturbative.

Dans le cas où f dans (4) est un vecteur propre de H associé à la valeur propre λ (i.e. $Hf = \lambda f$) la solution de (4) s'écrit $\Psi(t) = \exp(it\lambda)f$. Comme les valeurs propres de H sont déplacées même par de petites perturbations il n'est en général pas possible de comparer les solutions de (4) à celles du même système pour H_0 . C'est pourquoi en théorie de la diffusion on se restreint à la partie absolument continue de l'opérateur H qui est plus stable[†]. Rappelons que pour tout opérateur auto-adjoint H il correspond (d'après le théorème spectral) une fonction $E(\lambda)$ à valeur projecteur auto-adjoint sur l'espace \mathcal{H} telle que pour tout φ, ψ

$$(H\varphi, \psi)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E(\lambda)\varphi, \psi)_{\mathcal{H}}. \quad (5)$$

Un vecteur $\psi \in \mathcal{H}$ appartient au sous-espace absolument continu de H , noté \mathcal{H}^{ac} , si la mesure $m_{\psi}(\cdot) = (E(\cdot)\psi, \psi)_{\mathcal{H}}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Une solution de (4) s'écrit alors $\Psi(t) = \exp(-itH)f$ où l'opérateur $\exp(-itH)$ est défini par la forme quadratique

$$(\exp(-itH)\varphi, \psi)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \exp(-it\lambda) d(E(\lambda)\varphi, \psi)_{\mathcal{H}}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}. \quad (6)$$

Par analogie avec le problème classique, présenté au début de cette introduction, il est intéressant de comparer les solutions $\Psi(t)$ et $\Psi_0(t)$ du système (4) pour H et H_0 , respectivement, pour de grands temps $t \rightarrow \pm\infty$. On est donc amené à se poser la question suivante :

$$\forall f \in \mathcal{H}^{ac} \quad \exists? f_{\pm} \in \mathcal{H}_0^{ac} \quad \text{tel que} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\Psi(t) - \Psi_{0,\pm}(t)\| = 0 \quad (7)$$

avec $\Psi_{0,\pm}(t) = \exp(-itH_0)f_{\pm}$. Si (7) admet une réponse positive alors

$$f = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(itH) \exp(-itH_0) f_{\pm}.$$

Ceci nous amène à décomposer le problème en deux étapes :

- d'abord le problème de l'existence des opérateurs d'onde

$$W_{\pm}(H, H_0) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}, \quad (8)$$

• ensuite celui de l'existence d'un inverse de \mathcal{H}^{ac} dans \mathcal{H}_0^{ac} pour les opérateurs d'onde, c'est le problème de la complétude asymptotique

$$\text{Ran} W_{\pm}(H, H_0) = \mathcal{H}^{ac}. \quad (9)$$

[†]Par exemple le spectre absolument continu d'un opérateur est contenu dans son spectre essentiel qui lui est stable pour toute perturbation H -compacte d'après le théorème de Weyl.

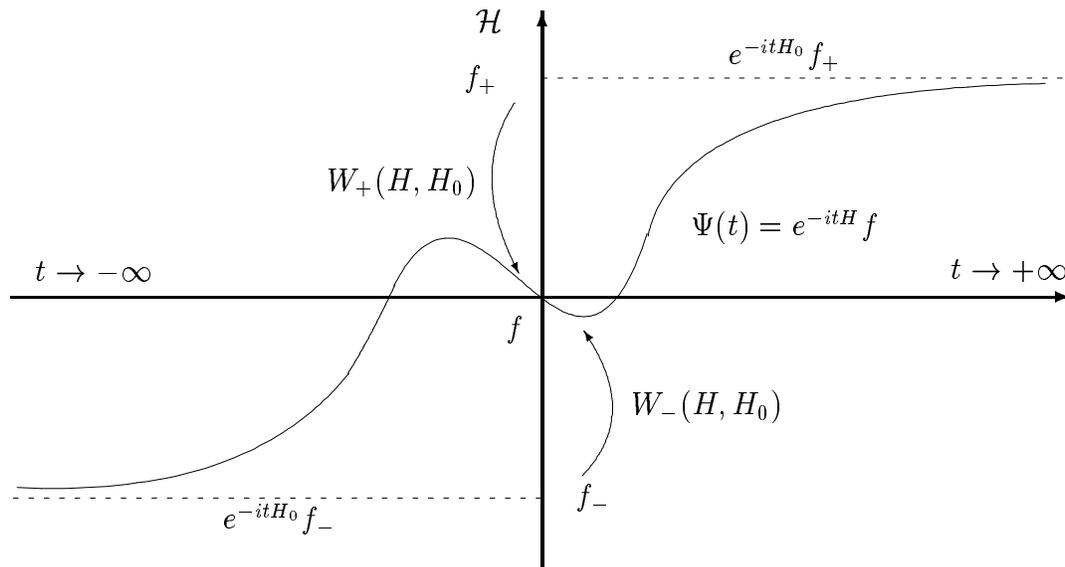


FIG. 2: Vision dynamique de la théorie de la diffusion

On peut remarquer que si les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0)$ sont unitaires sur \mathcal{H}_0^{ac} leur complétude est équivalente à l'existence des opérateurs d'onde $W_{\pm}(H_0, H)$ unitaires sur \mathcal{H}^{ac} . Les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0)$ réalisent alors l'équivalence unitaire entre les parties absolument continues des opérateurs H et H_0 , ce qui se traduit mathématiquement par la relation d'entrelacement

$$HW_{\pm}(H, H_0) = W_{\pm}(H, H_0)H_0. \quad (10)$$

Lorsque l'on peut répondre positivement à la première des deux questions précédentes on peut former l'opérateur de diffusion

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = W_+^*(H, H_0)W_-(H, H_0) : \mathcal{H}^{ac} &\longrightarrow \mathcal{H}^{ac} \\ f_- &\longrightarrow f_+ \end{aligned} \quad (11)$$

qui relie directement les traces passées f_- aux traces futures f_+ sans considération en temps fini. Si les opérateurs d'onde (8) sont complets \mathbf{S} est un opérateur unitaire sur \mathcal{H}_0^{ac} et grâce à la propriété d'entrelacement (10) l'opérateur \mathbf{S} commute avec H_0 . Il est donc naturel d'étudier \mathbf{S} dans une représentation où H_0 est diagonal. Dans le cas le plus simple (où le spectre de H_0 est absolument continu et de multiplicité constante) une telle représentation de \mathcal{H} consiste en la donnée d'un espace de Hilbert \mathfrak{N} (de dimension infini) et d'un opérateur unitaire

$$F_0 : \mathcal{H}^{ac} \longrightarrow \mathbb{L}^2(\sigma_{ac}(H), \mathfrak{N})$$

vérifiant pour tout $f \in \mathcal{D}(H_0)$ $(F_0 H_0 f)(\lambda) = \lambda(F_0 f)(\lambda)$. Si on note $(F_0 f)(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)f \in \mathfrak{N}$ alors l'action de \mathbf{S} se ramène, dans cette représentation, à la multiplication par la

fonction à valeur opérateur

$$S(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) \mathbf{S} \Gamma_0^*(\lambda) \quad (12)$$

appelée matrice de diffusion. Ce dernier objet contient toute l'information sur le processus de diffusion associé à l'opérateur H .

Dans le cas de la diffusion de particules quantiques $S(\lambda)$ est un opérateur intégral sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} . Le carré du module de son noyau $s(\omega, \omega_0; \lambda)$, $\omega, \omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, s'interprète physiquement comme la section différentielle efficace de l'interaction

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{\lambda^{-(d-1)/2}}{(2\pi)^{d-1}} |s(\omega, \omega_0; \lambda)|^2, \quad \omega \neq \omega_0. \quad (13)$$

Cette nouvelle définition de la section différentielle efficace entraîne l'apparition de propriétés différentes par rapport à la définition (2) en particulier pour la singularité sur la diagonale $\omega = \omega_0$ de la fonction $\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda)$ (voir par exemple [LL64] chapitre IV section 20 et [LL66] chapitre XVII section 127).

3 L'opérateur de Schrödinger, approche dépendante du temps

L'évolution d'une particule élémentaire dans un champ électromagnétique (E, B) est décrite en mécanique quantique par l'équation de Schrödinger (4) où le Hamiltonien est l'opérateur aux dérivées partielles suivant

$$H = (D - A)^2 + V. \quad (14)$$

La fonction réelle à valeurs scalaires V est appelé le potentiel électrique et la fonction réelle à valeurs vectorielles $A = (A_1, \dots, A_d)$ est appelée le potentiel magnétique. Ces potentiels sont reliés au champ (E, B) par les équations

$$B = \text{rot}A, \quad E = -\nabla V - \partial_t A. \quad (15)$$

Si les potentiels V et A définissent complètement le champ (E, B) , il découle des équations précédentes que le champ (E, B) ne définit pas de manière unique les potentiels. En effet si on se donne une fonction f , régulière, et qu'on définit de nouveaux potentiels (V', A') par

$$V' = V - \partial_t f, \quad A' = A + \nabla f, \quad (16)$$

alors le couple (V', A') définit le même champ (E, B) que les potentiels (V, A) . On peut donc imposer aux potentiels une condition supplémentaire (par rapport aux équations

(15)), qu'on appelle condition de jauge. Les opérateurs de Schrödinger H et H' associés aux potentiels (V, A) et (V', A') , liés par (16), ne sont pas égaux mais seulement unitairement équivalents

$$H' = e^{if} H e^{-if}. \quad (17)$$

Il existe beaucoup de jauges, certaines étant plus pratiques que d'autres selon la situation. Pour des potentiels indépendants du temps il est souvent commode d'utiliser la jauge de Coulomb définie par

$$\operatorname{div} A = 0. \quad (18)$$

Sous cette condition les potentiels s'expriment directement en fonction du champ par les équations

$$-\Delta V + \operatorname{div} E = 0, \quad -\Delta A - \operatorname{rot} B = 0.$$

Une autre jauge particulièrement importante en théorie de la diffusion est la jauge transverse ou jauge de Poincaré définie par la condition

$$\langle A(x), x \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (19)$$

Ce choix de jauge fut introduit par Uhlenbeck [Uhl82]. Modulo une hypothèse de régularité cette jauge peut être construite à partir d'un potentiel magnétique A' quelconque par la formule

$$A_j(x) = \sum_{k=1}^d \int_0^1 F_{kj}(sx) x_k ds, \quad F_{kj}(x) = \partial_{x_k} A'_j(x) - \partial_{x_j} A'_k(x). \quad (20)$$

La multiplicité des jauges envisageables pour décrire une situation ad hoc donne aux potentiels un caractère artificiel dans la théorie classique, par opposition à la "réalité" du champ (E, B) .

Pour des potentiels $(V(x), A(x))$ ne dépendant pas du temps on fait en général une hypothèse de décroissance (lente) aux grandes distances

$$|\partial_x^\alpha A(x)| = O((1 + |x|)^{-\rho - |\alpha|}), \quad |\partial_x^\alpha V(x)| = O((1 + |x|)^{-\rho' - |\alpha|}), \quad \rho, \rho' > 0, \quad (21)$$

pour $|\alpha| \leq 2$. Sous ce type d'hypothèses le spectre absolument continu coïncide avec le demi-axe réel positif, i.e. avec les énergies positives pour lesquelles la particule n'est pas classiquement capturée par le champ. Au contraire le spectre négatif est composé de valeurs propres qui correspondent à des états liés du système. En théorie de la diffusion le choix le plus naturel pour Le Hamiltonien de référence H_0 est celui correspondant à un champ électromagnétique nul $(V(x), A(x)) = (0, 0)$, soit

$$H_0 = -\Delta, \quad \mathcal{D}(H_0) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d), \quad \mathcal{H}_0^{ac} = \mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d). \quad (22)$$

Pour des potentiels à courte portée, c'est à dire lorsque $\rho, \rho' > 1$ dans (21), l'existence des opérateurs d'onde (8) remonte à [Coo57]. La méthode de Cook repose sur la vérification du critère suivant

$$\int_{\mathbb{R}} \|(H - H_0)e^{-itH_0} f\| dt < \infty \quad (23)$$

sur un ensemble de vecteur f dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ (par exemple via la méthode de la phase stationnaire). Lorsque la partie électrique du potentiel vérifie (21) avec un $\rho' > 1$ et que la partie magnétique du potentiel vérifie (21) avec un $\rho > 1/2$ et l'hypothèse supplémentaire de jauge transverse (19) les opérateurs d'onde usuels (8) existent encore [LT87]. Ce résultat exceptionnel peut être obtenu par le critère de Cook en remarquant que pour

$$f \in \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : \text{supp } \hat{f} \subset \{\xi : 0 < \lambda_0 \leq |\xi|^2 \leq \lambda_1 < \infty\}\}$$

on a

$$\|(H - H_0)e^{-itH_0} f\| = O((1 + |t|)^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0,$$

puisque dans l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle - t|\xi|^2} (2i \langle A(x), \xi \rangle + i \text{div} A(x) + |A(x)|^2 + V(x)) \hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{d/2}}$$

le seul terme à longue portée $\langle A(x), \xi \rangle$ s'annule au point stationnaire $\xi = x/(2t)$ sous l'hypothèse (19).

Pour des potentiels généraux à longue portée, c'est à dire vérifiant (21) avec $\rho, \rho' \in (0, 1]$ et sans hypothèse supplémentaire, les opérateurs d'onde (8) n'existent plus en général. C'est en particulier le cas pour le potentiel de Coulomb $V(x) = c/|x|$ qui joue un rôle très important en physique. On doit donc introduire la notion d'opérateurs d'onde modifiés : dans (8) l'évolution libre $\exp(-itH_0)$ doit être remplacé par un autre groupe unitaire $U_0(t)$ proche, dans un certain sens, de $\exp(-itH_0)$ et qu'on appelle l'évolution modifiée. La première construction d'opérateurs d'onde modifiés remonte à [Dol64] dans le cas du potentiel de Coulomb. Il existe plusieurs manières de construire l'évolution modifiée $U_0(t)$. Cette modification peut être faite d'une manière dépendante du temps en construisant une évolution $U_0(t) = \exp(iS(t, D))$, en représentation de moment, où $S(t, \xi)$ est une solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi qui est proche de $t\xi^2$ [BM70, Hör76], ou aussi en cherchant $U_0(t)$ sous la forme

$$U_0(t) = (2|t|)^{-d/2} \exp(i(\Omega(t, x) + |x|^2/4t)) \hat{f}(x/2t),$$

donc en représentation d'espace, où Ω est une solution "petite", dans un certain sens, d'une équation non-linéaire [Yaf80]. Dans ces différentes constructions l'existence des opérateurs d'onde modifiés repose sur la méthode de Cook. Le problème de la complétude asymptotique est par contre beaucoup plus délicat. L'approche la plus générale pour résoudre ce problème repose sur la méthode de Enss [Ens89] qui consiste à relier asymptotiquement les observables D et x/t (voir [DG97] pour une description complète de l'approche dépendant du temps). Le défaut de ces approches est qu'elles sont inadaptées à l'obtention d'une formule de représentation pour la matrice de diffusion, c'est pourquoi on suit dans cette thèse une approche totalement différente.

4 L'approche stationnaire

Quand les potentiels V et A ne dépendent pas du temps il est naturel de chercher à définir l'évolution modifiée de manière stationnaire $U_0(t) = J \exp(-itH_0)$ où l'opérateur J (appelé identificateur ou modificateur) ne dépend pas du temps. Cette approche fut d'abord proposée par Isozaki et Kitada dans [IK85a]. L'apport majeur de Isozaki et Kitada fut de considérer des opérateurs d'onde modifiés de la forme

$$W_{\pm}(H, H_0, J) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0}, \quad (24)$$

avec un choix de modificateurs $J = J_j$, $j = 1, 2$ différents selon que $t \rightarrow -\infty$ ou que $t \rightarrow +\infty$. Dans [IK85a], où seul le cas électrostatique ($A = 0$ dans (14)) est considéré, les identifications J_j étaient construites sous la forme d'opérateurs intégraux de Fourier, leur existence et leur complétude reposant sur la méthode de Enss (cette approche fut étendue au cas d'un champ électromagnétique par Nicoleau et Robert [Nic91, NR91]). La phase φ des modificateurs J_j doit vérifier l'équation eiconale

$$|\nabla\varphi|^2 - 2 \langle A, \nabla\varphi \rangle + V(x) + |A(x)|^2 = |\xi|^2, \quad \nabla = \nabla_x, \quad (25)$$

et des estimations de décroissance dans des zones entrantes et sortantes de l'espace des phases $\pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle > \kappa$, $\kappa \in (0, 1)$

$$\partial_x^\alpha (\varphi(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) = O(|x|^{1-\rho-|\alpha|}). \quad (26)$$

L'amplitude des modificateurs étant quant à elle supportée dans les zones entrantes et sortantes $\pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle > \kappa$.

Cette approche a l'avantage de fournir une formule de représentation stationnaire (i.e. en terme de la résolvante $R(z) = (H - z)^{-1}$ de l'opérateur H) pour la matrice de diffusion. Cette formule a été établie pour le cas électrique dans [IK86] et pour le cas magnétique dans [Nic91, Nic94]. Formellement celle-ci peut s'écrire

$$S(\lambda) = Id - 2i\pi\Gamma_0(\lambda) (J_1^* T_2 - T_1^* R(\lambda + i0) T_2) \Gamma_0^*(\lambda), \quad (27)$$

où $T_j = H J_j - H_0 J_j$, $j = 1, 2$ et

$$(\Gamma_0(\lambda)f)(\omega) = 2^{-1/2} k^{(d-2)/2} \hat{f}(k\omega), \quad k = \lambda^{1/2} > 0, \quad \omega \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (28)$$

est à un facteur numérique près la restriction de la transformée de Fourier de f à la sphère de rayon k . Pour justifier cette formule on a besoin de deux choses : d'une part on a besoin d'estimations de propagation pour définir le terme contenant la résolvante $\Gamma_0(\lambda) T_1^* R(\lambda + i0) T_2 \Gamma_0^*(\lambda)$ et d'autre part on a besoin de pouvoir définir la restriction à la sphère \mathbb{S}_k^{d-1} de rayon k de l'opérateur $J_1^* T_2$. Dans le cas d'une perturbation électrique à courte portée cette formule se ramène à la formule de Born

$$S(\lambda) = Id - 2i\pi\Gamma_0(\lambda) (V - V R(\lambda + i0) V) \Gamma_0^*(\lambda), \quad (29)$$

dont la formule (27) est en quelque sorte une généralisation.

Cette approche fut reprise par Yafaev dans [Yaf98] avec quelques différences :

- les solutions exactes de l'équation eiconale (25) furent remplacées par des solutions “approchées” (à des termes courte portée près) mais explicites (cf. section 2.1.1),
- la démonstration de l'existence et de la complétude des opérateurs d'onde reposait sur la théorie des perturbations lisses (cf. section 1.1.1) et non sur la méthode de Enss.

C'est cette approche que l'on va reprendre dans cette thèse.

L'existence des opérateurs d'onde (24) dans la théorie des perturbations lisses repose sur un critère du type (23) : on doit montrer que la perturbation effective

$$T = HJ - JH_0 \quad (30)$$

admet une décomposition du type

$$T = K^* BK_0 \quad (31)$$

où B est un opérateur borné et K, K_0 sont, respectivement, localement H et H_0 -lisses, c'est à dire vérifient

$$\sup_{\substack{f \in E(\Lambda)\mathcal{H} \\ \|f\|=1}} \int_{\mathbb{R}} \|Ke^{-itH} f\|^2 dt < \infty \quad (32)$$

pour tout intervalle borné $\Lambda \subset \sigma_{ac}(H)$. L'isométrie et la complétude de ces opérateurs d'onde nécessitent que l'identification J soit “suffisamment” proche d'un opérateur unitaire, plus précisément il faut que

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J^* J - Id)e^{-itH_0} E_0(\Lambda) = 0, \quad s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J J^* - Id)e^{-itH} E(\Lambda) = 0. \quad (33)$$

Du fait des rôles symétriques joués par les opérateurs H_0 et H cette théorie n'est pas intrinsèquement une théorie perturbative.

Les estimations de type (32) se ramènent à des estimations sur les valeurs de la résolvante $R(z) = (H - z)^{-1}$, dans une topologie convenable, lorsque z s'approche du spectre absolument continu. La plus classique de ces estimations est le *principe d'absorption limite*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \|\langle x \rangle^{-p} R(z) \langle x \rangle^{-p}\| < \infty, \quad p > 1/2, \quad \Lambda \subset (0, \infty). \quad (34)$$

où Λ est un intervalle compact. En particulier elle implique que l'opérateur $\langle x \rangle^{-p}$, $p > 1/2$, est localement H -lisse. D'un point de vue physique le principe d'absorption limite admet une interprétation simple. Comme

$$\|\langle x \rangle^{-p} e^{-itH} f\|^2 = (\langle x \rangle^{-2p} e^{-itH} f, e^{-itH} f)_{\mathcal{H}},$$

cette quantité correspond à la moyenne de l'observable quantique $\langle x \rangle^{-2p}$. Dans l'approximation semi-classique cette quantité doit donc être proche de la valeur de $\langle x(t) \rangle^{-2p}$ le long de la trajectoire classique correspondante, asymptotiquement libre. Comme le long de cette trajectoire on doit avoir $|x(t)| \sim |t|$ on peut donc espérer que

$$\| \langle x \rangle^{-p} e^{-itH} f \|^2 \sim \langle t \rangle^{-2p}$$

qui est intégrable si et seulement si $p > 1/2$. Le principe d'absorption limite suffit à traiter le cas des perturbations à courtes portées. Par exemple dans le cas électrique si $V(x) = O(\langle x \rangle^{-\rho})$, $\rho > 1$ en prenant $J = Id$ on factorise facilement la perturbation en produit de perturbations H et H_0 -lisses :

$$T = H - H_0 = V(x) = \langle x \rangle^{-\rho/2} \left(\langle x \rangle^{\rho/2} V(x) \langle x \rangle^{\rho/2} \right) \langle x \rangle^{-\rho/2},$$

et on peut alors justifier la formule de représentation stationnaire (29) pour $S(\lambda)$.

Dans le cas des potentiels à longue portée le principe d'absorption limite ne suffit plus. Pour le potentiel de Coulomb[†] $V(x) = c/|x|$ il suffirait que le principe d'absorption limite soit vrai pour $p = 1/2$. Hélas ceci n'est pas possible car l'estimation (34) est déjà violée dans le cas de l'opérateur libre H_0 si $p = 1/2$. C'est pourquoi on a besoin de l'*estimation de radiation*. Cette estimation affirme que l'opérateur

$$G = \langle x \rangle^{-1/2} \nabla^\perp = \langle x \rangle^{-1/2} (\nabla - \hat{x}(\hat{x} \cdot \nabla)), \quad (35)$$

est localement H -lisse. Là encore l'interprétation physique est très instructive. Le long d'une trajectoire classique la vitesse tend à s'aligner, aux grandes distances, avec la direction du vecteur position. En particulier la partie orthoradiale de cette vitesse doit décroître avec le temps. Ce gain de décroissance doit rendre l'observable quantique G intégrable en temps

$$\| \langle x \rangle^{-1/2} \nabla^\perp e^{-itH} f \|^2 \sim \langle t \rangle^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Pour des opérateurs différentiels à coefficients vérifiant (21) l'estimation de radiation s'obtient grâce au principe d'absorption limite (cf. théorème 1.3.13).

Il existe de nombreuses méthodes pour démontrer le principe d'absorption limite, mais la plus simple est certainement la méthode des commutateurs de Mourre (cf. section 1.1.3). Sous l'hypothèse principale qu'il existe un opérateur auto-adjoint \mathcal{A} tel que le commutateur $i[H, \mathcal{A}]$ soit essentiellement positif cette méthode fournit des estimations pour la résolvante de H , "sandwichée" par des fonctions de l'opérateur \mathcal{A} , desquelles on peut déduire le principe d'absorption limite [PSS81]. Pour l'opérateur de Schrödinger cette approche fonctionne en choisissant comme opérateur conjugué \mathcal{A} le générateur des dilatations $(x \cdot D + D \cdot x)/2$. Une fois de plus pour comprendre ce choix l'interprétation physique de cette méthode est riche d'enseignement. En mécanique classique l'obtention de l'estimation $d^2|x(t)|^2/dt^2 \geq c > 0$ le long d'une trajectoire assure que cette trajectoire

[†]En fait pour n'importe quel potentiel à longue portée.

est asymptotiquement libre (i.e. $|x(t)| \sim |t|$ dont on a déjà vu le lien avec le principe d'absorption limite). L'observable quantique qui correspond à $d^2|x(t)|^2/dt^2$ étant le double commutateur $i[H, i[H, |x|^2]]$ celui-ci doit donc être essentiellement positif. Ceci conduit directement au choix $\mathcal{A} = i[H, |x|^2]$. Dans le cas électrique $i[H, |x|^2] = 2(x.D + D.x)$, on comprend alors facilement le rôle très important joué par le générateur des dilatations $(x.D + D.x)/2$ dans la théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger[†].

5 Les résultats principaux

Dans cette thèse on considère l'opérateur de Schrödinger (14) avec un potentiel électromagnétique $(V, A) = (V_L, A_L) + (V_S, A_S)$ dont la partie longue portée (V_L, A_L) vérifie (21) pour tout α et la partie courte portée (V_S, A_S) vérifie (21) pour $|\alpha| = 0$ avec un $\rho = \rho' = \rho_0 > 1$. Contrairement à d'autres travaux on ne fait pas ici d'hypothèse de jauge sur le potentiel magnétique A_S^\ddagger . Ceci permettra de retrouver les résultats de [LT87, Nic91, NR91] comme des cas particuliers.

L'addition de termes à courte portée pose quelques problèmes pour obtenir le principe d'absorption limite. En effet la théorie de Mourre ne conduit directement à l'estimation (34) que si la partie courte portée (V_S, A_S) vérifie (21) pour $|\alpha| = 0$ et un $\rho = \rho' = \rho_0 \geq 2$ [PSS81]. Cependant une petite modification de cette méthode, proposée dans [Yaf85] dans le cas électrique $A = 0$, permet d'obtenir le principe d'absorption limite sous l'hypothèse $\rho_0 > 1$. Ce résultat technique est démontré dans le cas magnétique dans l'Appendice A.

Via le théorème de multiplication des matrices de diffusion le principe d'absorption limite nous permet d'éliminer les termes à courte portée et de se concentrer sur l'étude des termes à longue portée. Pour l'opérateur

$$H_1 = (D - A_L)^2 + V_L,$$

l'ensemble des estimations de résolvante dont on a besoin est obtenu par la méthode de Mourre (cf. sections 1.3.2 et 1.3.3), comme dans le cas électrique $A = 0$, avec le choix $\mathcal{A} = (x.D + D.x)/2$. Cependant pour les estimations de propagation microlocales on les redémontre pour une classe plus large d'opérateurs pseudo-différentiels par rapport à [IK84, IK85b, Jen85].

Dès que ce travail préliminaire est terminé on peut démarrer la théorie de la diffusion pour le couple H_0, H . Il est naturel de construire les identifications J_\pm sous forme d'opérateurs pseudodifférentiels (opd). En effet ce formalisme permet facilement de traiter les combinaisons des opérateurs J_\pm et T_\pm avec les opérateurs $\langle x \rangle^{-p}$, G , H_1 , H_0 , qui sont eux

[†]Dans le cas électromagnétique on peut encore faire le choix $\mathcal{A} = (x.D + D.x)/2$ même s'il n'est pas le plus naturel.

[‡]Mis à part la condition $\operatorname{div} A \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui sert à assurer que le domaine de H est bien $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$ cf. section 1.3.1.

mêmes des opd, ou de manipuler les adjoints J^* (cf. section 1.2). En plus cette théorie nous fournit des critères simples de continuité et de compacité très utiles. Cependant pour traiter le cas général $\rho > 0$ dans (21) on doit manipuler des opd du type $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m$ avec $\varrho = \rho$ et $\delta = 1 - \rho$. Lorsque $\rho \leq 1/2$ on ne peut plus utiliser la théorie générale de Hörmander pour ces classes d'opd. C'est pourquoi on est obligé d'utiliser les classes de symboles oscillants $\mathcal{C}^m(\Phi)$, $\Phi \in \mathcal{S}^r$, $r \in [0, 1)$, introduites par Yafaev dans [Yaf00a], qui tiennent compte de la structure particulière du symbole des opd que l'on manipule (cf. section 1.2.2). On rencontre aussi d'autres difficultés lors de la restriction de certains opd à la sphère (voir section 1.2.3).

Pour développer la théorie des perturbations lisses pour le couple H_0, H_1 on cherche le symbole des modificateurs sous la forme $j_{\pm}(x, \xi) = \exp(i\Phi_{\pm}(x, \xi))$ de telle sorte que $\Psi_{\pm}(x, \xi) = \exp(i\langle x, \xi \rangle)j_{\pm}(x, \xi)$ soit une solution approchée, à des termes courte portée près, de l'équation de Schrödinger stationnaire $H\Psi_{\pm} = |\xi|^2\Psi_{\pm}$ pour que la perturbation effective $T_{\pm} = HJ_{\pm} - J_{\pm}H_0$ soit un opd d'une classe $\mathcal{C}^{-1-\varepsilon}(\Phi_{\pm})$, $\varepsilon > 0$. Si cela était possible on obtiendrait, grâce au principe d'absorption limite, la décomposition (31) avec $K = K_0 = \langle x \rangle^{-1/2-\varepsilon/2}$, la forme du symbole de J_{\pm} assurant que les conditions (33) soient vérifiées. En injectant l'Ansatz précédent pour Ψ_{\pm} dans l'équation de Schrödinger on obtient que la phase $\varphi_{\pm}(x, \xi) = \langle x, \xi \rangle + \Phi_{\pm}(x, \xi)$ doit vérifier l'équation eiconale (25), à des termes courte portée près, et les estimations (26) pour tout α . Dans la section 2.1.1 on arrive à construire de telles solutions φ_{\pm} par approximations successives mais celles-ci ne satisfont (26) qu'en dehors d'un voisinage conique (arbitrairement petit) de la direction $\mp\xi$. C'est pourquoi on doit ajouter dans le symbole de J_{\pm} des fonctions de troncatures $\zeta_{\pm}(x, \xi)$, asymptotiquement homogènes de degré 0, pour éliminer ces "mauvaises" directions. On ajoute aussi une fonction de troncature $\psi(|\xi|^2)$ qui permet de localiser notre étude sur un intervalle d'énergie $\Lambda \subset (0, \infty)$ borné et disjoint de zéro. Les termes supplémentaires qui apparaissent dans le symbole de la perturbation T_{\pm} ne décroissent que comme $|x|^{-1}$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Grâce au calcul pseudo-différentiel et à l'estimation de radiation on obtient quand même une décomposition du type (31)

$$T_{\pm} = \langle x \rangle^{-p} B_{\pm}^{(r)} \langle x \rangle^{-p} + G^* B_{\pm}^{(s)} G, \quad (36)$$

avec $B_{\pm}^{(r)}$ et $B_{\pm}^{(s)}$ bornés. Cette décomposition assure l'existence des opérateurs d'onde $W_{\pm}(H_1, H_0, J_{\sigma})$, $W_{\pm}(H_0, H_1, J_{\sigma})$ avec $\sigma = "+"$ ou $\sigma = "-"$. Par un argument de phase non-stationnaire on obtient alors facilement la première estimation de (33) et donc l'isométrie des opérateurs d'onde $W_{\pm}(H_1, H_0, J_{\pm})$. La complétude résulte alors de ce que $(J_{\pm}J_{\pm}^* + J_{\mp}J_{\mp}^* - Id)E_1(\Lambda)$ est un opérateur compact (pour un choix judicieux des fonctions ζ_{\pm}) et de l'équation

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} J_{\mp}J_{\mp}^* e^{-itH_1} E_1(\Lambda) = 0.$$

Par des arguments de phase stationnaire, cette fois, on montre que cette construction coïncide avec les traditionnelles constructions dépendantes du temps, ce qui nous permet de retrouver certains résultats déjà connus et entre autres on récupère que les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0, J_{\pm})$ ne dépendent pas du choix de ζ_{\pm} .

On obtient alors la formule de représentation stationnaire suivante pour la matrice de la diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ (qui ne diffère de la matrice de diffusion $S(\lambda; H, H_0)$ que par des termes compacts)

$$S(\lambda) = -2i\pi\Gamma_0(\lambda) (J_+^*T_- - T_+^*R(\lambda + i0)T_-) \Gamma_0^*(\lambda). \quad (37)$$

A partir des estimations de propagation microlocales et en utilisant l'équation de transport dans la construction des modificateurs on peut montrer que le noyau du terme de $S(\lambda)$ contenant la résolvante de H est une fonction régulière $C^k(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ avec k arbitraire. Ce terme peut donc être considéré comme un "reste" dans la formule (37) c'est en particulier un opérateur compact sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$. On a donc juste besoin de se concentrer sur le terme $S_0(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) (J_+^*T_-) \Gamma_0^*(\lambda)$ qui est la restriction d'un opd à la sphère de rayon $k = \lambda^{1/2}$. L'existence de cette restriction peut être justifiée par une décomposition de type (36) pour l'opérateur $J_+^*T_-$ mais la représentation de cette restriction en tant qu'opd pose certaines difficultés (cf. section 1.2.3). Les singularités du noyau de cet opérateur étant contenues dans la diagonale $\omega = \omega'$, pour l'étude des propriétés spectrales de $S(\lambda)$ il nous suffit d'étudier l'opérateur $\chi_0 S_0(\lambda) \chi_0$ où χ_0 est une fonction de troncature $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ supporté au voisinage d'un point ω_0 , ceci pour chaque $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Cette remarque nous permet de travailler avec une représentation de l'opd $\chi_0 S_0(\lambda) \chi_0$ dans une carte locale spéciale du voisinage de ω_0 sur la sphère (cf. Figure 1.1). Dans cette carte locale on arrive à montrer qu'à des termes compacts près $\chi_0 S_0(\lambda) \chi_0$ est un opd d'amplitude

$$\exp(i\Theta(y/k, k\omega, k\omega')) \chi_0(\omega) \chi_0(\omega'), \quad \omega, \omega' \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (38)$$

où y appartient à Λ_{ω_0} l'hyperplan de \mathbb{R}^d orthogonal à ω_0 . La fonction Θ s'exprime directement à partir des solutions $\varphi_\pm(x, \xi) = \langle x, \xi \rangle + \Phi_\pm(x, \xi)$ de l'équation eiconale (25) par

$$\Theta(x, \xi, \xi') = \Phi_-(x, \xi') - \Phi_+(x, \xi).$$

L'asymptotique de Θ quand $|y| \rightarrow \infty$ ne dépend donc que du comportement des potentiels A_L et V_L à l'infini.

Lorsque A_L et V_L sont des fonctions asymptotiquement homogènes de degré $-\rho \in (0, 1)$ la fonction $\Theta(y/k, k\omega, k\omega')$ est elle aussi asymptotiquement homogène en y mais de degré $1 - \rho$. Le fait que $\Theta(y/k, k\omega, k\omega') \rightarrow \infty$ quand $|y| \rightarrow \infty$ permet de montrer que le spectre de $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité dans ce cas. Ce résultat est en particulier valable dans le cas où $V_L = 0$ et A_L est asymptotiquement homogène de degré $-\rho$, $\rho \in (1/2, 1)$ et vérifie l'hypothèse de jauge transverse. Dans cette situation les opérateurs d'onde usuels (8) existent, la matrice de diffusion $S(\lambda)$ est définie en terme de ces opérateurs d'onde usuels et pourtant son spectre recouvre bien le cercle unité! Ce résultat contredit un résultat de Nicoleau [Nic94] qui affirme que dans ce cas $S(\lambda) - Id$ est un opérateur compact. Ce type de résultats est radicalement différent de ce qu'on obtient pour des potentiels à courte portée où la matrice de diffusion est une perturbation compacte de l'identité et son spectre est composé de valeurs propres ne pouvant s'accumuler qu'au point 1. Dans cette situation le symbole principal de $S(\lambda)$ vaut 1 ce qui correspond, en terme de singularité diagonale, à la présence de la fonction de Dirac dans le noyau de $S(\lambda)$. Ces résultats soulignent les différences qualitatives entre les natures des singularités diagonales dans les cas longue et courte portées.

6 L'effet Aharonov-Bohm

Le fait que l'opérateur de Schrödinger s'exprime en fonction des potentiels V et A et non du champ (E, B) a conduit Y. Aharonov et D. Bohm à concevoir une expérience aux conséquences troublantes[†] [AB59]. Un solénoïde cylindrique “infiniment” long parcouru par un courant génère un champ magnétique contenu à l'intérieur du solénoïde. Le potentiel magnétique associé à ce champ ne peut pas être à support compact puisque d'après la formule de Stokes on a

$$\phi = \oint_{|x|=R} A(x) \vec{dl} = \int \int_{|x| \leq R} B(x) dz = C^{ste}. \quad (39)$$

En fait en jauge transverse le potentiel s'écrit à l'extérieur du solénoïde de la manière suivante

$$A(x) = \frac{\phi}{2\pi} (-x_2, x_1)/|x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad |x| \geq R > 0, \quad \phi \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

où ϕ est le flux du champ magnétique B au travers de la section du solénoïde. En particulier ce potentiel ne décroît à l'infini que comme $|x|^{-1}$ et rentre donc dans le cadre des potentiels à longue portée. Aharonov et Bohm considèrent deux faisceaux d'électrons contournant un solénoïde par deux chemins différents et prédirent l'apparition d'interférences[‡] entre les deux faisceaux ainsi obtenus. Le déphasage entre les deux faisceaux est en fait la circulation du potentiel magnétique A le long du contour encerclant le solénoïde qui d'après (39) est égal au flux du champ B : $\delta_{AB} = \phi$. Il y a donc des interférences entre

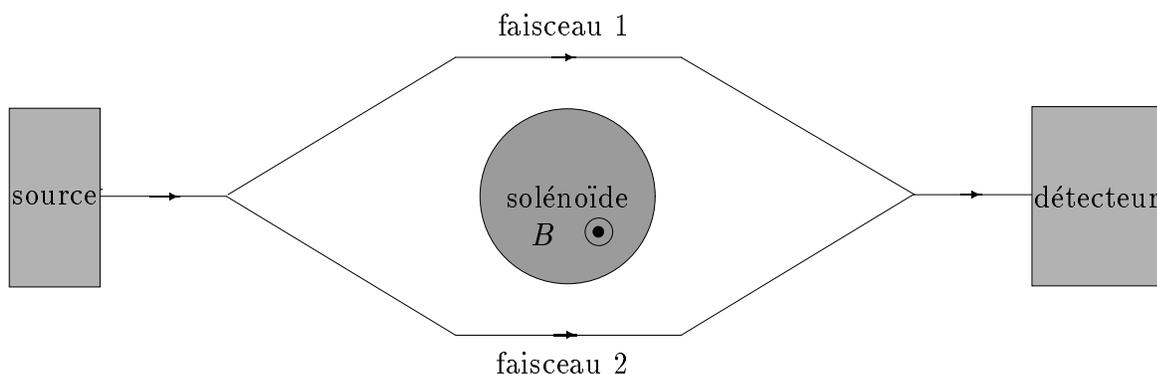


FIG. 3: L'expérience d'Aharonov et Bohm

les deux faisceaux si δ_{AB} n'est pas un multiple de 2π . Pour bien comprendre l'importance

[†]En fait il existe une controverse sur la paternité de cette découverte, celle-ci reviendrait plutôt à W. Ehrenberg et R. W. Siday [ES49].

[‡]Dont la mise en évidence expérimentale fut faite par Chambers [Cha60].

de cette expérience il faut se rappeler qu'en mécanique classique les équations du mouvement de la particule peuvent s'exprimer en fonction du seul champ électromagnétique (E, B) . Du point de vue de la mécanique classique on est donc confronté à un paradoxe : du fait de leur trajectoire les électrons ne sont jamais entré en interaction avec le champ magnétique B et pourtant ils ont subit son action ! C'est la source de toute la polémique autour de l'effet Aharonov-Bohm [AB61, AB63].

Cet exemple a été repris par de très nombreux auteurs depuis plus de quarante ans (cf. [Rui83]). L'approche la plus souvent utilisée pour le potentiel (40) repose essentiellement sur la construction explicite (en terme de fonctions de Bessel) de fonctions propres généralisées du spectre positif de l'opérateur $(D - A)^2$. Cette approche permet de montrer que dans ce cas le spectre de $S(\lambda)$ consiste en deux valeurs propres de multiplicités infinies $\exp(\pm i\phi/2)$. On peut alors calculer exactement la section efficace différentielle

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2(\phi/2)}{\sin^2(\theta/2)}, \quad 2 \sin(\theta/2) = |\omega - \omega_0|, \quad (41)$$

et vérifier que la section efficace totale (3) s'annule lorsque le flux est un multiple de 2π . Cette construction est rendue possible pour deux raisons :

- d'une part la forme radiale du potentiel (40) permet une séparation des variables dans l'équation de Schrödinger stationnaire,
- d'autre part les auteurs imposent en plus une condition aux limites en $|x| = R$ (avec parfois $R = 0$) qui conduit aux résultats.

De récents travaux [AT98, DŠ98] ont montré qu'il était possible de choisir des conditions aux limites différentes (non-invariante par rotation) de celles utilisées jusqu'ici conduisant à des résultats différents sans pour autant que ces conditions aux limites admettent une interprétation physique évidente. Du point de vue de la théorie de la diffusion cette approche n'est pas satisfaisante. En effet on s'attend à ce que les propriétés principales de la matrice de diffusion soient déterminées par l'asymptotique aux grandes distances des potentiels et non pas par une condition à l'origine.

Dès que le champ magnétique $F_{j,k}(x)$ est à support compact il découle de (20) que, en jauge transverse, le potentiel A est une fonction asymptotiquement homogène de degré -1 . Cette décroissance du potentiel vecteur A en $1/|x|$ est cruciale en théorie de la diffusion puisqu'elle fait de A un potentiel à longue portée alors que, du point de vue de la mécanique classique, la situation semble être à courte portée. Dans la section 2.3.2 on étudie en détail deux familles de tels potentiels. Il s'agit d'exemples physiques de champs magnétiques à support compact générés par des solénoïdes parcourus par un courant I (cf. Figure 4) :

le solénoïde infini (d=2) c'est un cylindre (dont la section n'est pas forcément un disque) de direction l'axe des z . Dans ce cas le champ magnétique B est de direction constante, l'axe des z , et nul à l'extérieur du solénoïde. Dans cette dernière zone le potentiel vecteur A s'exprime, en coordonnées cylindriques, par

$$A(x) = f(\vartheta)(-x_2, x_1)/|x|^2, \quad |x| \geq R > 0, \quad (42)$$

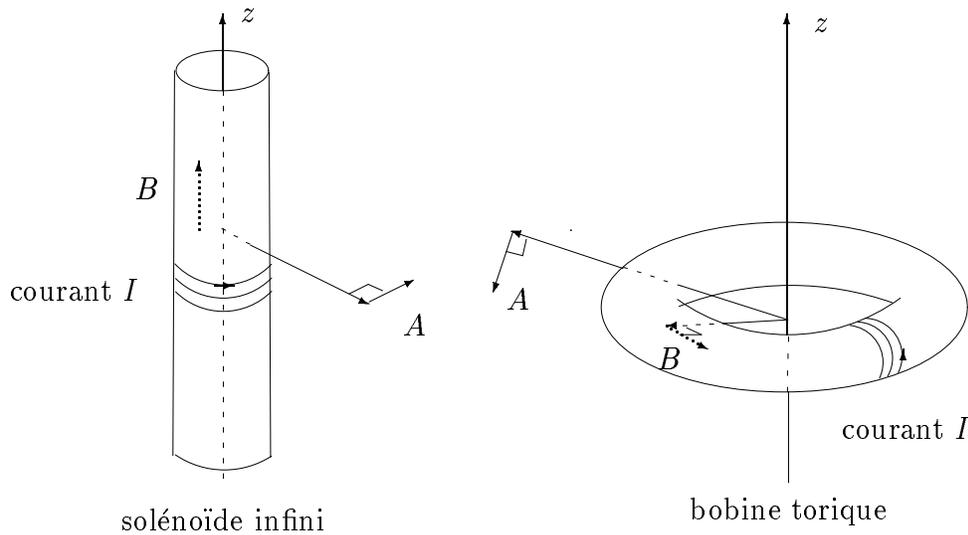


FIG. 4: Exemples de champs magnétiques à support compact

où f est une fonction 2π -périodique et C^∞ . On peut noter que

$$\phi = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

est le flux du champ magnétique au travers de la section du solénoïde.

la bobine torique (d=3) c'est un tore de révolution autour de l'axe des z . Le champ magnétique est perpendiculaire à la section du tore (qui n'est pas forcément un disque) et nul en dehors du tore. A grande distance le potentiel vecteur s'exprime en coordonnées sphériques[†] par

$$A(x) = \frac{f(\varphi)}{|x|} \vec{e}_\varphi, \quad (43)$$

où f est une fonction positive et C^∞ (et φ est la colatitude). Le flux de B au travers de la section du solénoïde est donné par

$$\phi = \int_0^\pi f(\varphi) d\varphi.$$

Ces caractéristiques peuvent être retrouvées en écrivant l'équation $\text{rot}A = 0$ en coordonnées polaires ou sphériques, respectivement, et en tenant compte de la symétrie de

[†] \vec{e}_φ est un vecteur unitaire orthoradial appartenant au plan contenant l'axe du solénoïde et x (cf. (2.3.20)).

révolution. Le potentiel de Aharonov-Bohm (40) est un cas particulier du solénoïde infini correspondant à $f(\vartheta) = \phi/(2\pi)$ (dans ce cas la section du solénoïde est un disque de rayon constant). La famille considérée ici étant bien plus générale et contient en particulier des potentiels non-invariant par rotation.

On peut appliquer la démarche développée dans cette thèse à ces deux exemples qui vérifient toutes les hypothèses que l'on s'est fixé. De plus de par leur forme explicite on peut calculer "exactement" le symbole principal $s_0^b(b, \omega; \lambda) = \exp(i\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega))$, $\langle b, \omega \rangle = 0$, de l'opérateur $S_0(\lambda)$. Celui-ci ne dépend pas de l'énergie λ et on trouve d'une part pour le solénoïde infini

$$\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega) = \det(b, \omega) \int_{\theta_\omega - \pi}^{\theta_\omega} f(\vartheta) d\vartheta,$$

où θ_ω est l'angle polaire associé à ω , et d'autre part pour la bobine torique

$$\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega) = \int_{\varphi_\omega}^{\pi - \varphi_\omega} f(\varphi) d\varphi,$$

où φ_ω est la colatitude associée à ω . En particulier la fonction $\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega)$ ne tend pas vers l'infini quand $|b| \rightarrow \infty$ et ceci quelque soit $\lambda > 0$ puisque λ n'apparaît pas dans ces expressions. La fonction Θ admet ici une interprétation géométrique très simple : il s'agit de la circulation de A le long du contour formé par deux droites de direction ω l'une passant par l'origine (\mathcal{D}_0) l'autre par le point $b/\sqrt{\lambda}$ (\mathcal{D}_1) (cf. Figures 2.2 et 2.3). Cette remarque nous permet d'affirmer que les résultats des sections 2.3.2 et 2.3.3 sont conservés si on choisit une autre jauge que la jauge transverse pour A , la circulation de A le long des droites \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 étant égal au flux du champ magnétique B au travers de toute surface bordée par \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 . Dans tous ces cas le spectre essentiel de $S(\lambda)$ coïncide avec l'image par la fonction $\nu \mapsto \exp(i\nu)$ l'ensemble des valeurs prises par la fonction $\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega)$. Cette fonction ne pouvant pas tendre vers ∞ lorsque $|b| \rightarrow \infty$ le spectre essentiel de $S(\lambda)$ peut ne pas recouvrir tout le cercle unité voire même, en dimension deux, être concentré en deux points ! Dans le cas du potentiel (40) on retrouve justement que le spectre essentiel de $S(\lambda)$ est concentré en deux points $\exp(\pm i\phi/2)$ et on peut retrouver la section efficace différentielle (41), modulo un terme de singularité plus faible, en calculant la transformée de Fourier (en la variable y) de la fonction (38). Par rapport aux autres méthodes l'avantage de l'approche développée dans cette thèse est que les résultats obtenus sont indépendants de ce qui se passe dans une boule, de rayon arbitraire, autour de l'origine et même de tous les termes qui ont un comportement à courte portée.

Ces quelques exemples montrent toute la diversité des résultats que l'on peut obtenir dans le cas des potentiels asymptotiquement homogènes de degré -1 contrastant avec les cas $\rho > 1$ et $1 > \rho > 0$. Il faut noter aussi que dans le cas où $A_L = 0$ et V_L est asymptotiquement homogène de degré -1 la fonction $\Theta(b/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega)$ a en général une croissance logarithmique sauf pour les potentiels de type dipolaire, i.e. vérifiant pour tout $|x| \geq R > 0$, $V(-x) = -V(x)$. Mais pour ce type de potentiels le spectre de $S(\lambda)$ dépend de l'énergie λ contrairement au cas magnétique.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Théorie de la diffusion abstraite

Le but de cette première partie est de collecter un certain nombre de résultats abstraits qui constituent la base théorique de l'approche présentée. Dans la suite on considère des opérateurs, H_0, H_1 et H , auto-adjoints sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On dénotera par E_0, E_1 et E leurs mesures spectrales, P_0, P_1 et P les projecteurs sur leurs sous-espaces absolument continus respectifs et de même $R_0(z), R_1(z)$ et $R(z)$ leurs résolvantes.

1.1.1 Théorie des perturbations lisses

La construction des opérateurs d'onde (24) présentée dans cette thèse repose sur la théorie des perturbations lisses. On pourra en trouver une présentation plus détaillée dans [Yaf92, Yaf00b]. La notion d'opérateur H -lisse introduite par Kato [KI66] en est le concept principal. Elle sera utilisée ici sous sa forme locale proposée par Lavine [Lav71, Lav72].

Définition 1.1.1 *Soit K un opérateur H -borné. On dit que K est H -lisse s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes qui suivent*

$$\sup_{f \in \mathcal{D}(H), \|f\|=1} \int_{\mathbb{R}} \|K e^{-itH} f\|^2 dt < \infty \quad (1.1.1)$$

$$\sup_{\varepsilon > 0, \lambda \in \mathbb{R}} \|K(R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon))K^*\| < \infty \quad (1.1.2)$$

On dit que K est localement H -lisse sur un intervalle $\Lambda \subset \mathbb{R}$ si $KE(\Lambda)$ est H -lisse.

La proposition suivante permet de construire de nouveaux opérateurs H -lisses à partir d'un opérateur H -lisse K , mais elle est aussi utile dans le cas $K = 0$.

Proposition 1.1.2 *Soient M un opérateur H -borné et K un opérateur H -lisse sur Λ . Si pour tout $u \in E(\Lambda)\mathcal{H}$*

$$\|Gu\|^2 \leq (i[H, M]u, u) + \|Ku\|^2. \quad (1.1.3)$$

alors G est H -lisse sur Λ .

La théorie des perturbations H -lisses donne un critère simple d'existence des opérateurs d'onde (qui peut être facilement déduit de l'estimation (1.1.1)).

Proposition 1.1.3 *Soient H, H_0 un couple d'opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} , J un opérateur borné et $\Lambda \subset \sigma_{ac}(H_0) \cap \sigma_{ac}(H)$ un intervalle. Supposons que $T = HJ - JH_0$ admette la décomposition suivante*

$$T = \sum_{i=1}^N K_i^* B_i K_{0,i}, \quad (1.1.4)$$

ou les $K_{0,i}$ et K_i sont respectivement H_0 - et H -lisses sur Λ et les B_i sont des opérateurs bornés. Alors les opérateurs d'onde

$$W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} E_0(\Lambda)$$

et $W_{\pm}(H_0, H; J^*, \Lambda)$ existent et sont réciproquement adjoints.

Les opérateurs d'onde "locaux" sont plus simples à manipuler (par exemple dans le cas où il existe des valeurs propres plongées dans le spectre absolument continu), de plus leur existence permet de construire les opérateurs d'onde "globaux".

Proposition 1.1.4 *Soient $\Lambda_n \subset \mathbb{R}$, $n = 1, \dots$ une famille d'intervalles tels que les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda_n)$ existent pour tout n . Si la mesure de Lebesgue des ensembles $\sigma_{ac}(H) \setminus (\cup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n)$ et $\sigma_{ac}(H_0) \setminus (\cup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n)$ est nulle alors les opérateurs d'onde*

$$W_{\pm}(H, H_0; J) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} P_0 \quad (1.1.5)$$

et $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ existent.

Le choix de l'identification J peut être différent pour $t \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow -\infty$. Dans tous les cas la propriété d'entrelacement $W_{\pm}H_0 = HW_{\pm}$ et l'isométrie des opérateurs d'onde ne sont pas automatiquement vérifiées. Elles ne le sont que sous la condition que pour tout $f \in P_0\mathcal{H}$ on ait

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J e^{-itH_0} f\| = \|f\|.$$

On peut aussi remarquer que comme pour tout opérateur compact K sur \mathcal{H} et pour tout $f \in \mathcal{H}$ on a

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} K e^{-itH_0} P_0 f = 0, \quad (1.1.6)$$

le choix du ou des modificateurs ne se fait qu'à un terme compact près.

Proposition 1.1.5 *Soient J_1 et J_2 deux opérateurs compacts sur \mathcal{H} . Si $J_1 - J_2$ est compact, ou au moins pour tout intervalle compact Λ l'opérateur $(J_1 - J_2)E_0(\Lambda)$ est compact, alors les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0; J_1)$ et $W_{\pm}(H, H_0; J_2)$ coïncident.*

Dans cette approche il convient de redéfinir la notion de complétude asymptotique pour les opérateurs d'onde (1.1.5).

Définition 1.1.6 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}$. L'opérateur d'onde $W_{\pm}(H, H_0; J)$ est dit $(J-)$ complet sur $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$ si $\text{Ran}(W_{\pm}(H, H_0; J)) = E(\Lambda)\mathcal{H}$.*

A partir de cette définition on peut exprimer l'isométrie et la complétude des opérateurs d'onde (1.1.5) en terme d'opérateurs d'onde auxiliaires.

Proposition 1.1.7 *Soient H, H_0 un couple d'opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} et J un opérateur borné tels que l'hypothèse (1.1.4) soit vérifiée. On note $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ les opérateurs d'onde définis par (1.1.5). L'isométrie, sur $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$, et la complétude, sur $E(\Lambda)\mathcal{H}$, des opérateurs d'onde W_{\pm} sont équivalentes à*

$$W_{\pm}(H_0, H_0; J^*J) = E_0(\Lambda) \Leftrightarrow s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J^*J - Id)E_0(\Lambda)e^{-itH_0} = 0, \quad (1.1.7)$$

$$W_{\pm}(H, H; J^*J) = E(\Lambda) \Leftrightarrow s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (JJ^* - Id)E(\Lambda)e^{-itH} = 0. \quad (1.1.8)$$

Le modificateur J doit donc être "proche" dans un certain sens d'un opérateur unitaire. Par exemple si $J^*J - Id$ et $JJ^* - Id$ sont compacts les conditions (1.1.7) et (1.1.8) sont remplies.

On aura aussi besoin d'un théorème de multiplication pour les opérateurs d'onde.

Proposition 1.1.8 *Soient H_0, H_1 et H trois opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} et J_0, J_1 deux opérateurs bornés. Si les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H_1, H_0; J_0)$ et $W_{\pm}(H, H_1; J_1)$ existent et sont complets alors les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0; J_1J_0)$ existent, sont complets et coïncident avec les opérateurs $W_{\pm}(H, H_1; J_1)W_{\pm}(H_1, H_0; J_0)$.*

1.1.2 Représentation stationnaire de la matrice de diffusion

Après les opérateurs d'onde nous avons besoin de définir un nouvel objet : la matrice de la diffusion. Dans cette sous-section on rappelle différents résultats tirés de [Yaf92, Yaf00b]. Commençons par définir l'opérateur de diffusion

$$S = S(H, H_0; J_+, J_-) = W_+(H, H_0; J_+)^*W_-(H, H_0; J_-). \quad (1.1.9)$$

Si les opérateurs d'onde sont isométriques et complets alors S est un opérateur unitaire sur $P_0\mathcal{H}$. Du fait de la propriété d'entrelacement S commute avec H_0 et se ramène donc à la multiplication par $S(\lambda; H, H_0) = S(\lambda; H, H_0; J_+, J_-)$ dans une représentation de \mathcal{H} où H_0 est diagonal. L'opérateur $S(\lambda)$ est appelé matrice de diffusion et demande une définition plus précise.

Théorème 1.1.9 *Supposons que le spectre de H_0 ait une multiplicité constante κ sur l'intervalle Λ , et considérons un espace de Hilbert \mathfrak{N}_0 auxiliaire de dimension κ . Alors d'après le théorème spectral il existe un opérateur unitaire*

$$F_0 : E_0(\Lambda)\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{L}^2(\Lambda, \mathfrak{N}_0)$$

vérifiant pour tout $f \in \mathcal{D}(H_0)$

$$(F_0 H_0 f)(\lambda) = \lambda(F_0 f)(\lambda).$$

En particulier la matrice de la diffusion $S(\lambda; H, H_0)$ est définie pour presque tout point $\lambda \in \Lambda$ par

$$S(\lambda; H, H_0) : \begin{array}{l} \mathfrak{N}_0 \longrightarrow \mathfrak{N}_0 \\ (F_0 f)(\lambda) \longmapsto (F_0 S f)(\lambda) \end{array}$$

On a besoin d'une formule de représentation stationnaire pour la matrice de la diffusion dans le cas où l'on choisit deux modificateurs différents, $J = J_+$ et $J = J_-$, pour construire les opérateurs d'onde W_+ et W_- . La théorie des perturbations lisses permet d'obtenir une telle formule. Si on note $(F_0 f)(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)f \in \mathfrak{N}_0$ alors formellement la matrice de diffusion peut s'écrire

$$S(\lambda; H, H_0) = \Omega_+(\lambda) - 2i\pi\Gamma_0(\lambda)(J_+^* T_- - T_+^* R(\lambda + i0)T_-)\Gamma_0^*(\lambda), \quad (1.1.10)$$

où [†]

$$\Omega_+(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)W_+(H_0, H_0; J_+^* J_-)\Gamma_0^*(\lambda). \quad (1.1.11)$$

La justification de (1.1.9) est très proche de celle du cas $J_+ = J_-$ et peut être trouvée dans [Yaf00b].

Théorème 1.1.10 *Soient \mathcal{G} un espace de Hilbert et $K_0, K : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{N}_0$ deux opérateurs respectivement H_0 - et $|H|^{1/2}$ -bornés. Supposons d'une part que l'opérateur*

$$Z_0(\lambda, K_0) = \Gamma_0(\lambda)K_0^* : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{N}_0, \quad (1.1.12)$$

est borné et que $Z_0^(\lambda, K_0) : \mathfrak{N}_0 \longrightarrow \mathcal{G}$ est fortement continu en $\lambda \in \Lambda$, et d'autre part que l'opérateur*

$$\mathcal{R}(z, K_+, K_-) = K_+ R(z)K_-^* : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad (1.1.13)$$

est borné et faiblement continu par rapport à z pour $\operatorname{Re} z \in \Lambda$ et $\operatorname{Im} z \geq 0$. Si on a les décompositions suivantes

$$T_\pm = K_\pm^* K_0, \quad J_+^* T_- = K_0^* B K_0,$$

[†]Comme $W_+(H_0, H_0; J_+^* J_-)$ commute avec H_0 il agit, dans la représentation spectrale associée à H_0 , comme la multiplication par $\Omega_+(\lambda)$.

ou B est un opérateur borné sur \mathcal{G} alors la matrice de la diffusion définie par (1.1.9) admet la représentation suivante

$$S(\lambda; H, H_0) = \Omega_+(\lambda) - 2i\pi Z_0(\lambda, K_0) B Z_0^*(\lambda, K_0) + 2i\pi Z_0(\lambda, K_0) \mathcal{R}(z, K_+, K_-) Z_0^*(\lambda, K_0). \quad (1.1.14)$$

En particulier $S(\lambda; H, H_0) - \Omega_+(\lambda)$ est faiblement continu en $\lambda \in \Lambda$.

L'équation (1.1.14) est une réécriture de (1.1.10) en somme de produit d'opérateurs bornés, elle donne un sens correct à la formule (1.1.10). L'hypothèse sur l'opérateur (1.1.12) est vérifiée si l'opérateur est H_0 -lisse, par contre celle sur K est un peu plus forte.

On a besoin dans cette étude d'un théorème de multiplication pour les matrices de diffusion, une sorte d'équivalent à la proposition 1.1.8. Les considérations qui vont suivre sont tirées de [Yaf92] chapitre 7 section 1 et de [Yaf00b] partie 2 section 10 références auxquelles on renvoie le lecteur pour plus de détails. Sous les hypothèses de la proposition 1.1.8 intéressons nous au cas où $J_1 = Id$ et $J_0 = J_\pm$ et où les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_1)$ et $W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)$ sont isométriques et complets. Dans ce cas l'opérateur de diffusion pour le couple H_0, H avec identifications J_\pm s'exprime en fonction de l'opérateur de diffusion le couple H_1, H par

$$S(H, H_0; J_+, J_-) = W_+(H_1, H_0; J_+)^* S(H, H_1; J_+, J_-) W_-(H_1, H_0; J_-). \quad (1.1.15)$$

Si on introduit les deux opérateurs

$$S^\pm(H, H_0) = W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)^* S(H, H_1; J_+, J_-) W_\pm(H_1, H_0; J_\pm), \quad (1.1.16)$$

il est clair que les opérateurs $S^\pm(H, H_0)$ sont unitairement équivalents à $S(H, H_1; J_+, J_-)$ et vérifient

$$S^+(H, H_0) = S(H, H_0; J_+, J_-) S(H_1, H_0; J_+, J_-)^* \quad (1.1.17)$$

$$S^-(H, H_0) = S(H_1, H_0; J_+, J_-)^* S(H, H_0; J_+, J_-) \quad (1.1.18)$$

Tous ces opérateurs commutent avec H_0 et dans la représentation spectrale où H_0 agit comme la multiplication par λ les opérateurs $S^\pm(H, H_0)$ se ramènent à la multiplication par la fonction à valeur opérateur $S^\pm(\lambda)$. On peut maintenant énoncer le théorème de multiplication.

Théorème 1.1.11 *Soient H_0, H_1 et H trois opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} et J_+, J_- deux opérateurs bornés. Supposons que les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_1), W_\pm(H_1, H_0; J_\pm)$ sont isométriques et complets et que les opérateurs $S^\pm(\lambda)$ sont définis par (1.1.16). Alors les matrices de diffusion pour les couples H, H_0 et H_1, H_0 (avec identification J_\pm) vérifient les relations*

$$S^+(\lambda) = S(\lambda; H, H_0) S(\lambda; H_1, H_0)^*, \quad S^-(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)^* S(\lambda; H, H_0). \quad (1.1.19)$$

Dans la représentation en intégrale directe associée à H_1

$$\begin{aligned} F_1 : E_1(\Lambda)\mathcal{H} &\longrightarrow L_2(\Lambda, \mathfrak{N}_1) \\ f &\longmapsto \Gamma_1(\lambda)f \end{aligned}$$

où \mathfrak{N}_1 est un espace de Hilbert auxiliaire (supposé de même dimension que \mathfrak{N}_0), l'opérateur $S(H, H_1)$ agit comme la multiplication par

$$S(\lambda; H, H_1) = \Gamma_1(\lambda)S(H, H_1)\Gamma_1^*(\lambda).$$

Les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H_1, H_0, J_{\pm})$ dans (1.1.16) permettent de passer de la représentation de \mathcal{H} associée à H_0 à celle associée à H_1 . Formellement, si on identifie $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}$ (qui sont de même dimension) alors $W_{\pm}(H_1, H_0, J_{\pm})$ agit dans \mathfrak{N} comme la multiplication par la fonction à valeur opérateur (unitaire)

$$w_{\pm}(\lambda) = \Gamma_1(\lambda)W_{\pm}(H_1, H_0, J_{\pm})\Gamma_0^*(\lambda). \quad (1.1.20)$$

Ces considérations permettent d'écrire que

$$S^{\pm}(\lambda) = w_{\pm}^*(\lambda)S(\lambda; H, H_1)w_{\pm}(\lambda). \quad (1.1.21)$$

A partir des équations (1.1.19) et (1.1.21) on déduit la proposition suivante.

Proposition 1.1.12 *Soit $p \in [1, \infty]$, sous les hypothèses du théorème 1.1.11 si l'opérateur $S(\lambda, H, H_1) - Id \in \mathfrak{S}_p$ alors $S(\lambda; H, H_0) - S(\lambda; H_1, H_0) \in \mathfrak{S}_p$. En particulier si $S(\lambda, H, H_1) - Id$ est un opérateur compact sur \mathfrak{N} alors $S(\lambda; H, H_0) - S(\lambda; H_1, H_0)$ est compact.*

Preuve A partir (1.1.19) et (1.1.21) on établit facilement l'identité suivante d'où découle le résultat

$$S(\lambda; H, H_0) - S(\lambda; H_1, H_0) = w_+^*(\lambda)(S(\lambda, H, H_1) - Id)w_+(\lambda)S(\lambda; H_1, H_0)$$

d'où découle le résultat en prenant la norme associé à l'idéal \mathfrak{S}^p . \square

1.1.3 La théorie de Mourre

Nous rappelons ici quelques résultats de la théorie de Mourre [Mou81, Mou83] et qui a connu de nombreux développements [PSS81, JMP84, Jen85, JP85]. On pose $\mathcal{H}_2 = \mathcal{D}(H)$ et $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(|H|^{1/2})$, munis de la norme du graphe, et \mathcal{H}_{-2} , \mathcal{H}_{-1} leurs duaux respectifs pour la norme

$$\|\psi\|_j = \|(Id + |H|)^{-j/2}\psi\|.$$

On a les inclusions suivantes

$$\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-1} \subset \mathcal{H}_{-2}.$$

La théorie de Mourre repose sur le concept d'opérateur conjugué à H .

Définition 1.1.13 Soient H et \mathcal{A} deux opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} . On dit que \mathcal{A} est n fois conjugué à H en $\lambda \in \mathbb{R}$ si \mathcal{A} vérifie les hypothèses suivantes

- i) $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(H)$ est dense dans \mathcal{H}_2 .
- ii) l'opérateur $e^{i\alpha\mathcal{A}}$ laisse \mathcal{H}_2 invariant et pour tout $f \in \mathcal{H}_2$ on a $\sup_{|\alpha| < 1} \|e^{i\alpha\mathcal{A}}f\|_2 < \infty$.
- iii) L'opérateur $i[H, \mathcal{A}]$ défini sur $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}_2$ s'étend en un opérateur B_1 borné de \mathcal{H}_2 vers \mathcal{H} . De même les commutateurs $B_j = i[B_{j-1}, \mathcal{A}]$ pour $j = 2, \dots, n$ définis sur $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}_2$ s'étendent en des opérateurs bornés de \mathcal{H}_2 vers \mathcal{H} .
- iv) Le commutateur $i[B_n, \mathcal{A}]$ défini sur $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}_2$ s'étend en un opérateur borné de \mathcal{H}_2 vers \mathcal{H}_{-2} .
- v) Il existe des constantes $c > 0$, $\delta > 0$ et un opérateur compact K sur \mathcal{H} tels que

$$E(\Lambda_\delta)i[H, \mathcal{A}]E(\Lambda_\delta) \geq cE(\Lambda_\delta) + E(\Lambda_\delta)KE(\Lambda_\delta), \quad \Lambda_\delta = (\lambda - \delta, \lambda + \delta). \quad (1.1.22)$$

Le rôle de l'hypothèse ii) est fondamentale (ce qui n'apparaît pas dans [CFKS87][†]). Par contre l'hypothèse iv) n'est pas totalement optimale. Sous les hypothèses i), ii), iii) le théorème du Viriel est bien vérifié [Mou81].

Théorème 1.1.14 (théorème du viriel) Si les hypothèses i), ii), iii) sont vérifiées par le couple H, \mathcal{A} en un point $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$E(\{\lambda\})i[H, \mathcal{A}]E(\{\lambda\}) = 0. \quad (1.1.23)$$

On peut alors décrire la partie du spectre de l'opérateur H pour laquelle l'estimation (1.1.22) est vérifiée.

Théorème 1.1.15 Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que les hypothèses i), ii), iii) et v), pour $n = 1$, soient vérifiées pour H et \mathcal{A} en tout point $\lambda \in \Lambda$. Alors $\sigma_p(H) \cap \Lambda$ est un ensemble discret de valeurs propres, toutes de multiplicité finie.

L'absence de spectre singulièrement continu permet d'obtenir des estimations pour les valeurs de la résolvante $R(z) = (H - z)^{-1}$ au bord de l'axe réel $\text{Im } z \rightarrow 0^\pm$.

[†]Un contre exemple aux hypothèses de [CFKS87] ainsi qu'une discussion sur les hypothèses admissibles pour utiliser la théorie de Mourre peut être trouvé dans [GG99]

Théorème 1.1.16 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que les hypothèses i) à v) soient vérifiées pour $n = 1$ sur Λ , alors la fonction à valeur opérateur $\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-s}$, $s > 1/2$ est continue en norme (au sens de Hölder) dans les régions $\operatorname{Re} z \in \Lambda$, $\pm \operatorname{Im} z \in (0, 1]$ et on a l'estimation*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda, \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \|\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-s}\| \leq c, \forall s > 1/2. \quad (1.1.24)$$

De plus le spectre de H est purement absolument continu dans l'ensemble $\Lambda \setminus \sigma_p(H)$.

Pour $n \geq 2$ on peut récupérer d'autres estimations de propagation par les mêmes méthodes.

Théorème 1.1.17 *Soit \mathcal{A} un opérateur auto-adjoint n -fois conjugué à H , avec $n \geq 2$, sur un intervalle compact $\Lambda \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\Lambda \cap \sigma_p(H) = \emptyset$. Alors il existe une constante c telle qu'on ait les estimations suivantes pour tout $n > l \geq 1$*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \|\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R(z)^l \langle \mathcal{A} \rangle^{-s}\| \leq c, \forall s > l - 1/2, \quad (1.1.25)$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 > \pm \operatorname{Im} z > 0}} \|\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R(z)^l P_{\mathcal{A}}^{\mp} \langle \mathcal{A} \rangle^{s-l}\| \leq c, \forall s \in (l - 1/2, n), \quad (1.1.26)$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 > \pm \operatorname{Im} z > 0}} \|\langle \mathcal{A} \rangle^{s_1} P_{\mathcal{A}}^{\mp} R(z)^l P_{\mathcal{A}}^{\pm} \langle \mathcal{A} \rangle^{s_2}\| \leq c, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, (s_1)_+ + (s_2)_+ < n - l. \quad (1.1.27)$$

De plus les différentes fonctions à valeur opérateur ci-dessus sont continues en norme (au sens de Hölder) dans les régions $\operatorname{Re} z \in \Lambda$, $\pm \operatorname{Im} z \in (0, 1]$.

Ces estimations sont d'abord apparues dans [Mou83], sous une forme plus faible, avant d'être énoncées dans [JMP84]. Elles sont basées sur une approche perturbative. L'idée maîtresse est de considérer un opérateur $F_{\varepsilon}(z)$ obtenu à partir de l'opérateur que l'on veut estimer en faisant les substitutions

$$P_{\mathcal{A}}^{\mp} \longrightarrow P_{\mathcal{A}}^{\mp} e^{\pm \varepsilon \mathcal{A}}, \quad R(z) \longrightarrow (H - z - iC_n(\varepsilon))^{-1}, \quad C_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon^k B_k}{k!}, \operatorname{sgn} \varepsilon = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z.$$

Le but est alors d'obtenir des estimations a priori sur $\|dF_{\varepsilon}(z)/d\varepsilon\|$ pour ε petit jusqu'à avoir l'intégrabilité près de 0 et donc la continuité de $F_{\varepsilon}(z)$ en $\varepsilon = 0$. La constante c dans les estimation du théorème 1.1.17 ne dépend donc que des normes des commutateurs $B_j, j = 1, \dots, n$ de \mathcal{H}_2 dans \mathcal{H} , et de la norme de $i[B_n, \mathcal{A}]$ de \mathcal{H}_2 dans \mathcal{H}_{-2} . Les estimations pour $l > 1$ se déduisent de celles pour $l = 1$ par récurrence [Jen85]. Cette approche repose sur le lemme suivant

Lemme 1.1.18 *Supposons que pour tout $\varepsilon \in (0, 1], z \in \Omega$, la fonction à valeur opérateur $F_{\varepsilon}(z)$ soit continue en norme par rapport à z et différentiable par rapport au paramètre ε . Supposons de plus qu'on ait pour tout $\varepsilon \in (0, 1], z \in \Omega$, les estimations*

$$\|F_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon^{-1}, \quad \left\| \frac{dF_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} \right\| \leq c\varepsilon^{-a}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|), \quad (1.1.28)$$

Pour un certain $a \in (0, 1)$. Alors

$$\sup_{\varepsilon \in (0, 1], z \in \Omega} \|F_\varepsilon(z)\| < \infty. \quad (1.1.29)$$

Preuve En partant d'une estimation a priori du type $\|F_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon^{-a_n}$ et en intégrant l'estimation (1.1.28) sur $dF_\varepsilon(z)/d\varepsilon$ on obtient facilement une nouvelle estimation

$$\|F_\varepsilon(z)\| \leq c'(1 + \varepsilon^{-a_n+1-a}) \leq c''\varepsilon^{-a_{n+1}}, \text{ si } a_{n+1} > 0.$$

La suite $a_n = a_{n-1} + (a - 1) = \dots = 1 + n(a - 1)$ décroît linéairement et donc au bout de n étapes, $n \geq 1/(1 - a)$ on a $a_n \leq 0$, ce qui conduit à (1.1.29). \square

1.2 Les opérateurs pseudodifférentiels

Dans toute la suite on prendra pour définition de la transformation de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, x \rangle} f(x) \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad (1.2.1)$$

Ce qui en fait un opérateur unitaire sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$. Son adjoint est défini par

$$(\mathcal{F}^*g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} g(x) \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \quad (1.2.2)$$

1.2.1 Les classes de Hörmander

Les opérateurs pseudodifférentiels (opd) sont un des outils essentiels de ce travail. Introduit par Hörmander dans les années 60, il existe aujourd'hui sur le sujet une littérature abondante, comme [Hör85], [Tay81] ou [Shu87], à laquelle on renvoie le lecteur pour les détails.

Définition 1.2.1 On appelle $\mathcal{S}_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^{2d})$ l'ensemble des fonctions $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ vérifiant pour un certain $N \in \mathbb{R}$ et tout multi-indices α, β

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta}(p) \langle x \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \langle \xi \rangle^N, \quad (1.2.3)$$

pour $x, \xi \in \mathbb{R}^d$. On définit l'opd associé pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} p(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{d/2}}. \quad (1.2.4)$$

Parfois on notera $P = \text{Op}(p(x, \xi))$ ou encore $P = p(x, D)$.

Par exemple l'opérateur de multiplication par la fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, en variable ξ , est un opd qui sera noté $\chi(D)$. Les constantes optimales $C_{\alpha, \beta}(p)$ dans (1.2.3) permettent de construire une famille de semi-normes pour l'espace de Fréchet $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m(\mathbb{R}^{2d})$. On utilisera souvent la notation simplifiée $\mathcal{S}_{1,0}^m(\mathbb{R}^{2d}) = \mathcal{S}^m$. Par rapport aux conventions usuelles adoptées sur le sujet les rôles de x et ξ sont inversés. Cependant grâce à l'égalité suivante

$$(\mathcal{F}P^*)f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, x \rangle} \overline{p(x, \xi)} f(x) \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \quad (1.2.5)$$

l'opérateur $\mathcal{F}P^*$ entre dans le cadre usuel de la théorie des opd ce qui nous autorise à utiliser l'ensemble de ces résultats pour l'opérateur P lui même.

Lorsque $\varrho > \delta$ les classes $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m$ forment une algèbre et on a en particulier des formules pour exprimer le symbole d'un produit de deux opd (resp. de l'adjoint d'un opd) en fonction des symboles des deux opérateurs (resp. du symbole de l'opérateur).

Proposition 1.2.2 *Soit $p \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m$ alors P^* est un opd de symbole $\tilde{p} \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m$ qui admet le développement asymptotique*

$$\tilde{p}(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} (\alpha!)^{-1} D_\xi^\alpha \overline{\partial_x^\alpha p(x, \xi)} \quad (1.2.6)$$

Proposition 1.2.3

Soient $p_j \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m_j}$ pour $j = 1, 2$, et $m = m_1 + m_2$. Alors $P_1 P_2$ est un opd de la classe $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m$ et son symbole $p(x, \xi)$ admet le développement asymptotique

$$p(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} (\alpha!)^{-1} D_\xi^\alpha p_1(x, \xi) \partial_x^\alpha p_2(x, \xi) \quad (1.2.7)$$

La signification des asymptotiques (1.2.6) et (1.2.7) peut être comprise de deux manières différentes :

- on peut tronquer la série à un ordre N arbitraire et remplacer “ \sim ” par une égalité modulo l'ajout d'un terme de reste $r_N(x, \xi) \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m - (\varrho - \delta)N}$ qui ne dépend que des dérivées $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)$ avec $|\alpha| \geq N$ et $|\beta| \geq N$,
- on peut construire par un procédé de sommation “à la Borel” de la série dans le membre de droite des équivalences (cf. [Shu87] Chap. I Section 3.3) un symbole qui diffère du membre de gauche par une fonction à décroissance rapide en x .

L'autre intérêt des opd est qu'on dispose de critères simples pour juger de la continuité et de la compacité de ces opérateurs [CV71, CV72].

Théorème 1.2.4 (Caldéron & Vaillancourt) *Soit $p \in S_{\delta,\delta}^0$, ($0 \leq \delta < 1$) vérifiant (1.2.3) pour un certain $N \leq 0$. Alors P est un opérateur borné sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$, en particulier on a une estimation de la norme de P en fonction des semi-normes définies par l'équation (1.2.3)*

$$\|P\| \leq C \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} C_{\alpha,\beta}(p) \quad (1.2.8)$$

où C et k ne dépendent que de d et δ .

En remarquant qu'on a l'injection $S_{\varrho,\delta}^m \subset S_{\delta,\delta}^m$ si $\varrho > \delta$, ce résultat s'étend aux classes $S_{\varrho,\delta}^0$.

Remarque 1.2.5 A priori dans nos applications on est pas obligé de faire appel au théorème 1.2.4 car le symbole p aura toujours un support compact en la variable ξ . En décomposant $p(x, \xi) \in \mathcal{S}^0$ en séries de Fourier par rapport à ξ on obtient alors facilement une borne sur la norme de l'opérateur P . Cependant cette borne dépend de la taille du support de p en la variable ξ , et donc n'est pas optimale.

Concernant la compacité des opd on a le résultat suivant.

Théorème 1.2.6 *Soit $p \in S_{\varrho,\delta}^m$, pour un certain $N < 0$, avec $m < 0$ et $1 \geq \varrho > \delta \geq 0$, alors P est un opérateur compact sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

1.2.2 Les classes de symboles oscillants

Dans notre étude on est amené à considérer les modificateurs J_{\pm} comme des opérateurs de symboles $j_{\pm}(x, \xi) = \exp(i\Phi_{\pm}(x, \xi))$, $\Phi \in \mathcal{S}^{1-\rho}$. De ce fait les opérateurs J_{\pm} appartiennent à la classe $S_{\varrho,\delta}^0$ avec $\varrho = \rho$ et $\delta = 1 - \rho$. Pour les classes $S_{\varrho,\delta}^0$ le calcul pseudodifférentiel ne peut être développé que sous la condition $\varrho > \delta$ ce qui donne ici la restriction $\rho > 1/2$. Lorsque $1/2 \geq \rho > 0$ les résultats de la section 1.2.1 ne permettent plus de décomposer la perturbation effective $T_{\pm} = HJ_{\pm} - J_{\pm}H_0$ en produit de perturbations H et H_0 -lisses et donc de montrer l'existence et la complétude des opérateurs d'onde comme dans [Yaf98, Yaf00b]. Cependant pour nos applications à la théorie de la diffusion on n'a pas besoin de toutes les formules du calcul pseudodifférentiel seul la composition avec des opd de la classe S^m ou des compositions du type $J_{\pm}^* J_{\pm}$ ou $J_{\pm} J_{\pm}^*$ sont utilisées. Etant donné la forme particulière des symboles des opd J_{\pm} Yafaev a introduit dans [Yaf00a] une nouvelle classe d'opd à symbole oscillant, dont voici la définition.

Définition 1.2.7 On appelle *opd* à symbole oscillant $a \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ tout opérateur défini sur la classe de Schwartz par

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{d/2}}$$

où a admet la représentation

$$a(x, \xi) = e^{i\Phi(x, \xi)} b(x, \xi), \quad b \in \mathcal{S}^m, \quad \Phi \in \mathcal{S}^r, \quad r \in [0, 1[\quad (1.2.9)$$

où Φ est à valeurs réelles et il existe $M > 0$ tel que $b(x, \xi) = 0$ pour $|\xi| \geq M$.

Comme on a l'inclusion $\mathcal{C}^m(\Phi) \subset \mathcal{S}_{1-r, r}^m$ les propriétés des classes de symboles oscillants se ramènent à celles des classes $\mathcal{S}_{1-r, r}^m$ quand $r < 1/2$. Au contraire dans le cas $r \geq 1/2$ les résultats de [Yaf00a] sur les classes $\mathcal{C}^m(\Phi)$ sont indispensables pour les applications à la théorie de la diffusion.

On commence par un résultat tiré de [Tay81] Chap. II théorème 4.4 (mais qui peut aussi être extrait d'autres références).

Proposition 1.2.8 Soient $A_1 \in \mathcal{S}_{1,0}^{m_1}$ et $A_2 \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m_2}$, le produit $A = A_1 A_2 \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m$, où $m = m_1 + m_2$, et le symbole $a(x, \xi)$ admet le développement asymptotique

$$a(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} (\partial_\xi^\alpha a_1)(x, \xi) (D_x^\alpha a_2)(x, \xi) / \alpha!, \quad (1.2.10)$$

où $\partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha a_2 \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m - \rho|\alpha|}$. On a le même résultat pour $A_2 A_1$ avec le développement asymptotique

$$a(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} (\partial_\xi^\alpha a_2)(x, \xi) (D_x^\alpha a_1)(x, \xi) / \alpha!, \quad (1.2.11)$$

où $\partial_\xi^\alpha a_2 D_x^\alpha a_1 \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^{m - \rho|\alpha|}$.

La proposition 1.2.8 permet de composer les *opd* à symboles oscillants avec des *opd* de classe $\mathcal{S}_{1,0}^m$.

Proposition 1.2.9 Soient $A_j, j = 1, 2$ deux *opd* de symboles $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}$ et $a_2 \in \mathcal{C}^{m_2}(\Phi)$, pour un certain $\Phi \in \mathcal{S}^r$, $r \in [0, 1)$. Soient $m = m_1 + m_2$ et A_0 l'*opd* de symbole $a_0(x, \xi) = a_1(x, \xi) a_2(x, \xi)$. Alors le produit $A = A_1 A_2 \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ et son symbole admet l'asymptotique (1.2.10). En particulier $A - A_0 \in \mathcal{C}^{m-(1-r)}(\Phi)$. Si de plus $a_1(x, \xi) = 0$ pour $|\xi| \geq R > 0$ alors $A_2 A_1 \in \mathcal{C}^m(\Phi)$, avec un symbole admettant l'asymptotique (1.2.11), et $A_2 A_1 - A_0 \in \mathcal{C}^{m-(1-r)}(\Phi)$.

Preuve Comme par hypothèse (1.2.9) $a_2(x, \xi) = 0$, $|\xi| \geq R$ pour un certain $R > 0$ il en va de même pour le symbole $a(x, \xi)$ de $A_2 A_1$. Le résultat découle alors de l'asymptotique (1.2.10). Dans le second cas si le support en ξ de $a_1(x, \xi)$ est compact de la même manière le résultat découle de (1.2.11). \square

Pour nos applications on a besoin de pouvoir traiter le produit $A_2 A_1$ dans le cas où $a_1(x, \xi)$ n'a pas le support compact en ξ .

Proposition 1.2.10 Soient $A_j, j = 1, 2$ deux opd de symboles $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}$ et $a_2 \in \mathcal{C}^{m_2}(\Phi)$, pour un certain $\Phi \in \mathcal{S}^r$, $r \in [0, 1)$. Soient $m = m_1 + m_2$ et A_0 l'opd de symbole $a_0(x, \xi) = a_1(x, \xi)a_2(x, \xi)$. Alors le produit $A_2A_1 = A + R$ où $A \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ admet l'asymptotique (1.2.11) et R a pour symbole $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. De plus $A - A_0 \in \mathcal{C}^{m-(r-1)}(\Phi)$.

Preuve Soit $R > 0$ tel que $a_2(x, \xi) = 0$ pour $|\xi| \geq R$, et soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi_0(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq R$, $\chi_0(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq R + 1$. Soit enfin $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq R + 2$. D'après la proposition 1.2.8 on obtient que l'opérateur $A = A_2A_1\chi(D)$ appartient à la classe $\mathcal{C}^m(\Phi)$ et son symbole vérifie (1.2.11). Le reste $A_2A_1(1 - \chi(D))$ a pour symbole

$$r(x, \xi) = (2\pi)^{-d} \int_{|\eta| \leq R} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \eta - \xi, x - y \rangle} a_2(x, \eta) a_1(y, \xi) (1 - \chi(\xi)) dy d\eta.$$

Considérons d'abord la fonction $k(\eta, \xi)$ définie par

$$k(\eta, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi - \eta, y \rangle} a_1(y, \xi) \chi_0(\eta) (1 - \chi(\xi)) dy.$$

Comme $\text{supp } \chi_0 \cap \text{supp } (1 - \chi) = \emptyset$ on peut intégrer par parties l'intégrale précédente en utilisant l'identité $|\eta - \xi|^{-2} (-\Delta_y) e^{i\langle \xi - \eta, y \rangle} = e^{i\langle \xi - \eta, y \rangle}$. En répétant cette procédure un nombre suffisant de fois on obtient que k est une fonction de la classe de Schwartz. Maintenant comme $a(x, \eta) = a(x, \eta) \chi_0(\eta)$ on peut réécrire le symbole $r(x, \xi)$ de la manière suivante

$$r(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \eta - \xi, x \rangle} a_2(x, \eta) k(\eta, \xi) d\eta.$$

En utilisant cette fois l'identité $\langle x \rangle^{-2p} \langle D_\eta \rangle^{2p} e^{i\langle \eta - \xi, x \rangle} = e^{i\langle \eta - \xi, x \rangle}$ et en intégrant par parties p fois, par rapport à η , on obtient

$$r(x, \xi) = \langle x \rangle^{-2p} \int_{|\eta| \leq R} e^{i\langle \eta - \xi, x \rangle} \langle D_\eta \rangle^{2p} (a_2(x, \eta) k(\eta, \xi)) d\eta = O\left((1 + |x|)^{m-2p(1-\delta)}\right).$$

En tenant compte de ce que la fonction $k(\eta, \xi)$ appartient à la classe de Schwartz on obtient la majoration $r(x, \xi) = O((1 + |x|)^{-l} (1 + |\xi|)^{-n})$ pour tout entier l et n . De la même manière il est facile d'obtenir $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(x, \xi) = O((1 + |x|)^{-l} (1 + |\xi|)^{-n})$ pour tout entier l et n et tout α, β par conséquent $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. \square

Pour la composition avec l'adjoint on a le résultat suivant tiré de [Yaf00a].

Théorème 1.2.11 Soient $a_j \in \mathcal{C}^{m_j}(\Phi)$ et $A_j, j = 1, 2$, les opd associés, alors $A_1^*A_2$ est un opd dont le symbole $a(x, \xi) \in \mathcal{S}^m$ admet le développement asymptotique

$$a(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} D_x^\alpha (\overline{(\partial_\xi^\alpha a_1)}(x, \xi) a_2(x, \xi)) / \alpha!, \quad (1.2.12)$$

où $D_x^\alpha (\overline{(\partial_\xi^\alpha a_1)} a_2) \in \mathcal{S}^{m-(1-r)|\alpha|}$. De même $A_2A_1^*$ est un opd de symbole $a(x, \xi) \in \mathcal{S}^m$ qui admet le développement asymptotique

$$a(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} \partial_\xi^\alpha (\overline{(D_x^\alpha a_1)}(x, \xi) a_2(x, \xi)) / \alpha!, \quad (1.2.13)$$

où $\partial_\xi^\alpha (\overline{(D_x^\alpha a_1)} a_2) \in \mathcal{S}^{m-(1-r)|\alpha|}$.

Une conséquence directe du théorème précédant est un critère de continuité et de compacité pour les opd à symboles oscillants, l'équivalent des théorèmes 1.2.4 et 1.2.6.

Théorème 1.2.12 *Soit A un opd de la classe $\mathcal{C}^m(\Phi)$, si $m \leq 0$ alors A est borné dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et si $m < 0$ alors A est compact dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve D'après le théorème 1.2.11 l'opd A^*A qui appartient à la classe \mathcal{S}^{2m} et possède un support compact en ξ . En particulier $A^*A \in \mathcal{S}_{0,0}^{2m}$ et vérifie (1.2.3) pour tout $N < 0$. Les opérateurs A^*A et A sont donc bornés (compacts) si $m \leq 0$ ($m < 0$) d'après le théorème 1.2.4 (1.2.6). \square

En vue de nos applications à la construction des opérateurs d'onde et de la matrice de la diffusion on a besoin de quelques résultats techniques collectés ci-dessous.

Proposition 1.2.13 *Soit $A \in \mathcal{C}^m(\Phi)$, alors l'opérateur $A \langle x \rangle^{-m}$ est borné dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve Comme $\langle x \rangle^{-m} \in \mathcal{S}^{-m}$ d'après la proposition 1.2.10 $A \langle x \rangle^{-m} = A_0 + R$ avec $A_0 \in \mathcal{C}^0(\Phi)$ et $r(x, \xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. L'opérateur A_0 est borné d'après la proposition 1.2.12 et R est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc borné. \square

Proposition 1.2.14 *Soient B et G deux opd de symbole $b \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ pour une phase $\Phi \in \mathcal{S}^r$, avec $r \in [0, 1)$, et $g \in \mathcal{S}^n$. Soit T l'opd de symbole $t(x, \xi) = |g(x, \xi)|^2 b(x, \xi)$. Alors l'opérateur $\langle x \rangle^p (G^*BG - T) \langle x \rangle^p$ est borné si $2p = -m - 2n + 1 - r$.*

Preuve Comme $g \in \mathcal{S}^n$ d'après la proposition 1.2.10 on obtient que $G^*BG - T = A + R$ où $A \in \mathcal{C}^{m+2n-1+r}(\Phi)$ et le symbole $r(x, \xi)$ de R appartient à la classe de Schwartz. Alors d'après la proposition 1.2.3 le symbole de $\langle x \rangle^p R \langle x \rangle^p$ appartient à la classe de Schwartz. L'opérateur $\langle x \rangle^p R \langle x \rangle^p$ est donc Hilbert-Schmidt et borné. Enfin d'après la proposition 1.2.13 $\langle x \rangle^p A \langle x \rangle^p$ est borné si $2p = -m - 2n + 1 - r$. \square

Proposition 1.2.15 *Soient A_j , $j = 1, 2$, des opd de symboles $a_j \in \mathcal{C}^0(\Phi)$ et A l'opd de symbole $a_1(x, \xi) \overline{a_2(x, \xi)}$, alors les opérateurs $A - A_1 A_2^*$ et $A - A_2^* A_1$ sont compacts dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Dans la Section 2.2 on est amené à considérer des opérateurs de la forme $\tilde{\mathbf{A}} = \mathcal{F} A_+^* A_- \mathcal{F}^*$ où $A_\pm \in \mathcal{C}^m(\Phi_\pm)$. L'opérateur $\tilde{\mathbf{A}}$ admet la représentation suivante

$$\left(\tilde{\mathbf{A}} u \right) (\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \langle x, \xi' - \xi \rangle} \mathbf{a}(x, \xi, \xi') u(\xi') \frac{dx d\xi'}{(2\pi)^d} \quad (1.2.14)$$

avec $\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = \overline{a_+(x, \xi)} a_-(x, \xi')$. Il est donc naturel d'introduire des opd définis par une amplitude \mathbf{a} . Par rapport aux conventions précédentes les rôles de x et ξ, ξ' dans (1.2.14) sont inversés[†]. Nous continuerons à désigner ces opérateurs par le terme opd.

[†]On se retrouve donc avec les conventions usuelles où les estimations (1.2.15) portent sur la variable Fourier qui ici s'appelle x !

Définition 1.2.16 On appelle $\tilde{\mathcal{S}}_{\varrho, \delta, \delta}^m(\mathbb{R}^{3d})$ l'ensemble des fonctions $\mathbf{a} \in C^\infty(\mathbb{R}^{3d})$ vérifiant pour un compact K de \mathbb{R}^d et tous multi-indices α, β

$$|\partial_x^\alpha \partial_{\xi, \xi'}^\beta \mathbf{a}(x, \xi, \xi')| \leq C_{\alpha, \beta}(\mathbf{a}) \langle x \rangle^{m - \varrho|\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (1.2.15)$$

pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\xi \in K$ et $\xi' \in K$ et tel que $\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = 0$ si $\xi \notin K$ ou $\xi' \notin K$. On définit l'opd associé pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par l'équation (1.2.14).

Encore une fois on notera $\tilde{\mathcal{S}}_{1,0,0}^m(\mathbb{R}^{3d}) = \tilde{\mathcal{S}}^m$ et on désignera indifféremment par $\tilde{\mathcal{S}}^m$ l'ensemble des symboles ou des opérateurs associés. Dans le cas où $\varrho > \delta$ on peut obtenir un développement asymptotique du symbole $a(x, \xi)$ de $\tilde{\mathbf{A}}$ en fonction des dérivées de \mathbf{a} prises au point (x, ξ, ξ) [Shu87]

$$a(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} (\alpha!)^{-1} (\partial_x^\alpha D_{\xi'}^\alpha \mathbf{a})(x, \xi, \xi). \quad (1.2.16)$$

Ce développement, formé par une suite de termes appartenant à la classe $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m-N(\varrho-\delta)}$, perd son sens dès que $\varrho \leq \delta$. C'est pourquoi on est amené, comme dans la section précédente, à restreindre notre étude à des classes d'amplitudes oscillantes.

Définition 1.2.17 On appelle opd à amplitude oscillante $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$ tout opérateur défini sur la classe de Schwartz par (1.2.14) où \mathbf{a} admet la représentation

$$\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = e^{i\Theta(x, \xi, \xi')} \mathbf{b}(x, \xi, \xi'), \quad \mathbf{b} \in \tilde{\mathcal{S}}^m, \quad \Theta \in \tilde{\mathcal{S}}^r, \quad r \in [0, 1) \quad (1.2.17)$$

avec Θ à valeurs réelles et $\mathbf{b}(x, \xi, \xi') = 0$ si $\xi \notin K$ ou $\xi' \notin K$ où K est un compact de \mathbb{R}^d .

Là encore on a l'inclusion $\tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta) \subset \tilde{\mathcal{S}}_{1-r, r, r}^m$, et les classes d'amplitudes oscillantes nécessitent une étude particulière lorsque $r \geq 1/2$. En fait cette étude se ramène à celle des opd à symbole oscillant, même dans le cas $r \geq 1/2$, grâce à la proposition suivante tirée de [Yaf00a] qui généralise le développement (1.2.16) aux classes $\tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$.

Proposition 1.2.18 Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ un opd défini par (1.2.14) d'amplitude $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$, alors $\tilde{\mathbf{A}}$ admet la représentation

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}u \right) (\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} a_0(x, \xi) (\mathcal{F}^*u)(x) \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \quad (1.2.18)$$

avec une amplitude $a_0(x, \xi) = e^{i\Theta_0(x, \xi)} b_0(x, \xi)$ vérifiant $b_0(x, \xi) = 0$ pour $|\xi| \geq R > 0$ et

$$\begin{cases} \Theta_0(x, \xi) &= \Theta(x, \xi, \xi) + \Theta_1(x, \xi) & \Theta_1 &\in \mathcal{S}^{2r-1} \\ b_0(x, \xi) &= \mathbf{b}(x, \xi, \xi) + b_1(x, \xi) & b_1 &\in \mathcal{S}^{m+r-1}. \end{cases} \quad (1.2.19)$$

En particulier si $\mathbf{a}(x, \xi, \xi) = 0$ alors $a_0 \in \mathcal{C}^{m+r-1}(\Theta_0)$.

On en déduit des critères de continuité et de compacité pour les opd (1.2.14).

Proposition 1.2.19 *Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ un opd défini par (1.2.14) d'amplitude $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$, si $m \leq 0$ alors $\tilde{\mathbf{A}}$ est borné dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et si $m < 0$ alors $\tilde{\mathbf{A}}$ est compact dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve D'après la proposition 1.2.18 $\tilde{\mathbf{A}}$ admet la représentation (1.2.18) avec une amplitude $\mathbf{a}_0(x, \xi) = e^{i\Theta_0(x, \xi)} \mathbf{b}_0(x, \xi)$ vérifiant (1.2.19). En comparant (1.2.18) et (1.2.5) on obtient que $\tilde{\mathbf{A}}\mathcal{F} = \mathcal{F}B$ où B est un opd du type (1.2.3) de symbole $b(x, \xi) = \overline{a_0(x, \xi)} \in \mathcal{C}^m(-\Theta_0)$. La continuité de B si $m \leq 0$ et la compacité de B si $m < 0$ entraîne les mêmes propriétés pour $\tilde{\mathbf{A}}$. \square

La dernière proposition nous donne une information spectrale sur les opd avec une amplitude oscillante. Sa preuve peut être trouvée dans [Yaf00a].

Proposition 1.2.20 *Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ un opd (1.2.14) d'amplitude $\mathbf{a}(x, \xi, \xi')$ de la classe $\tilde{\mathcal{C}}^0(\Theta)$. Supposons que pour un couple de points $x_0 \neq 0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$ on ait*

$$|\Theta(\tau x_0, \xi_0, \xi_0)| \geq c\tau^r, \quad |\nabla_x \Theta(\tau x_0, \xi_0, \xi_0)| \geq c\tau^{r-1}, \quad r > 0, \quad (1.2.20)$$

pour τ assez grand et

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{b}(\tau x_0, \xi_0, \xi_0) = 1. \quad (1.2.21)$$

Alors pour tout $\mu \in \mathbb{T}$ et tout voisinage Σ arbitrairement petit de ξ_0 il existe une suite (de Weyl) de fonctions $u_n \in C_0^\infty(\Sigma)$ telle que

$$\|u_n\| = 1, \quad w - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{A}}u_n - \mu u_n\| = 0. \quad (1.2.22)$$

En particulier le spectre essentiel de l'opérateur $\tilde{\mathbf{A}}$, dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$, recouvre le cercle unité \mathbb{T} .

1.2.3 Restriction d'un opd à la sphère

Pour étudier la matrice de diffusion $S(\lambda)$, dans la Section 2.2, on doit collecter quelques résultats sur la restriction d'opd à une hypersurface (la sphère \mathbb{S}_k^{d-1} en l'occurrence). En particulier on cherche à donner un sens aux termes de la forme $\Gamma_0(\lambda)A\Gamma_0^*(\lambda)$ qui apparaissent dans la formule de représentation de la matrice de diffusion (37). Cette problématique est donc intimement liée à la décomposition en intégrale directe de l'Hamiltonien libre $H_0 = -\Delta$. Les résultats de cette section sont tirés de [Yaf92], Chap. 1 Section 5, et [Yaf00a].

Commençons par rappeler quelques résultats sur l'opérateur auto-adjoint H_0 de domaine $\mathcal{D}(H_0) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$. Le spectre de H_0 recouvre l'intervalle $[0, \infty)$ et est absolument

continu. D'après le théorème spectral (cf. théorème 1.1.9) il existe un espace de Hilbert \mathfrak{H} et un opérateur unitaire

$$F_0 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}), \quad (F_0 f)(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) f \in \mathfrak{H},$$

tel que pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$(H_0 f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty \lambda (\Gamma_0(\lambda) f_1, \Gamma_0(\lambda) f_2)_{\mathfrak{H}} d\lambda.$$

Pour $H_0 = -\Delta$ on a $\mathfrak{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ et

$$(\Gamma_0(\lambda) f)(\omega) = \frac{k^{(d-2)/2}}{2^{1/2}(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-ik\langle \omega, x \rangle} f(x) dx, \quad k = \lambda^{1/2} > 0, \quad \omega \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (1.2.23)$$

qui est, à un facteur numérique près, la restriction de \hat{f} à la sphère de rayon $k = \lambda^{1/2}$. On notera aussi que l'adjoint formel de l'opérateur (1.2.23) est donné par

$$(\Gamma_0^*(\lambda) g)(x) = \frac{k^{(d-2)/2}}{2^{1/2}(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{ik\langle \omega, x \rangle} g(\omega) d\omega, \quad (1.2.24)$$

et que ces deux opérateurs sont définis au moins sur la classe de Schwartz. Le théorème de trace de Sobolev conduit à la proposition suivante.

Proposition 1.2.21 *Pour $p > 1/2$ la fonction à valeur opérateur $\langle x \rangle^{-p} \Gamma_0^*(\lambda) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est à valeurs compacts et est continu en norme (au sens de Hölder) par rapport à $\lambda > 0$.*

L'opérateur (1.2.23) est directement relié à la famille spectrale de H_0 grâce à la formule de Stone.

Proposition 1.2.22 *On pose*

$$\delta_\varepsilon(H_0 - \lambda) = (2\pi i)^{-1} (R_0(\lambda + i\varepsilon) - R_0(\lambda - i\varepsilon)), \quad (1.2.25)$$

ou $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$. Alors pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a l'existence de la limite suivante et l'égalité

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta_\varepsilon(H_0 - \lambda) f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = d(E_0(\lambda) f_1, f_2) / d\lambda = (\Gamma_0(\lambda) f_1, \Gamma_0(\lambda) f_2)_{\mathfrak{H}}. \quad (1.2.26)$$

Si un opérateur S commute avec H_0 alors nécessairement l'action de S dans la représentation spectrale associée à H_0 se ramène à la multiplication par une fonction à valeur opérateur $S(\lambda)$

$$(S f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty (S(\lambda) \Gamma_0(\lambda) f_1, \Gamma_0(\lambda) f_2)_{\mathfrak{H}} d\lambda.$$

Mais dans le cas général d'un opérateur A qui ne commute pas avec H_0 ceci n'est pas possible. Formellement, l'action de A dans la représentation spectrale associée à H_0 peut être regardée comme celle d'un opérateur intégral

$$(A f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty \int_0^\infty (A^{\mathfrak{h}}(\mu, \nu) \Gamma_0(\mu) f_1, \Gamma_0(\nu) f_2)_{\mathfrak{H}} d\mu d\nu,$$

dont le noyau $A^\natural(\mu, \nu) = \Gamma_0(\mu)A\Gamma_0^*(\nu)$ agit dans l'espace \mathfrak{N} , pour tous $\mu > 0$ et $\nu > 0$. Si $A^\natural(\mu, \nu)$ est continu par rapport à μ, ν on peut alors définir les valeurs diagonales $A(\lambda) = A^\natural(\lambda, \lambda)$ de A . Cependant, en général, la condition que $A^\natural(\mu, \nu)$ soit continu est trop contraignante [†], les valeurs diagonales de A pouvant exister sans que $A^\natural(\mu, \nu)$ soit continu.

On a besoin dans la suite de définir les valeurs diagonales d'opd de la forme $A = A_+^* A_-$ où $A_\pm \in \mathcal{C}^{m_\pm}(\Phi_\pm)$. Si on regarde $A(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)A\Gamma_0^*(\lambda)$ comme un opérateur intégral sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} alors, formellement, d'après (1.2.23), (1.2.24), son noyau est défini par l'intégrale (au sens des distributions)

$$p(\omega, \omega'; \lambda) = 2^{-1}(2\pi)^{-d}k^{d-2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ik\langle \omega' - \omega, x \rangle} \mathbf{a}(x, k\omega, k\omega') dx, \quad (1.2.27)$$

où $\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = \overline{a_+(x, \xi)} a_-(x, \xi')$. De ce point de vue le noyau de $A(\lambda)$ est la restriction à la sphère de rayon $k = \lambda^{1/2}$ du noyau [‡] de l'opd (1.2.14) $\tilde{\mathbf{A}} = \mathcal{F}A\mathcal{F}^*$ d'amplitude $\mathbf{a}(x, \xi, \xi')$. Pour ces raisons on adopte la définition suivante, plus générale, pour $A(\lambda)$.

Définition 1.2.23 Soient $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ et $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ tel que $\psi_j(k) = 1$, $j = 1, 2$. On note $\hat{f}_j(\xi) = g_j(\hat{\xi})\psi_j(|\xi|)$, $j = 1, 2$ de telle sorte que

$$(\Gamma_0(\lambda)f_j)(\omega) = \frac{k^{(d-2)/2}}{2^{1/2}}g_j(\omega), \quad k = \lambda^{1/2}, \quad \omega \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Soit A un opérateur borné (agissant en représentation d'espace), alors les valeurs diagonales $A(\lambda)$ de A dans la représentation spectrale associée à $H_0 = -\Delta$ sont définies, si la limite ci-dessous existe, par l'égalité

$$(A(\lambda)g_1, g_2)_{\mathfrak{N}} : = 2k^{2-d} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A\delta_\varepsilon(H_0 - \lambda)f_1, \delta_\varepsilon(H_0 - \lambda)f_2)_{\mathcal{H}}. \quad (1.2.28)$$

Pour un opd $\tilde{\mathbf{A}}$ défini par (1.2.14) on appellera $A(\lambda)$ la restriction à la sphère de rayon $\lambda^{1/2} = k$ de $\tilde{\mathbf{A}}$ l'opérateur défini, si la limite ci-dessous existe, par l'égalité

$$(A(\lambda)g_1, g_2)_{\mathfrak{N}} : = 2k^{2-d} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{\mathbf{A}}\delta_\varepsilon(|\xi|^2 - \lambda)\hat{f}_1, \delta_\varepsilon(|\xi|^2 - \lambda)\hat{f}_2)_{\mathcal{H}}. \quad (1.2.29)$$

En particulier $A(\lambda)$ dans (1.2.29) coïncide avec les valeurs diagonales de $A = \mathcal{F}^*\tilde{\mathbf{A}}\mathcal{F}$ définies par (1.2.28).

Dès que $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}_{\rho, \delta, \delta}^m$ on peut montrer à partir de (1.2.27) en faisant des intégrations par parties que le noyau $p(\omega, \omega'; \lambda)$ de $A(\lambda)$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ pour tout $\omega \neq \omega'$ (et $\lambda > 0$).

Proposition 1.2.24 Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ un opd de type (1.2.14) d'amplitude $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}_{\rho, \delta, \delta}^m$. Alors la restriction $A(\lambda)$ de $\tilde{\mathbf{A}}$ à la sphère \mathbb{S}_k^{d-1} définie par (1.2.29), si elle existe, possède un noyau $p(\omega, \omega'; \lambda)$ C^∞ en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$ pour tout $\lambda > 0$.

[†]Par exemple pour un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ le noyau n'appartient qu'à $L^2(\mathbb{R}^{2d})$.

[‡]Cette approche est tout à fait justifiée si le noyau de $\tilde{\mathbf{A}}$ est continu ce qui arrive pour $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}_{\rho, \delta, \delta}^m$ si $m < -d$ ou si $\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = 0 \forall |\xi - \xi'| < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$.

Cependant on ne peut pas exclure l'apparition d'une très forte singularité sur la diagonale compromettant l'existence de $A(\lambda)$. Pour éliminer cette éventualité on doit imposer certaines conditions à l'amplitude $\mathbf{a}(x, \xi, \xi')$. Par exemple si pour un certain $p > 1/2$, l'opérateur $\langle x \rangle^p A \langle x \rangle^p$ est borné alors $A(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) A \Gamma_0^*(\lambda)$ admet la factorisation

$$A(\lambda) = \left(\Gamma_0(\lambda) \langle x \rangle^{-p} \right) \left(\langle x \rangle^p A \langle x \rangle^p \right) \left(\langle x \rangle^{-p} \Gamma_0^*(\lambda) \right), \quad (1.2.30)$$

et, d'après la proposition 1.2.21, est donc correctement défini comme un opérateur compact sur \mathfrak{N} . On tire de cette remarque la proposition suivante.

Proposition 1.2.25 *Soit $\tilde{\mathbf{A}} \in \tilde{\mathcal{C}}^m(\Theta)$ avec $m < -1$. Alors sa restriction à la sphère \mathbb{S}_k^{d-1} , définie par (1.2.29), existe en tant qu'opérateur compact sur \mathfrak{N} .*

Preuve D'après (1.2.30) et la proposition 1.2.21 il suffit de vérifier que pour un certain $p > 1/2$ l'opérateur $\langle x \rangle^p \mathcal{F}^* \tilde{\mathbf{A}} \mathcal{F} \langle x \rangle^p$ est borné. D'après la proposition 1.2.18 et l'équation (1.2.5) l'opérateur $B = \mathcal{F}^* \tilde{\mathbf{A}} \mathcal{F}$ (qui agit en représentation d'espace) appartient à la classe $\mathcal{C}^m(\Theta_0)$ donc d'après la proposition 1.2.13 pour $p = -m/2 > 1/2$ l'opérateur $\langle x \rangle^p B \langle x \rangle^p$ est bien borné dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. \square

Si $m \geq -1$ l'existence de $A(\lambda)$ nécessite une hypothèse supplémentaire. Pour la découvrir considérons $A(\lambda)$ comme un opd de type (1.2.14) sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} . D'après (1.2.27) son amplitude est formellement définie par

$$\mathbf{a}^b(y, \omega, \omega'; \lambda) = \frac{|\omega + \omega'|}{8\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(z(\omega + \omega')/2 + y/k, k\omega, k\omega') dz \quad (1.2.31)$$

où $\langle y, \omega + \omega' \rangle = 0$. Si $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}_{\varrho, \delta, \delta}^m$ avec $m < -1$ alors l'intégrale dans (1.2.31) est bien définie et $\mathbf{a}^b \in \tilde{\mathcal{S}}_{\varrho, \delta, \delta}^{m+1}$. En particulier si $1 \geq \varrho > \delta \geq 1 - \varrho \geq 0$ on peut définir le symbole principal de l'opérateur $A(\lambda)$ et il appartient à la classe $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m+1}$, modulo des termes dans $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m+1-(2\varrho-1)}$, ce qui permet de retrouver les résultats de la proposition 1.2.25. Par contre si $m \geq -1$ l'intégrale dans (1.2.31) ne peut être définie que si l'intervalle d'intégration est en réalité compact. C'est pour cette raison que l'on doit imposer l'annulation de l'amplitude \mathbf{a} dans un voisinage du fibré conormal à ξ pour tout point $\xi \in \mathbb{S}_k^{d-1}$ [LY98].

On l'a vu, la difficulté fondamentale vient du comportement du noyau au voisinage de la diagonale, donc en pratique il suffit de considérer le cas d'une amplitude $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}_{\varrho, \delta, \delta}^m$ telle que

$$\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = 0 \quad \forall \xi, \xi' \notin X,$$

où X est une petite boule centrée en un point $k\omega_0 \in \mathbb{S}_k^{d-1}$ (fixé pour la suite). Dès lors il est naturel de représenter l'opd $A(\lambda)$ dans une carte locale de la sphère valable sur $k^{-1}X \cap \mathbb{S}^{d-1}$. Le système de coordonnées locales le plus simple dans ce cas consiste à prendre la projection orthogonale du morceau de sphère $\mathcal{V} \supset k^{-1}X \cap \mathbb{S}^{d-1}$ sur le plan Λ_{ω_0} perpendiculaire à ω_0 . Si Σ est la projection de \mathcal{V} sur Λ_{ω_0} et vérifie $\Sigma \subsetneq \{\zeta \in \Lambda_{\omega_0} : |\zeta| < 1\}$ alors l'application (cf. Figure 1.1)

$$\varkappa : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1}, \quad \varkappa(\zeta) = \zeta + (1 - |\zeta|^2)^{1/2} \omega_0 \quad (1.2.32)$$

est un difféomorphisme de Σ sur le voisinage \mathcal{V} de ω_0 dans \mathbb{S}^{d-1} , et

$$\mathcal{U} : \mathbb{L}^2(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{L}^2(\Sigma), \quad (\mathcal{U}u)(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)^{-1/4} u(\varkappa(\zeta)), \quad (1.2.33)$$

identifie unitairement les deux espaces $\mathbb{L}^2(\mathcal{V})$ et $\mathbb{L}^2(\Sigma)$. On peut maintenant énoncer clairement le résultat principal de cette section.

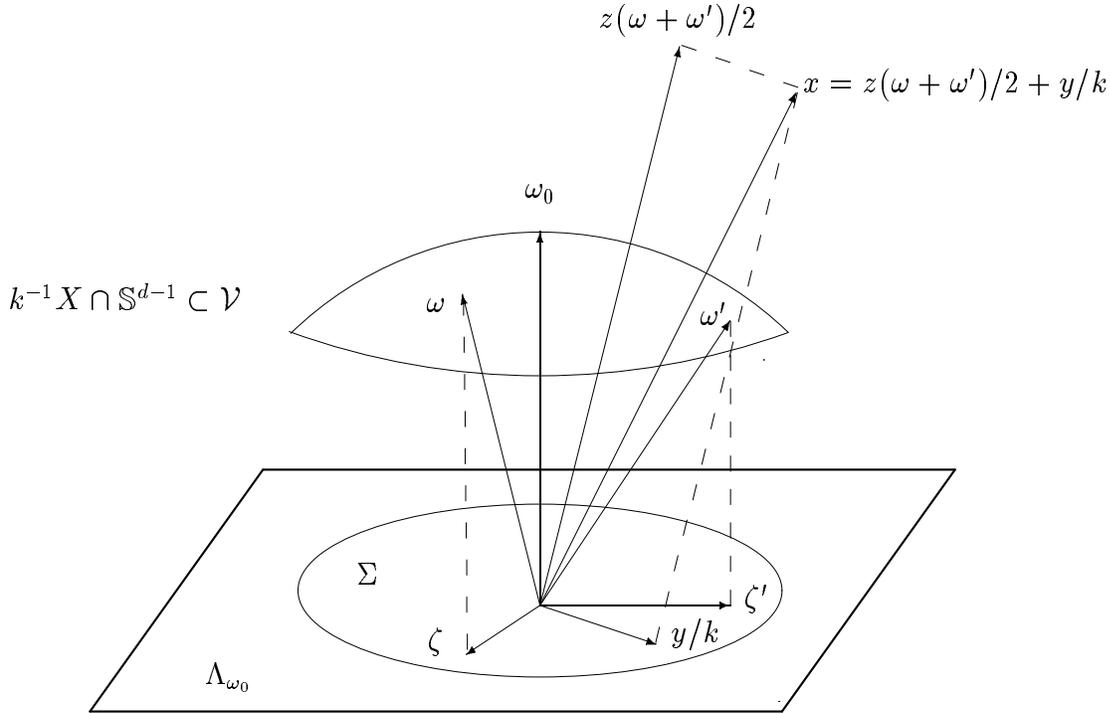


FIG. 1.1: Carte locale (\varkappa, Σ)

Proposition 1.2.26 Soit $\mathbf{a} \in \tilde{\mathcal{S}}_{\varrho, \delta, \delta}^m(\mathbb{R}^d \times X \times X)$ pour $\varrho > 0$, $\delta < 1$, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = 0$ lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$|\xi - \xi'| < \varepsilon, \quad |\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle| > 1 - \varepsilon. \quad (1.2.34)$$

Soit \mathcal{U} l'opérateur unitaire associé par (1.2.33) au difféomorphisme \varkappa , défini par (1.2.32). On définit $A^\varkappa(\lambda)$ l'opd (1.2.14) sur Σ d'amplitude

$$\mathbf{a}^\varkappa(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = \frac{\alpha(\zeta, \zeta')}{4\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(z(\varkappa(\zeta) + \varkappa(\zeta'))/2 + y/k, k\varkappa(\zeta), k\varkappa(\zeta')) dz \quad (1.2.35)$$

où $k = \lambda^{1/2}$ et

$$\alpha(\zeta, \zeta') = 2^{-1} \left(\left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - |\zeta'|^2} \right)^{1/4} + \left(\frac{1 - |\zeta'|^2}{1 - |\zeta|^2} \right)^{1/4} \right). \quad (1.2.36)$$

Alors $\mathbf{a}^\varkappa \in \tilde{\mathcal{S}}_{\varrho, \delta, \delta}^{m+1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \Sigma \times \Sigma)$ et la restriction $A(\lambda)$ de $\tilde{\mathbf{A}}$, définie par la limite (1.2.29), existe et vérifie $A(\lambda) = \mathcal{U}^* A^\varkappa(\lambda) \mathcal{U}$.

Lorsqu'on travaille sur une variété avec un opd $A \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m$ où $1 \geq \varrho > \delta \geq 1 - \varrho \geq 0$ on peut définir un symbole principal a^b invariant lors d'un changement de coordonnées.

Proposition 1.2.27 *Soit A un opd sur la sphère de symbole $a^b \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m(T^*\mathbb{S}^{d-1})$ avec $1 \geq \varrho > \delta \geq 1 - \varrho \geq 0$. Soient χ une fonction de troncature supportée dans un voisinage \mathcal{V} du point $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ et \varkappa le difféomorphisme défini par (1.2.32) et \mathcal{U} défini par (1.2.33). Alors l'opd $\mathcal{U}\chi A\chi\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m(T^*\mathbb{R}^{d-1})$ a pour symbole principal, modulo $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m-(2\varrho-1)}(T^*\mathbb{R}^{d-1})$,*

$$a^\varkappa(y, \zeta) = \chi(\varkappa(\zeta))^2 a^b({}^t\varkappa'(\zeta)y, \varkappa(\zeta)). \quad (1.2.37)$$

Bien que, contrairement à la représentation (1.2.35), le symbole principal ne définit pas exactement l'opérateur A , la proposition se révélera très utile dans les applications qui vont suivre où seule la connaissance du symbole principal a^b , modulo $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m-(2\varrho-1)}$, est en fait nécessaire. En particulier, en vue de la Section 2.3.1, on a besoin de la proposition suivante qui permet localiser précisément le spectre essentiel d'un opd connaissant l'intervalle de valeurs prises par son symbole à "l'infini".

Proposition 1.2.28 *Soit A un opd sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} dont le symbole principal $a^b \in \mathcal{S}^0(T^*\mathbb{S}^{d-1})$ asymptotiquement homogène de degré 0. Alors*

$$\sigma_{ess}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \exists (b, \omega) \in T^*\mathbb{S}^{d-1}, \quad |b| \geq R, \text{ tels que } \mu = a^b(b, \omega)\}. \quad (1.2.38)$$

Preuve Nous allons commencer par construire des suites de Weyl pour tout μ dans l'ensemble (1.2.38). Pour ce faire nous allons considérer l'opd A dans la carte locale \varkappa, Σ définie par (1.2.32) (cf Figure 1.1). Fixons $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $\chi \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ dont le support est contenu dans un petit voisinage \mathcal{V} de ω_0 de telle sorte que l'application (1.2.32) soit un difféomorphisme de Σ sur \mathcal{V} . On note A^\varkappa l'opd de symbole

$$a^\varkappa(y, \zeta) = \chi(\varkappa(\zeta))^2 a^b({}^t\varkappa'(\zeta)y, \varkappa(\zeta))$$

alors d'après la proposition 1.2.27 $\mathcal{U}^* A^\varkappa \mathcal{U} - \chi A \chi$, où \mathcal{U} est défini par (1.2.33), est un opérateur compact. Soit maintenant $y_0 \in \Lambda_{\omega_0} \setminus \{0\}$ et $\mu = a^b(\tau y_0, \omega_0)$, $\forall \tau |y_0| > R$. Pour $\varepsilon > 0, \tau > 0$ on définit un ensemble de fonctions par

$$u_{\varepsilon, \tau}(\zeta) = \varepsilon^{-1/2} f(\varepsilon^{-1}\zeta) e^{-i\tau \langle y_0, \zeta \rangle}, \quad f \in C_0^\infty(\Sigma). \quad (1.2.39)$$

Il est clair que $\|u_{\varepsilon,\tau}\|$ est constante et que $u_{\varepsilon,\tau}$ tend faiblement vers zéro dans $\mathbb{L}^2(\Lambda_{\omega_0})$ quand $\tau \rightarrow \infty$. L'action de l'opérateur A^\varkappa sur les fonctions (1.2.39) est donnée par la méthode de la phase stationnaire (cf. [Hör83] Chapitre 7 ou [Yaf00a])

$$\begin{aligned} (A^\varkappa u_{\varepsilon,\tau})(\zeta) &= (2\pi)^{-1} \chi(\varkappa(\zeta))^2 \int_{\Lambda_{\omega_0}} \int_{\Sigma} e^{i\langle \zeta' - \zeta, y \rangle} a^b({}^t \varkappa'(\zeta)y, \varkappa(\zeta)) u_{\varepsilon,\tau}(\zeta') d\zeta' dy, \\ &= a^b(\tau y_0, \zeta) u_{\varepsilon,\tau}(\zeta) + r_{\varepsilon,\tau}(\zeta), \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

où $\|r_{\varepsilon,\tau}\| \leq C\varepsilon^{-1}\tau^{-1}$ tant que $\varepsilon\tau \rightarrow \infty$. On obtient donc que

$$\|A^\varkappa u_{\varepsilon,\tau} - \mu u_{\varepsilon,\tau}\| = O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{-1}\tau^{-1}),$$

et en choisissant $\varepsilon_n = 1/\sqrt{n}$ et $\tau_n = n$ on obtient que la suite de fonctions $(u_{\varepsilon_n,\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Weyl pour A^\varkappa associée à μ . Comme le symbole de A ne diffère de a^b que par des termes dans \mathcal{S}^{-1} on déduit du théorème de Weyl que $(\mathcal{U}^* u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n = u_{\varepsilon_n,\tau_n}$ est aussi une suite de Weyl pour $\chi A \chi$ associée à μ . De plus comme le support des fonctions $\mathcal{U}^* u_n$ s'écrase au point ω_0 quand $n \rightarrow \infty$ on peut choisir une fonction $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ supportée là où $\chi = 1$ de telle sorte que $\chi \mathcal{U}^* u_n = \chi_0 \mathcal{U}^* u_n = \mathcal{U}^* u_n$. Pour ce choix on a alors que

$$\|(A - \mu) \mathcal{U}^* u_n\| \leq \|(\chi A \chi - \mu) \mathcal{U}^* u_n\| + \|(1 - \chi) A \chi_0 \mathcal{U}^* u_n\|,$$

qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ puisque l'opérateur $(1 - \chi) A \chi_0$ est compact (il a un noyau C^∞). On a donc construit une suite de Weyl pour A associée à μ . Cette procédure permet de construire des suites de Weyl pour toute valeur dans (1.2.38).

Il reste maintenant à montrer que le spectre essentiel de A ne contient pas d'autres points que ceux de (1.2.38). Rappelons que le symbole principal $a^b(b, \omega)$ de A est défini sur $T^*\mathbb{S}^{d-1}$ modulo des termes dans \mathcal{S}^{-1} . Soient μ_0 n'appartenant pas à l'ensemble (1.2.38) et $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que $\chi(\tau) = 0$ pour $|\tau| \leq R$ et $\chi(\tau) = 1$ pour $|\tau| \geq R + 1$. On appelle $\mathcal{R}(\mu_0)$ un opd de symbole principal

$$r^b(b, \omega) = \chi(b) / (a^b(b, \omega) - \mu_0). \quad (1.2.41)$$

Comme, sur le support de χ , on a $|a^b(b, \omega) - \mu_0| \geq c > 0$ le symbole $r^b(b, \omega)$ appartient à la classe $\mathcal{S}^0(T^*\mathbb{S}^{d-1})$. Par la proposition 1.2.3 on obtient l'égalité suivante

$$\mathcal{R}(\mu_0)(A - \mu_0) = Id - K, \quad (1.2.42)$$

où K est un opérateur compact sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$. L'équation (1.2.42) montre que $\mathcal{R}(\mu_0)$ est une paramétrix de A . Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|u_n\| = 1, \quad w - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A u_n - \mu_0 u_n\| = 0.$$

Grâce à (1.2.42) on obtient l'estimation

$$\|u_n\| = \|\mathcal{R}(\mu_0)(Au_n - \mu_0 u_n) + Ku_n\| \leq \|\mathcal{R}(\mu_0)\| \|Au_n - \mu_0 u_n\| + \|Ku_n\|,$$

qui est absurde puisque d'une part $\lim_{n \rightarrow \infty} Ku_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (Au_n - \mu_0 u_n) = 0$ et d'autre part $\|u_n\| = 1$. \square

Enfin on aura besoin dans le cas du cercle \mathbb{S} (cf. section 2.3.2) d'un autre résultat.

Lemme 1.2.29 *Soit A un opd de symbole principal $a^b \in \mathcal{S}^{-1}(\mathbb{S})$, asymptotiquement homogène de degré -1 . Alors A est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S})$ et son noyau vérifie pour $\omega \neq \omega_0$, $\omega \rightarrow \omega_0$, uniformément en ω_0 , l'estimation*

$$p(\omega, \omega_0) = O(|\ln |\omega - \omega_0||). \quad (1.2.43)$$

Preuve Comme le symbole principal a^b de A n'est défini que modulo des termes dans \mathcal{S}^{-2} son noyau p , défini par

$$p(\omega, \omega') = (2\pi)^{-1} \int_{\Lambda_\omega} e^{i\langle \omega' - \omega, b \rangle} a^b(b, \omega) db,$$

n'est défini que modulo la contribution de termes dans \mathcal{S}^{-2} à l'intégrale précédente, c'est à dire modulo des termes bornés. Si on note θ l'angle qui sépare les directions ω et ω' on obtient que $\langle \omega - \omega', b \rangle = \pm \sin \theta |b|$ (selon l'orientation relative de b et $\omega - \omega'$) et $p(\omega, \omega') = \widehat{a^b(\cdot, \omega)}(\sin \theta)$. D'un autre coté comme $|\omega - \omega'| = 2 \sin(\theta/2)$ le problème précédent revient à majorer la singularité en 0 de la transformée de Fourier $\hat{a}(\xi)$ d'une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ et asymptotiquement homogène de degré -1 par $|\ln |\xi||$ quand $\xi \rightarrow 0$. Maintenant on écrit donc que

$$\hat{a}(\xi) = (2\pi)^{-1} \left(\int_{|x| \leq R} e^{-i\xi x} a(x) dx + \int_{|x| > R} e^{-i\xi x} a(x) dx \right),$$

pour un $R > 0$ tel que $a(\tau x) = a(x)/\tau$ pour $|x| \geq R, \tau \geq 1$. Le premier terme est ici uniformément borné en ξ , il ne reste donc qu'à considérer le second terme :

$$|\hat{a}(\xi)| \leq C \left(1 + \left| \int_{|x| > R} e^{-i\xi x} a(x) dx \right| \right).$$

Par changement de variable $|\xi|x \rightarrow x$ et selon que $\pm \xi > 0$ l'intégrale précédente devient

$$\int_{|x| > R} e^{-i\xi x} a(x) dx = 2C \int_{|\xi|R}^{\infty} e^{\mp ix} \frac{1}{x} dx = 2C \int_{|\xi|R}^1 e^{\mp ix} \frac{1}{x} dx + 2C \int_1^{\infty} e^{\mp ix} \frac{1}{x} dx.$$

La seconde intégrale étant uniformément bornée en ξ il reste à estimer la première

$$\left| \int_{\xi R}^1 e^{\mp ix} \frac{1}{x} dx \right| \leq \int_{|\xi|R}^1 \frac{1}{x} dx = -\ln R - \ln |\xi|,$$

ce qui conduit à $|\hat{a}(\xi)| = O(|\ln |\xi||)$. Finalement comme $p(\omega, \omega')$ est C^∞ pour tout $\omega \neq \omega'$ et vérifie l'estimation (1.2.43) au voisinage de la diagonale on a que $p(\omega, \omega') \in \mathbb{L}^2(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ et donc A est bien Hilbert-Schmidt. \square

1.3 L'opérateur de Schrödinger

Dans cette partie après avoir rappelé quelques résultats importants sur l'opérateur de Schrödinger on collecte différentes estimations découlant de la théorie de Mourre présenté en section 1.1.3. Ces estimations serviront dans la suite à appliquer la théorie des perturbations lisses, décrite dans les sections 1.1.1 et 1.1.2, à l'opérateur de Schrödinger. A partir d'ici $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

1.3.1 Les hypothèses

L'opérateur de Schrödinger magnétique est défini par l'expression différentielle suivante

$$H = (D - A(x))^2 + V(x). \quad (1.3.1)$$

où $A(x)$ est le potentiel (vecteur) magnétique et $V(x)$ est le potentiel (scalaire) électrique. On fait les hypothèses suivantes sur les potentiels :

Hypothèse 1 On suppose que les potentiels A et V admettent une décomposition en deux termes de régularités différentes

$$A(x) = A_L(x) + A_S(x), \quad V(x) = V_L(x) + V_S(x), \quad (1.3.2)$$

$$V_L, A_{L,j} \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad V_S, A_{S,j} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad j = 1, \dots, d. \quad (1.3.3)$$

Hypothèse 2 Ensuite on fait une hypothèse “longue portée” sur les termes C^∞ , avec un gain de décroissance pour les dérivées

$$|\partial_x^\alpha A_L(x)| + |\partial_x^\alpha V_L(x)| = O((1 + |x|)^{-\rho - |\alpha|}), \quad \rho \in (0, 1]. \quad (1.3.4)$$

Hypothèse 3 Puis une hypothèse “courte portée”, pour les termes non réguliers

$$|A_S(x)| + |V_S(x)| = O((1 + |x|)^{-\rho_0}), \quad \rho_0 > 1. \quad (1.3.5)$$

Hypothèse 4 Enfin on ajoute une dernière hypothèse simplificatrice sur le potentiel magnétique[†]

$$B(x) = \operatorname{rot} A(x) = o((1 + |x|)^{-1}), \quad (1.3.6)$$

$$\operatorname{div} A(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (1.3.7)$$

[†]En fait, d'après (1.3.4), il suffit de faire cette hypothèse sur la partie courte portée A_S du potentiel magnétique.

Sous l'hypothèse (1.3.7) on peut écrire que

$$H = -\Delta + 2iA\nabla + i\operatorname{div}A + |A|^2 + V,$$

ce qui permet de s'assurer qu'avec les hypothèses 1,2,3 l'opérateur (1.3.1) est bien auto-adjoint sur \mathcal{H} avec pour domaine $\mathcal{D}(H) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$. Sans l'hypothèse (1.3.7) on ne peut rien dire sur le domaine de H . On a seulement une information sur le domaine de la forme quadratique h définie pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$h[u, v] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle (D - A(x))u(x), \overline{(D - A(x))v(x)} \rangle + V(x)u(x)\overline{v(x)} dx = (Hu, v)_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)},$$

qui est $\mathcal{D}[h] = \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$, ce qui complique considérablement l'obtention des estimations de résolvantes (en particulier l'estimation de radiation) dont on a besoin pour développer la théorie des perturbations lisses pour H^\dagger . C'est pour cette raison que l'on décide de travailler ici sous l'hypothèse (1.3.7). Cette hypothèse n'est pas trop contraignante car elle est automatiquement vérifiée dans la jauge de Coulomb $\operatorname{div}A(x) = 0$.

L'hypothèse (1.3.6) n'est pas indispensable mais permet de simplifier la présentation de la théorie de la diffusion pour H . En effet sous les hypothèses (1.3.2) à (1.3.6) l'absence de valeurs propres positives pour l'opérateur H peut être trouvée dans les travaux de Ikebe et Uchiyama [IU71, Uch87]. La preuve de Uchiyama repose sur l'approche de Kato [Kat59] utilisant les propriétés de décroissance polynomiales des fonctions propres de l'opérateur H . Il est à noter que dans le cas où $A_S = 0$ et $V_S = 0$ l'absence de valeurs propres positives est démontrée dans la thèse de Nicoleau [Nic91] sous l'unique l'hypothèse (1.3.4). Cette preuve repose sur la méthode de Mourre et généralise la preuve de [CFKS87] au cas magnétique (voir aussi [DG97]).

Théorème 1.3.1 *Sous les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) l'équation $Hu(x) = \lambda u(x)$ n'a pas de solutions $u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ si $\lambda > 0$.*

Preuve Le théorème 1.3.1 découle du théorème 1.1 de [Uch87] avec les notations suivantes

$$b_j(x) = A_j(x), \quad a_{i,j}(x) = \delta_{i,j}, \quad q_1(x) = V_L(x) - \lambda, \quad q_2(x) = V_S(x).$$

et le choix de paramètres $\alpha = \beta = \gamma = \eta = 1$. Ces choix permettent de vérifier les hypothèses (A1) ... (G2) avec les constantes $a = 1/2, \delta_1 = 0, \delta_2 = -1$. En particulier l'hypothèse (F3) est bien vérifiée sous les hypothèses (1.3.2) à (1.3.6)

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{2-2\beta} \left(r \partial_r q_1(x) + \gamma q_1(x) + (1 + \eta) \left\{ \frac{1}{2\alpha - \gamma} |r q_2(x)|^2 + \frac{1}{2 - \gamma} |B(x)x|^2 \right\} \right) \\ = \limsup_{r \rightarrow \infty} (x \cdot \nabla V_L(x) + V_L(x) - \lambda + 2|xV_S(x)|^2 + 2|x \cdot \operatorname{rot} A(x)|^2) = -\lambda < 0. \end{aligned}$$

Le théorème 1.1 de [Uch87] conduit alors à l'estimation

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} R \int_{R < |x| < R+1} |u(x)|^2 dx > 0,$$

[†]Voir par exemple [GY00] où ce type de difficultés ont été surmontées pour l'opérateur de Dirac.

et d'après le Corollaire 1.2 [Uch87] (et un théorème de prolongement unique) $u \notin \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. \square

Sans l'absence de valeurs propres plongées dans le spectre positif il faudrait localiser les considérations du chapitre 2 sur un intervalle borné $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 et ne contenant pas de valeurs propres de H .

1.3.2 La théorie de Mourre pour H

Comme les termes à courte portée A_S et V_S jouent un rôle secondaire par rapport aux termes à longue portée A_L et V_L , on est amené à introduire l'opérateur

$$H_1 = (D - A_L(x))^2 + V_L(x), \quad (1.3.8)$$

auto-adjoint sur \mathcal{H} et de domaine $\mathcal{D}(H_1) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$ sous l'hypothèse (1.3.4). L'hypothèse (1.3.4) permet de développer facilement la théorie de Mourre pour l'opérateur H_1 . On introduit d'abord le générateur des dilatations qui joue un rôle essentiel dans la théorie de Mourre pour l'opérateur de Schrödinger.

Proposition 1.3.2 *On appelle générateur des dilatations l'opérateur auto-adjoint \mathcal{A} défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\mathcal{A} = \frac{x \cdot D + D \cdot x}{2} = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^d x_k \partial_{x_k} + \partial_{x_k} x_k. \quad (1.3.9)$$

Pour tout réel t l'opérateur $e^{it\mathcal{A}}$ est unitaire sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et vérifie pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(e^{it\mathcal{A}} f)(x) = e^{2t/d} f(e^t x). \quad (1.3.10)$$

En particulier $e^{it\mathcal{A}}$ préserve l'espace $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$.

Le générateur des dilatations est le candidat naturel au titre d'opérateur conjugué à H_1 .

Théorème 1.3.3 *Sous l'hypothèse (1.3.4) le générateur des dilatations est n fois conjugué à H_1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve D'après la proposition 1.3.2 le domaine de \mathcal{A} contient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui est bien dense dans $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$ et l'opérateur $e^{it\mathcal{A}}$ conserve bien $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$. Les hypothèses i) et ii) de la Définition 1.1.13 sont donc vérifiées. Intéressons nous maintenant au commutateur B_1 . Un calcul direct nous donne

$$i[H_1, \mathcal{A}] = 2H_1 + v(x) + \sum_{k=1}^d a_k(x) D_k, \quad (1.3.11)$$

ou les fonctions $v(x)$ et $a_k(x)$, $k = 1, \dots, d$ dépendent seulement des dérivées partielles des potentiels $V_L(x)$ et $A_L(x)$

$$\begin{aligned} v(x) &= -2V_L(x) - (x \cdot \nabla)V_L(x) - i(\operatorname{div}(A_L(x)) + (x \cdot \nabla)A_L(x)) \\ &\quad - 2 \langle A_L(x), A_L(x) + (x \cdot \nabla)A_L(x) \rangle, \\ a_k(x) &= 2(A_{L,k}(x) + (x \cdot \nabla)A_{L,k}(x)). \end{aligned}$$

En particulier sous l'hypothèse (1.3.4) v et a_k satisfont pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ les estimations

$$|\partial_x^\alpha v(x)| + |\partial_x^\alpha a_k(x)| = O\left((1 + |x|)^{-\rho - |\alpha|}\right), \quad (1.3.12)$$

avec le même ρ que dans (1.3.4). On déduit de (1.3.12) que les opérateurs $v(x)(H_1 + i)^{-1/2}$, $a_k(x)D_k(H_1 + i)^{-1}$ sont compact et donc le commutateur B_1 est donc H_1 -borné. En réitérant le même calcul que dans (1.3.11) on trouve que les commutateurs B_j vérifient

$$B_j = 2^j H_1 + v_j(x) + \sum_{k=1}^d a_{j,k}(x)D_k, \quad (1.3.13)$$

ou les fonctions $v_j(x)$ et $a_{j,k}(x)$, $k = 1, \dots, d$ dépendent encore seulement des dérivées partielles des potentiels $V_L(x)$ et $A_L(x)$ et satisfont les estimations (1.3.12) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Les commutateurs B_j sont donc H_1 -bornés pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et les hypothèses iii) et iv) sont satisfaites pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il découle de (1.3.11) que pour tout intervalle Λ_δ , avec $\lambda > \delta > 0$ (cf. (1.1.22)) on a l'estimation de Mourre

$$E_1(\Lambda_\delta)i[H_1, \mathcal{A}]E_1(\Lambda_\delta) \geq cE_1(\Lambda_\delta) + E_1(\Lambda_\delta)K_1E_1(\Lambda_\delta), \quad (1.3.14)$$

avec $c = 2(\lambda - \delta) > 0$ et K_1 compact, donc l'hypothèse v) est vérifiée. \square

Pour l'opérateur H , contenant les termes à courte portée A_S et V_S , on a seulement le résultat suivant.

Proposition 1.3.4 *Sous les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) l'opérateur H défini par (1.3.1) vérifie les hypothèses i), ii), iii) et v) (avec $K = 0$) pour \mathcal{A} défini par (1.3.9) sur tout intervalle $\Lambda_\delta \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 avec δ assez petit.*

Preuve En ajoutant les termes à courte portée

$$\tilde{V}_S = (DA_S(x) + A_S(x)D - 2 \langle A_L(x), A_S(x) \rangle - |A_S(x)|^2 - V_S(x))$$

dans (1.3.11) on obtient

$$i[H, \mathcal{A}] = 2H + v(x) + \sum_{k=1}^d a_k(x)D_k - 2\tilde{V}_S + [\tilde{V}_S, x \cdot \nabla]. \quad (1.3.15)$$

il est clair que sous l'hypothèse (1.3.5) $(H_0 + i)^{-1}DA_S(x)$, $A_S(x)D(H + i)^{-1}$, $V_S(x)(H + i)^{-1}$ sont compact. Pour minorer le commutateur on utilise les estimations suivantes (cf.[Yaf00b] section 4.2)

$$|(V_S(x)u(x), x.\nabla u(x))_{\mathcal{H}}| \leq c \|\langle x \rangle^{-\varepsilon_1} (H + i)^{1/2} u\|^2, \quad (1.3.16)$$

$$|(DA_S(x)u(x), x.\nabla u(x))_{\mathcal{H}}| \leq c \|\langle x \rangle^{-\varepsilon_1} (H + i)u\|^2, \quad (1.3.17)$$

$$|(A_S(x)Du(x), x.\nabla u(x))_{\mathcal{H}}| \leq c \|\langle x \rangle^{-\varepsilon_1} (H + i)^{1/2} u\|^2, \quad (1.3.18)$$

avec $\varepsilon_1 = (\rho_0 - 1)/2 > 0$. En particulier le commutateur (1.3.15) s'étend en un opérateur borné de $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$ dans \mathcal{H} et l'hypothèse iii) est vérifiée. Comme de plus l'opérateur $\langle x \rangle^{-\varepsilon_0} (H + i)E(\Lambda_\delta)$ est compact, il découle de (1.3.15) que pour tout intervalle Λ_δ , avec $\lambda > \delta > 0$ (cf. (1.1.22)) on a l'estimation de Mourre

$$E(\Lambda_\delta)i[H, \mathcal{A}]E(\Lambda_\delta) \geq cE(\Lambda_\delta) + E(\Lambda_\delta)KE(\Lambda_\delta), \quad (1.3.19)$$

avec $c > 0$ et K compact, et l'hypothèse v) est vérifiée. Maintenant comme K est compact $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|KE(\Lambda_\delta)\| = 0$ on a que

$$E(\Lambda_\delta)KE(\Lambda_\delta) \geq -C_\delta E(\Lambda_\delta), \quad C_\delta > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} C_\delta = 0,$$

d'où l'estimation

$$E(\Lambda_\delta)i[H, \mathcal{A}]E(\Lambda_\delta) \geq cE(\Lambda_\delta), \quad (1.3.20)$$

pour un $c > 0$ et δ assez petit. \square

Remarque 1.3.5 L'hypothèse iv) de la définition 1.1.13 n'est vérifiée que si on impose la condition supplémentaire $\rho_0 \geq 2$ dans (1.3.5) à cause du terme

$$[[DA_S(x) + A_S(x)D - 2 \langle A_L(x), A_S(x) \rangle - |A_S(x)|^2 - V_S(x), x.\nabla], x.\nabla]$$

dans le double commutateur $B_2 = i[[H, \mathcal{A}], \mathcal{A}]$ et qu'on ne peut majorer, comme dans (1.3.16) à (1.3.18), que par $\langle x \rangle^{-(\rho_0-2)/2} (H_0 + i)$.

Le théorème 1.3.3 nous permet de récupérer l'ensemble des résultats fourni par la théorie de Mourre énoncés dans la section 1.1.3 au moins pour l'opérateur H_1 .

Théorème 1.3.6 Soient \mathcal{A} le générateur des dilatations et $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ disjoint de 0. Alors sous l'hypothèse (1.3.4) on a les estimations de propagation suivantes

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \|\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R_1^l(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-s}\| \leq c, \quad \forall s > l - 1/2, \quad (1.3.21)$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq \pm \operatorname{Im} z > 0}} \|\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R_1^l(z) P_{\mathcal{A}}^\mp \langle \mathcal{A} \rangle^{s-l}\| \leq c, \quad \forall s > l - 1/2, \quad (1.3.22)$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq \pm \operatorname{Im} z > 0}} \|\langle \mathcal{A} \rangle^{s_1} P_{\mathcal{A}}^\mp R_1^l(z) P_{\mathcal{A}}^\pm \langle \mathcal{A} \rangle^{s_2}\| \leq c, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.3.23)$$

où $R_1(z) = (H_1 - z)^{-1}$. En particulier le spectre positif de H_1 est absolument continu.

1.3.3 Principe d'absorption limite et estimation de radiation

Pour appliquer la théorie des perturbations lisses, présentée dans la section 1.1.1, au couple d'opérateurs $H_1, H_0 = -\Delta$ on a besoin d'estimations de propagation du type (1.1.2) pour montrer le caractère H -lisse de certains opérateurs. Le théorème 1.3.6 montre déjà que, sous l'hypothèse (1.3.4) l'opérateur $\langle \mathcal{A} \rangle^{-s}$, $s > 1/2$, est H_1 -lisse sur tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0. Comme les opérateurs $E(\Lambda)D$ et $DE(\Lambda)$ sont bornés on peut obtenir la même estimation que (1.3.21), pour $l = 1$, avec $\langle \mathcal{A} \rangle^{-p}$ remplacé par $\langle x \rangle^{-p}$. C'est le principe d'absorption limite énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 1.3.7 (Principe d'Absorption Limite) *Soit H défini par (1.3.1) avec A et V vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7). Alors pour tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 on a l'estimation*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \|\langle x \rangle^{-p} R(z) \langle x \rangle^{-p}\| \leq c, \quad p > 1/2. \quad (1.3.24)$$

En particulier l'opérateur $\langle x \rangle^{-p}$, $p > 1/2$, est H -lisse sur tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 et $\langle x \rangle^{-p} R(\lambda \pm i0) \langle x \rangle^{-p}$ est compact pour tout $\lambda \in (0, \infty)$.

Pour cela on peut, comme dans [Nic91] Chap. III section 2.1, utiliser le lemme 8.2 de [PSS81] (voir aussi la proposition 1.3.21).

Lemme 1.3.8 *Pour tout $p \in [0, 1]$ l'opérateur $\langle \mathcal{A} \rangle^p R(\pm i) \langle x \rangle^{-p}$ est borné dans \mathcal{H} .*

Preuve Via un argument d'interpolation il suffit d'avoir $\|\langle \mathcal{A} \rangle^p R(\pm i) \langle x \rangle^{-p}\| < \infty$ pour $p = 1$ (le cas $p = 0$ étant trivial). Pour $p = 1$ on peut écrire la décomposition suivante

$$D.x(H \pm i)^{-1} \langle x \rangle^{-1} = \sum_{k=1}^d (D_k(H \pm i)^{-1}) (x_k \langle x \rangle^{-1}) + \sum_{k=1}^d D_k[x_k, (H \pm i)^{-1}] \langle x \rangle^{-1}. \quad (1.3.25)$$

Le premier terme de (1.3.25) est clairement un produit d'opérateurs bornés. Pour le second terme de (1.3.25) on utilise le fait que le commutateur de H avec une l'opérateur de multiplication par la fonction $g(x)$ dont les dérivées sont dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$[g(x), H] = [g(x), (D - A)^2] = -2\nabla g(x)\nabla - \Delta g(x) + iA(x)\nabla g(x), \quad (1.3.26)$$

soit borné de $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$, et la décomposition suivante

$$\sum_{k=1}^d D_k[x_k, (H \pm i)^{-1}] \langle x \rangle^{-1} = \sum_{k=1}^d (D_k(H \pm i)^{-1}) ([H, x_k] (H \pm i)^{-1}) \langle x \rangle^{-1},$$

ce qui conclut la preuve. \square

Remarque 1.3.9 La démonstration du principe d'absorption limite à partir de l'estimation (1.1.24) et du lemme 1.3.8 n'est possible que si $\rho_0 \geq 2$ dans (1.3.5) d'après la remarque 1.3.5. Cependant cette hypothèse n'est pas optimale. Dans le cas $A(x) = 0$ Yafaev à montré dans [Yaf85] qu'on peut obtenir, avec la méthode de Mourre, les mêmes résultats en imposant seulement la condition $\rho_0 > 1$. Ceci revient à affaiblir légèrement l'hypothèse iv) de la Définition 1.1.13. C'est de cette manière que l'on obtient le principe d'absorption limite pour H . Ces détails techniques sont relégués en appendice (cf. section 2.3.3).

Pour des raisons techniques on a besoin de résultats similaires au principe d'absorption limite mais avec l'opérateur $\langle x \rangle^{-p} D_k$, $p > 1/2$, $k = 1, \dots, d$. Ces estimations se déduisent de (1.3.24) grâce au lemme suivant.

Lemme 1.3.10 *les opérateurs $\langle x \rangle^{-p} R(\pm i) \langle x \rangle^p$ et $\langle x \rangle^{-p} D_k R(\pm i) \langle x \rangle^p$, $k = 1, \dots, d$, sont bornés pour tout $p \in [0, 1]$.*

Preuve Dans le premier cas le résultat découle de la décomposition

$$\langle x \rangle^{-p} R(\pm i) \langle x \rangle^p = R(\pm i) + \langle x \rangle^{-p} [R(\pm i), \langle x \rangle^p] = R(\pm i) + \langle x \rangle^{-p} R(\pm i) [\langle x \rangle^p, H] R(\pm i),$$

puisque d'après (1.3.26) le commutateur $[\langle x \rangle^p, H]$ est bien borné pour $p \leq 1$. De même pour le second terme

$$\langle x \rangle^{-p} D_k R(\pm i) \langle x \rangle^p = (D_k - i \langle x \rangle^{-p} \partial_k (\langle x \rangle^p)) R(\pm i) + \langle x \rangle^{-p} D_k R(\pm i) [\langle x \rangle^p, H] R(\pm i).$$

□

Proposition 1.3.11 *Soit H défini par (1.3.1) avec A et V vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7). Alors pour tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 on a les estimations*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \|\langle x \rangle^{-p} D_k R(z) D_j \langle x \rangle^{-p}\| \leq c, \quad p > 1/2, \quad k, j = 1, \dots, d, \quad (1.3.27)$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \|\langle x \rangle^{-p} D_k R(z) \langle x \rangle^{-p}\| \leq c, \quad p > 1/2, \quad k = 1, \dots, d. \quad (1.3.28)$$

En particulier les opérateurs $\langle x \rangle^{-p} D_k$, $D_k \langle x \rangle^{-p}$, $p > 1/2$, $k = 1, \dots, d$ sont H -lisse sur tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 et le spectre positif de H est absolument continu.

Preuve On utilise la formule de la résolvante $R(z) = R(-i) + (z + i)R(z)R(-i)$ pour obtenir les décompositions ci-dessous

$$\langle x \rangle^{-p} D_k R(z) \langle x \rangle^{-p} = \langle x \rangle^{-p} D_k R(-i) \langle x \rangle^{-p} + (z + i) \langle x \rangle^{-p} D_k R(-i) \langle x \rangle^p \langle x \rangle^{-p} R(z) \langle x \rangle^{-p},$$

$$\langle x \rangle^{-p} D_k R(z) D_j \langle x \rangle^{-p} = \langle x \rangle^{-p} D_k R(-i) D_j \langle x \rangle^{-p} + \langle x \rangle^{-p} D_k R(z) \langle x \rangle^{-p} \langle x \rangle^p R(-i) D_j \langle x \rangle^{-p}$$

on vérifie qu'il s'agit bien de produits d'opérateurs bornés grâce au théorème 1.3.7 et au lemme 1.3.10. Les estimations pour $p \in (1/2, 1]$ entraînent celles pour $p > 1$. \square

Pour H_1 l'estimation (1.3.24) et la continuité au sens de Hölder découlant de la proposition 1.1.16 nous permettent de récupérer l'équivalent des propositions 1.2.21 et 1.2.22 pour l'opérateur H_1 .

Corollaire 1.3.12 *On pose $R_1(z) = (H_1 - z)^{-1}$ et*

$$\delta_\varepsilon(H_1 - \lambda) = (2\pi i)^{-1}(R_1(\lambda + i\varepsilon) - R_1(\lambda - i\varepsilon)). \quad (1.3.29)$$

Alors pour $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a l'existence de la limite suivante et l'égalité

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta_\varepsilon(H_1 - \lambda)f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = d(E_1(\lambda)f_1, f_2)/d\lambda = (\Gamma_1(\lambda)f_1, \Gamma_1(\lambda)f_2)_{\mathfrak{N}}, \quad (1.3.30)$$

où, $\Gamma_1(\lambda) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathfrak{N}$ vérifie $\Gamma_1(\lambda)H_1f = \lambda\Gamma_1(\lambda)f$. De plus les opérateurs $\langle x \rangle^{-p}\Gamma_1^*(\lambda)$ et $\langle x \rangle^{-p}D_k\Gamma_1^*(\lambda)$, $k = 1, \dots, d$, sont, respectivement, compact et bornés sur \mathfrak{N} et continus au sens de Hölder par rapport à $\lambda > 0$.

Preuve Ce résultat découle par continuité de (1.3.24) sachant que pour tout $p > 1/2$ l'opérateur $\langle x \rangle^{-p}R_1(z)\langle x \rangle^{-p}$ est compact et $\langle x \rangle^{-p}D_kR_1(z)D_k\langle x \rangle^{-p}$ sont continus pour $\text{Im } z \neq 0$. \square

Si le principe d'absorption limite suffit à développer la théorie de la diffusion pour des perturbations à courte portée il n'en va pas de même pour les cas longue portée. C'est pourquoi on a besoin de l'estimation de radiation introduite dans [Yaf93, Yaf95]. Cette estimation se rattache au cas critique $p = 1/2$ du théorème 1.3.7. On adopte la même méthode de démonstration que dans [Yaf00b].

Théorème 1.3.13 (Estimation de Radiation) *Soit H_1 défini par (1.3.8) avec A_L et V_L vérifiant (1.3.4), alors les opérateurs*

$$G_j = \langle x \rangle^{-1/2} \nabla_j^\perp, \quad \nabla_j^\perp u = \partial_j u - |x|^{-2} \langle \nabla u, x \rangle x_j, \quad j = 1, \dots, d, \quad (1.3.31)$$

sont H_1 -lisse sur tout intervalle compact $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0.

Preuve Soit une fonction $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $m(x) = |x|$ pour $|x| \geq 1$. On appelle \mathbf{M} l'opérateur différentiel défini par

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^d m_k D_k + D_k m_k, \quad m_k(x) = \partial_{x_k} m(x).$$

Un calcul direct montre que

$$i[H_1, \mathbf{M}] = 4 \sum_{k,j=1}^d D_k m_{jk} D_j + \sum_{k=1}^d N_k D_k + N_0,$$

où $N_k, k = 0, \dots, d$ sont des fonctions C^∞ dépendant seulement des dérivées de A_L et V_L

$$N_k(x) = - \langle A_L(x), \nabla m_k(x) \rangle + \langle \nabla A_{L,k}(x), \nabla m(x) \rangle, \quad k = 1, \dots, d, \quad (1.3.32)$$

$$\begin{aligned} N_0(x) &= -\Delta^2 m(x) + 2 \langle \nabla V_L(x), \nabla m(x) \rangle + 2i \langle A_L(x), \nabla \Delta m(x) \rangle \\ &\quad + 4 \sum_{k,j=1}^d (i m_{kj}(x) + A_{L,j}(x) m_k(x)) \partial_k A_{L,j}(x). \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

Sous l'hypothèse (1.3.4) ces fonctions satisfont, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les estimations $|\partial_x^\alpha N_k(x)| = O\left((1 + |x|)^{-1-\rho-|\alpha|}\right)$. Soit $u \in E(\Lambda)\mathcal{H}$ alors d'après (1.3.31) on a pour $|x| \geq 1$

$$\sum_{k,j=1}^d m_{jk} D_j u \overline{D_k u} = \sum_{j=1}^d |x|^{-1} |\nabla_j^\perp u|^2 = |x|^{-1} |\nabla^\perp u|^2.$$

En tenant compte des estimations sur N_k on arrive à

$$\begin{aligned} (i[H_1, \mathbf{M}]u, u) &= 4 \sum_{k,j=1}^d (D_k m_{jk} D_j u, u) + (N_0 u, u) + \sum_{k=1}^d (N_k D_k u, u) \\ &\geq 4 \|\langle x \rangle^{-1/2} \nabla^\perp u\|^2 - c \|\langle x \rangle^{-l} (H_0 + i)^{1/2} u\|^2, \end{aligned}$$

avec $l = (1 + \rho)/2 > 1/2$ et $c > 0$. En utilisant le théorème 1.3.7 et la proposition 1.1.2 on en déduit l'estimation de radiation. \square

On a aussi besoin pour les opérateurs G_j de l'équivalent de la proposition 1.2.21. La démonstration de la proposition suivante peut être trouvée dans [Yaf95].

Proposition 1.3.14 *Les opérateurs $G_j \Gamma_0^*(\lambda)$, $j = 1, \dots, d$, sont bornés dans l'espace $\mathfrak{R} = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ et continus en norme par rapport à $\lambda > 0$.*

Les théorèmes 1.3.7 et 1.3.13 suffisent pour montrer l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde (24).

1.3.4 Estimations de propagation microlocales

Pour l'étude de la matrice de diffusion on a besoin d'estimations supplémentaires par rapport à celles de la section précédente. Ces estimations, appelées estimations microlocales, ont été introduites par Isozaki et Kitada dans [IK84, IK85b] et donnent des estimations du type (1.3.21), (1.3.22), (1.3.23), où \mathcal{A} et $P_{\mathcal{A}}^\pm$ sont respectivement remplacés par x et des opd de la classe $\mathcal{S}_{1,0}^0$ dont le symbole est localisé dans certaines zones de l'espace des phases $\Gamma_\mp(\theta, a)$ dont voici la définition (voir aussi la Figure 1.2).

Définition 1.3.15 Pour $a > 0$ et $\theta \in (-1, 1)$ on appelle $\Gamma_{\mp}(\theta, a)$ la partie de l'espace de phases telle que

$$\Gamma_{\pm}(\theta, a) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d} : \pm \langle \widehat{x}, \widehat{\xi} \rangle \geq \theta, |x| \geq a, |\xi| \geq a\}. \quad (1.3.34)$$

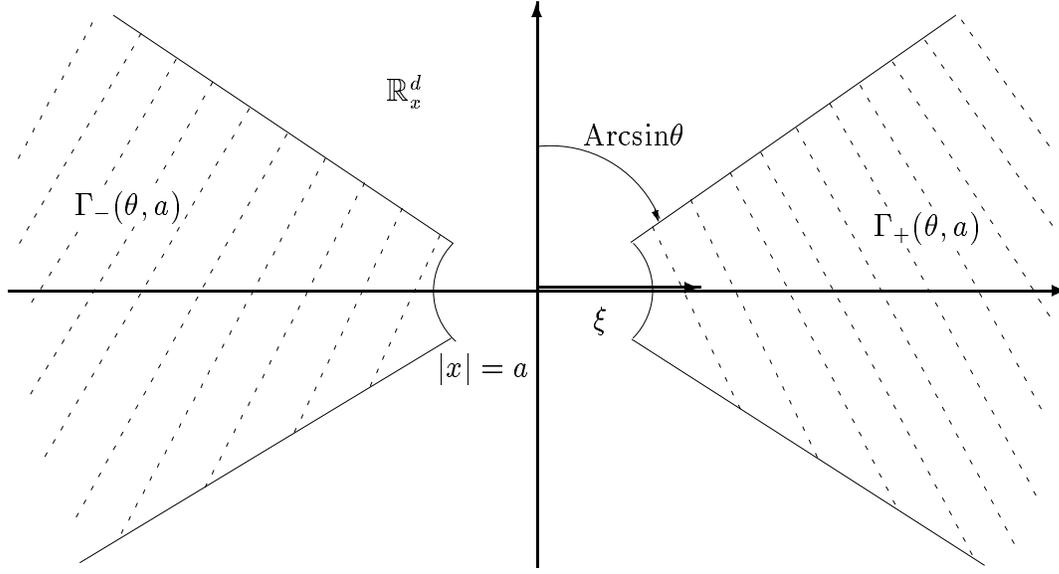


FIG. 1.2: Les cônes tronqués $\Gamma_{\pm}(\theta, a)$

Indépendamment Jensen [Jen85] a proposé une démonstration de ces estimations, à énergie fixée, reposant sur la théorie de Mourre. Dans la suite on redémontre ces estimations microlocales pour des opd à symbole oscillant $C^m(\Phi)$, m quelconque, en suivant l'approche de Jensen.

On commence par un lemme qui généralise le lemme 1.3.8 et dont la démonstration repose sur les mêmes idées (voir lemme 2.3 dans [Per81]).

Lemme 1.3.16 Pour tout $p \in [0, l]$ l'opérateur $\langle \mathcal{A} \rangle^p R_1^l(\pm i) \langle x \rangle^{-p}$ est borné dans \mathcal{H} .

La démonstration des estimations de propagation repose sur le lemme suivant adapté du lemme A.5. de [Jen85]. Ce lemme est basé sur la construction d'une paramétrix de l'opérateur \mathcal{A} . C'est ici que l'hypothèse de localisation du symbole de Q_{\pm} est cruciale, en particulier le fait que ce support n'intersecte pas l'ensemble $\langle x, \xi \rangle = 0$ (cf. Figure 1.2).

Lemme 1.3.17 Soit $Q_{\pm} = \text{Op}(e^{i\Phi(x, \xi)} q_{\pm}(x, \xi))$ un opd de la classe $C^m(\Phi)$ pour une phase $\Phi \in \mathcal{S}^r$ avec $r \in [0, 1)$. On suppose que $\text{supp } q_{\pm} \subset \Gamma_{\mp}(\theta, a)$ pour un $\theta \in (0, 1)$ et un $a > 0$, alors il existe des opd $R_{\pm}, Q_{k, \pm}, k = 0, \dots, s$, dont les symboles respectifs vérifient

$$R_{\pm} = \text{Op}(r_{\pm}(x, \xi)), \quad |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} r_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, N} \langle x \rangle^{-N} \langle \xi \rangle^{-N}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (1.3.35)$$

$$Q_{\pm, k} = \text{Op}(e^{i\Phi(x, \xi)} q_{k, \pm}(x, \xi)), \quad q_{k, \pm} \in \mathcal{S}^m, \quad (1.3.36)$$

$$\text{supp } q_{k, \pm} \subset \Gamma_{\mp}(\theta', a'), \quad 1 > \theta' > \theta > 0, a > a' > 0, \quad k = 0, \dots, s, \quad (1.3.37)$$

tels que

$$Q_{\pm} \langle x \rangle^s = \sum_{k=0}^s \mathcal{A}^k Q_{k, \pm} + R_{\pm}. \quad (1.3.38)$$

Preuve Soient $1 > \theta > \theta' > 0$ et $a > a' > 0$, on introduit les fonctions de troncature suivantes :

- $\sigma_{\pm} \in C^{\infty}(\mathbb{R}, [0, 1])$ telle que : $\sigma_{\pm}(\tau) = 0$ pour $\pm\tau \leq \theta'$ et $\sigma_{\pm}(\tau) = 1$ pour $\pm\tau \geq \theta$,
- $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, [0, 1])$ telle que : $\eta(\tau) = 0$ pour $\tau \leq a'$ et $\eta(\tau) = 1$ pour $\tau \geq a$,

On pose $\zeta_{\pm}(x, \xi) = \sigma_{\pm}(\langle \widehat{x}, \widehat{\xi} \rangle \eta(|x|))$, il est clair que ζ_{\pm} vérifie les propriétés suivantes

$$\zeta_{\pm} \in \mathcal{S}^0, \quad \text{supp } \zeta_{\pm} \subset \Gamma_{\pm}(\theta', a'), \quad \zeta_{\pm}|_{\text{supp } q_{\mp}} \equiv 1.$$

La démonstration repose sur la construction d'une paramétrix u_{\pm} de \mathcal{A} valable dans les cônes $\Gamma_{\pm}(\theta, a)$:

$$u_{\pm}(x, \xi) = \frac{\zeta_{\pm}(x, \xi)}{\langle x, \xi \rangle - id/2} \in \mathcal{S}^{-1}. \quad (1.3.39)$$

L'inclusion découle de l'estimation $|\langle x, \xi \rangle - id/2| \geq c \langle x \rangle$ sur le support de ζ_{\mp} .

D'après le lemme 1.2.10 l'opérateur $Q_{\pm} \langle x \rangle$ admet la décomposition suivante

$$Q_{\pm} \langle x \rangle = P_{\pm} + R_{\pm}, \quad P_{\pm} = \text{Op}(e^{i\Phi(x, \xi)} p_{\pm}(x, \xi)) \in \mathcal{C}^{m+1}(\Phi),$$

$$R_{\pm} = \text{Op}(r_{\pm}(x, \xi)), \quad |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} r_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, N} \langle x \rangle^{-N} \langle \xi \rangle^{-N}, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

La construction des symboles $q_{\pm, k}$ repose sur l'idée suivante : trouver $q_{\pm, 1}$ tel que le symbole de $\mathcal{A}Q_{\pm, 1} - P_{\pm} = -Q_{\pm, 0}$ soit d'ordre m . Comme \mathcal{A} est un opd de symbole $\langle x, \xi \rangle - id/2 \in \mathcal{S}^1$ on peut, en utilisant la formule de composition (1.2.10)[†], calculer ce symbole

$$-e^{i\Phi(x, \xi)} q_{\pm, 0}(x, \xi) =$$

$$(\langle x, \xi \rangle - id/2) e^{i\Phi(x, \xi)} q_{\pm, 1}(x, \xi) + x \cdot \nabla (e^{i\Phi(x, \xi)} q_{\pm, 1}(x, \xi)) - e^{i\Phi(x, \xi)} p_{\pm}(x, \xi). \quad (1.3.40)$$

[†]Cette formule est ici exacte puisque \mathcal{A} est un opérateur différentiel !

On procède par approximations successives, soient

$$q_{\pm,1}(x, \xi) = \sum_{j=0}^n a_j(x, \xi), \quad (1.3.41)$$

$$a_0(x, \xi) = p_{\pm}(x, \xi)u_{\mp}(x, \xi), \quad (1.3.42)$$

$$a_{j+1}(x, \xi) = -u_{\mp}(x, \xi)e^{-i\Phi(x, \xi)}x \cdot \nabla (e^{i\Phi(x, \xi)}a_j(x, \xi)). \quad (1.3.43)$$

On peut remarquer que tous ces symboles ont un support inclus dans celui de p_{\pm} . Par induction on montre que $a_j(x, \xi) \in \mathcal{S}^{m-jr}$ puis en réinjectant (1.3.41)-(1.3.43) dans (1.3.40) et tenant compte de l'égalité $\langle x, \xi \rangle - id/2 u_{\mp}(x, \xi) = \zeta_{\mp}(x, \xi) = 1$ sur le support de p_{\pm} on obtient que

$$\begin{aligned} -e^{i\Phi(x, \xi)}q_{\pm,0}(x, \xi) &= (\langle x, \xi \rangle - id/2) \sum_{j=0}^n e^{i\Phi(x, \xi)}a_j(x, \xi) + \sum_{j=0}^n x \cdot \nabla (e^{i\Phi(x, \xi)}a_j(x, \xi)) \\ &\quad - e^{i\Phi(x, \xi)}p_{\pm}(x, \xi) \\ &= x \cdot \nabla (e^{i\Phi(x, \xi)}a_n(x, \xi)) \\ &= e^{i\Phi(x, \xi)} (\langle x, \nabla a_n(x, \xi) \rangle + ia_n(x, \xi) \langle x, \nabla \Phi(x, \xi) \rangle) \end{aligned}$$

En particulier $q_{\pm,0} \in \mathcal{S}^{m+1-(n+1)r}$. Donc si on choisit n dans (1.3.41) tel que $n+1 \geq 1/r$ on a bien $q_{\pm,0} \in \mathcal{S}^m$.

Au final on a obtenu que $Q_{\pm} \langle x \rangle = \mathcal{A}Q_{\pm,1} + Q_{\pm,0} + R_{\pm}$ où $Q_{\pm,0}, Q_{\pm,1}$, vérifient bien les hypothèses (1.3.36), (1.3.37), et le symbole du reste R_{\pm} vérifie bien (1.3.35). Ceci conclut la preuve pour $s=1$, pour $s > 1$ il suffit de réitérer la même construction autant de fois que nécessaire. Pour les termes de reste supplémentaires il suffit de remarquer que le symbole de $R_{\pm} \langle x \rangle^k$ vérifie bien l'estimation (1.3.35) ce qui découle de la formule de composition (1.2.7) et de (1.3.35). \square

Ainsi adapté le lemme 1.3.17 permet d'obtenir les estimations suivantes.

Lemme 1.3.18 *Soit $Q_{\pm} = \text{Op}(e^{i\Phi(x, \xi)}q_{\pm}(x, \xi))$ un opd de la classe $\mathcal{C}^m(\Phi)$ pour une phase $\Phi \in \mathcal{S}^r$ avec $r \in [0, 1)$. On suppose que $\text{supp } q_{\pm} \subset \Gamma_{\mp}(\theta, a)$ pour un $\theta \in (0, 1)$ et un $a > 0$. Alors on a l'estimation suivante*

$$\|\langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} Q_{\pm} \langle x \rangle^s\| < \infty. \quad (1.3.44)$$

Preuve D'après le lemme 1.3.17 on a que

$$\langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} Q_{\pm} \langle x \rangle^{s+m} \langle x \rangle^{-m} = \sum_{k=0}^{s+m} \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} \mathcal{A}^k Q_{\pm, k} \langle x \rangle^{-m} + \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} R_{\pm} \langle x \rangle^{-m},$$

où les opd $Q_{\pm, k} = \text{Op}(e^{i\Phi(x, \xi)}q_{\pm, k}(x, \xi)\psi(|\xi|^2))$, $q_{\pm, k} \in \mathcal{S}^m$, et R_{\pm} vérifie, pour un N arbitrairement grand, l'estimation (1.3.35). En particulier grâce au théorème 1.2.4 $\|R_{\pm}\| < \infty$. En tenant compte de ce que

$$\| \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} \mathcal{A}^k \| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} | \langle y \rangle^{-s-m} y^k | \leq 1, \quad 0 \leq k \leq s+m$$

on en déduit que

$$\| \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} Q_{\pm} \langle x \rangle^s \| \leq \sum_{k=0}^s \| Q_{\pm, k} \langle x \rangle^{-m} \| + \| R_{\pm} \|.$$

Enfin d'après la proposition 1.2.13 les opérateurs $Q_{\pm, k} \langle x \rangle^{-m}$ sont bien bornés. \square

Pour obtenir des estimations du type (1.3.23) la difficulté principale est la présence des projecteurs spectraux $P_{\mathcal{A}}^{\pm}$ qui rend difficile l'utilisation du calcul pseudo-différentiel [Jen85]. C'est pourquoi on utilise la transformation de Mellin pour diagonaliser \mathcal{A} (cf. les lemmes 2 et 3 dans [Per80]).

Lemme 1.3.19 *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la transformée de Mellin est définie par*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})) \\ f(x) &\longmapsto (\mathcal{M}f)(\nu, \omega) \end{aligned}$$

où

$$(\mathcal{M}f)(\nu, \omega) = f^{\sharp}(\nu, \omega) = \int_0^{\infty} \sigma^{-i\nu + \frac{d}{2} - 1} f(\sigma\omega) \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.3.45)$$

La transformation de Mellin se prolonge en un opérateur unitaire sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dont l'adjoint est formellement défini par :

$$(\mathcal{M}^*g)(x) = \int_0^{\infty} |x|^{i\nu - \frac{d}{2}} g(\nu, \hat{x}) \frac{d\nu}{\sqrt{2\pi}}.$$

L'opérateur \mathcal{M} diagonalise l'opérateur \mathcal{A} , i.e. $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(\mathcal{M}\mathcal{A})f(\nu, \omega) = \nu(\mathcal{M}f)(\nu, \omega).$$

Maintenant on peut démontrer le lemme suivant.

Lemme 1.3.20 *Soit Q_{\pm} un opd de symbole $q_{\pm} \in \mathcal{S}_{\rho, \delta}^m$. On suppose que $\text{supp } q_{\pm} \subset \Gamma_{\mp}(\theta, a)$ pour un $\theta \in (0, 1)$ et un $a > 0$. Alors on a*

$$\| \langle \mathcal{A} \rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm} Q_{\pm} \langle x \rangle^s \| < \infty, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (1.3.46)$$

Preuve Il est clair que si (1.3.46) est vrai pour un couple (t, s) elle est aussi vrai pour tout couple (t', s') avec $t' \leq t$ et $s' \leq s$. On se limitera donc à montrer (1.3.46) pour $s \in 2\mathbb{N}$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $s \in 2\mathbb{N}$ on va estimer la norme de $\mathcal{M} \langle \mathcal{A} \rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm} Q_{\pm} \langle x \rangle^s f$. d'après (1.3.45)

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{M} \langle \mathcal{A} \rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm} Q_{\pm} \langle x \rangle^s f) (\nu, \omega) \\
&= \langle \nu \rangle^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu) \int_0^{\infty} \sigma^{d/2-1} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\sigma \langle \omega, \xi \rangle - \nu \ln(\sigma))} q_{\pm}(\sigma \omega, \xi) (\widehat{\langle x \rangle^s f})(\xi) \frac{d\xi d\sigma}{(2\pi)^{(d+1)/2}} \\
&= \langle \nu \rangle^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu) \int_0^{\infty} \sigma^{d/2-1} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\sigma \langle \omega, \xi \rangle - \nu \ln(\sigma))} q_{\pm}(\sigma \omega, \xi) \langle D_{\xi} \rangle^s (\widehat{f})(\xi) \frac{d\xi d\sigma}{(2\pi)^{(d+1)/2}} \\
&= \langle \nu \rangle^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu) \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\infty} e^{i(\sigma \langle \omega, \xi \rangle - \nu \ln(\sigma))} p_{\pm}(\sigma \omega, \xi) (\widehat{f})(\xi) \frac{d\sigma d\xi}{(2\pi)^{(d+1)/2}},
\end{aligned}$$

où $p_{\pm} \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m-1+s\varrho+d/2}$ et $\text{supp } p_{\pm} \subset \Gamma_{\mp}(\theta, a)$. Si on pose $\phi(\sigma) = \sigma \langle \omega, \xi \rangle - \nu \ln(\sigma)$ les points stationnaires de ϕ doivent vérifier $\partial_{\sigma} \phi = \langle \omega, \xi \rangle - \nu/\sigma = 0$, ce qui n'est pas possible si $(\sigma \omega, \xi) \in \Gamma_{\mp}(\theta, a)$ et $\pm \nu \geq 0$. Pour estimer l'intégrale précédente on va intégrer par parties en variable σ en utilisant l'identité

$$\int_0^{\infty} e^{i\phi} p_{l,\pm} d\sigma = \int_0^{\infty} (i\partial_{\sigma} \phi) e^{i\phi} (p_{l,\pm} / (i\partial_{\sigma} \phi)) d\sigma = \int_0^{\infty} e^{i\phi} p_{l+1,\pm} d\sigma$$

où les $p_{l,\pm}$ sont définis par

$$p_{l+1,\pm} = \partial_{\sigma} (p_{l,\pm} / (i\partial_{\sigma} \phi)), \quad p_{0,\pm} = p_{\pm} \in \mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m-1+2s\delta+d/2}$$

et vérifient $p_{l,\pm}(\sigma \omega, \xi)|_{\sigma=0} = 0$ pour tout l . En utilisant l'inégalité

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} \geq u^{1/p} v^{1/q}, \quad \forall u, v > 0, \quad p, q \geq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

avec $1/q = \varrho/2$, $1/p = 1 - \varrho/2$ on obtient une minoration pour $\partial_{\sigma} \phi$:

$$|\partial_{\sigma} \phi|^2 = \left| \langle \omega, \xi \rangle - \frac{\nu}{\sigma} \right|^2 \geq \theta^2 |\xi|^2 + \frac{\nu^2}{\sigma^2} \geq c \frac{(\theta |\xi|)^{2-\varrho} |\nu|^{\varrho}}{\sigma^{\varrho}}. \quad (1.3.47)$$

Ceci conduit par induction à l'estimation suivante sur $p_{l,\pm}$

$$|p_{l,\pm}(\sigma \omega, \xi)| \leq C_l \langle \sigma \rangle^{m-1+2s\delta+d/2-l\varrho/2} \langle \xi \rangle^{N-l(1-\varrho/2)} \langle \nu \rangle^{-l\varrho/2}. \quad (1.3.48)$$

Après avoir intégré par parties l fois par rapport à $d\sigma$ on obtient finalement que

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{M} \langle \mathcal{A} \rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm} Q_{\pm} \langle x \rangle^s f) (\nu, \omega) \\
&= \langle \nu \rangle^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu) \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\infty} e^{i(\sigma \langle \omega, \xi \rangle - \nu \ln(\sigma))} p_{l,\pm}(\sigma \omega, \xi) (\widehat{f})(\xi) \frac{d\sigma d\xi}{(2\pi)^{(d+1)/2}}.
\end{aligned} \quad (1.3.49)$$

Pour estimer le carré du module de (1.3.49) on va supposer que l est suffisamment grand pour que toutes les intégrales convergent. Pour majorer (1.3.49) on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient (pour l'intégrale par rapport à ξ)

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{M} \langle \mathcal{A} \rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm} Q_{\pm} \langle x \rangle^s f)(\nu, \omega)|^2 \\
& \leq \langle \nu \rangle^{2t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu) \|\widehat{f}\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^{\infty} p_{l,\pm}(\sigma\omega, \xi) d\sigma \right|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^{(d+1)}} \\
& \leq \langle \nu \rangle^{2t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu) \|f\|^2 \\
& \quad \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^{\infty} C_l \langle \sigma \rangle^{m-1+2s\delta-l\varrho/2+d/2} \langle \xi \rangle^{N-l(1-\varrho/2)} \langle \nu \rangle^{-l\varrho/2} d\sigma \right|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^{(d+1)}} \\
& \leq \frac{C_l^2}{(2\pi)^{(d+1)}} \langle \nu \rangle^{2t-l\varrho} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu) \|f\|^2 \\
& \quad \left| \int_0^{\infty} C_l \langle \sigma \rangle^{m-1+2s\delta-l\varrho/2+d/2} d\sigma \right|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2N-l(2-\varrho)} d\xi \\
& \leq C \langle \nu \rangle^{2t-l\varrho} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\nu) \|f\|^2
\end{aligned}$$

si $2N - l(2 - \varrho) < -d$ et $m + 2s\delta - l\varrho/2 + d/2 < 0$. Au final si $2t - l\varrho < -1$ on a que

$$\|\mathcal{M} \langle \mathcal{A} \rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm} Q_{\pm} \langle x \rangle^s f\| \leq C' \|f\|,$$

ce qui prouve (1.3.46). \square

On peut maintenant démontrer les estimations de propagation microlocales.

Théorème 1.3.21 *Soient $Q_{\pm} = \text{Op}(e^{i\Phi(x,\xi)} q_{\pm}(x, \xi))$ des opd de la classe $\mathcal{C}^m(\Phi)$ pour une phase $\Phi \in \mathcal{S}^r$ avec $r \in [0, 1)$ $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0. On suppose que $\text{supp } q_{\pm} \subset \Gamma_{\mp}(\theta, a)$ pour un $\theta \in (0, 1)$ et un $a > 0$. Si l'hypothèse (1.3.4) est vérifiée alors on a les estimations suivantes*

$$\sup_{\substack{\text{Re } z \in \Lambda \\ 1 \geq |\text{Im } z| > 0}} \|\langle x \rangle^{-s} R_1^l(z) \langle x \rangle^{-s}\| < \infty, \quad \forall s > l - 1/2, \quad (1.3.50)$$

$$\sup_{\substack{\text{Re } z \in \Lambda \\ 1 \geq \pm \text{Im } z > 0}} \|\langle x \rangle^{-s} R_1^l(z) Q_{\mp} \langle x \rangle^{s-\sigma}\| < \infty, \quad \forall s > l - 1/2, \sigma > m + l, \quad (1.3.51)$$

$$\sup_{\substack{\text{Re } z \in \Lambda \\ 1 \geq \pm \text{Im } z > 0}} \|\langle x \rangle^s Q_{\pm}^* R_1^l(z) Q_{\mp} \langle x \rangle^s\| < \infty, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (1.3.52)$$

Preuve Comme pour déduire le principe d'absorption limite de l'estimation (1.3.20) on va déduire les estimations (1.3.50)-(1.3.52) des estimations (1.3.21)-(1.3.23) en utilisant les lemmes 1.3.16, 1.3.18 et 1.3.20 et la généralisation suivante de la formule de résolvante

$$R_1^l(z) = (z + i)^n R_1^n(-i) R_1^l(z) + \sum_{j=0}^n p_{j,n}(z) R_1^j(-i), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.53)$$

où $p_{j,n}(z)$ est un polynôme de degré j en z . En injectant (1.3.53), pour $n = 2l$, dans (1.3.50) le seul terme à estimer est

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{-s} R_1^l(-i) R_1^l(z) R_1^l(-i) \langle x \rangle^{-s} \\ = (\langle x \rangle^{-s} R_1^l(-i) \langle \mathcal{A} \rangle^s) (\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R_1^l(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-s}) (\langle \mathcal{A} \rangle^s R_1^l(-i) \langle x \rangle^{-s}) \end{aligned}$$

qui est bien borné pour $l \geq s > l - 1/2$. L'estimation (1.3.50) pour $s' > l$ découle de celle pour $s \in (l - 1/2, l]$ sachant que

$$\| \langle x \rangle^{-s} R_1^l(z) \langle x \rangle^{-s} \| \geq \| \langle x \rangle^{-s'} R_1^l(z) \langle x \rangle^{-s'} \|, \quad \forall s' \geq s.$$

Pour (1.3.51) en y injectant (1.3.53), pour $n \geq \max\{l, s\}$, on doit alors estimer le terme

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{-s} R_1^n(-i) R_1^l(z) Q_{\mp} \langle x \rangle^{s-\sigma} \\ = (\langle x \rangle^{-s} R_1^n(-i) \langle \mathcal{A} \rangle^t) \left(\langle \mathcal{A} \rangle^{-t} R_1^l(z) P_{\mathcal{A}}^{\mp} \langle \mathcal{A} \rangle^{t-l} \right) \left(\langle \mathcal{A} \rangle^{l-t} Q_{\mp} \langle x \rangle^{s-\sigma} \right) \\ + (\langle x \rangle^{-s} R_1^n(-i) \langle \mathcal{A} \rangle^t) (\langle \mathcal{A} \rangle^{-t} R_1^l(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-t}) (\langle \mathcal{A} \rangle^t P_{\mathcal{A}}^{\pm} Q_{\mp} \langle x \rangle^{s-\sigma}). \end{aligned}$$

Ce terme est donc borné si on choisit le paramètre libre $t \in (l - 1/2, n]$ tel que $l - t + m + s - \sigma \leq 0$. Cette dernière condition conduit à la restriction $\sigma > m + l$.

Pour (1.3.52) on commence par remarquer que si (1.3.52) est vrai pour un s donné l'estimation est encore valable pour tout $s' \leq s$. Il suffit donc de prouver (1.3.52) pour s assez grand. Ensuite on décompose l'opérateur de la manière suivante

$$\langle x \rangle^s Q_{\pm}^* R_1^l(z) Q_{\mp} \langle x \rangle^s = B_1 + B_2 + B_3,$$

avec

$$\begin{aligned} B_1 &= (\langle x \rangle^s Q_{\pm}^* P_{\mathcal{A}}^{\pm} \langle \mathcal{A} \rangle^s) (\langle \mathcal{A} \rangle^{-s} R_1^l(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-s}) (\langle \mathcal{A} \rangle^s P_{\mathcal{A}}^{\mp} Q_{\mp} \langle x \rangle^s), \\ B_2 &= \left(\langle x \rangle^s Q_{\pm}^* P_{\mathcal{A}}^{\pm} \langle \mathcal{A} \rangle^{s+l+m} \right) \left(\langle \mathcal{A} \rangle^{-s-l-m} R_1^l(z) P_{\mathcal{A}}^{\pm} \langle \mathcal{A} \rangle^{s+m} \right) (\langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} Q_{\mp} \langle x \rangle^s) \\ &\quad + (\langle x \rangle^s Q_{\pm}^* \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m}) \left(\langle \mathcal{A} \rangle^{s+m} P_{\mathcal{A}}^{\mp} R_1^l(z) \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-l-m} \right) \left(\langle \mathcal{A} \rangle^{s+l+m} P_{\mathcal{A}}^{\mp} Q_{\mp} \langle x \rangle^s \right), \\ B_3 &= (\langle x \rangle^s Q_{\pm}^* \langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m}) (\langle \mathcal{A} \rangle^{s+m} P_{\mathcal{A}}^{\mp} R_1^l(z) P_{\mathcal{A}}^{\pm} \langle \mathcal{A} \rangle^{s+m}) (\langle \mathcal{A} \rangle^{-s-m} Q_{\mp} \langle x \rangle^s). \end{aligned}$$

On voit alors grâce au théorème 1.3.6 et aux lemmes 1.3.18 et 1.3.20 que les opérateurs B_j , $j = 1, 2, 3$ sont bornés si $s + m + l > l - 1/2$ et $s > l - 1/2$ qui est bien vérifié pour un s assez grand. \square

Remarque 1.3.22 Dans tous les lemmes de cette partie l'hypothèse que le symbole de Q_{\pm} soit dans la classe $\mathcal{C}^m(\Phi_{\pm})$ peut être remplacée par $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m$ à la condition que $1 \geq \varrho > \delta \geq 0$ ce qui ne permettrait pas de traiter le cas $1/2 \geq \rho > 0$ dans nos applications.

Chapitre 2

Théorie de la diffusion

2.1 Les opérateurs d'onde

Dans cette section on va construire des opérateurs d'onde modifiés de la forme (24) pour le couple H_0, H . Pour simplifier l'approche on construira les opérateurs d'onde (24) pour le couple H_0, H_1 et les opérateurs d'onde (8) pour le couple H_1, H , le résultat pour le couple H_0, H découlant du théorème de multiplication 1.1.6. Pour construire les modificateurs J_{\pm} on utilisera les résultats de la section 2.1.1 sur les solutions (approchées) de l'équation eiconale (25) et de l'équation de transport (2.1.24). Enfin on vérifiera que la construction présentée coïncide avec d'autres constructions dépendantes du temps.

2.1.1 Les équations eiconale et de transport

Dans cette section notre but est de construire des fonctions propres approchées de l'opérateur de Schrödinger H_1 . Il est naturel de chercher ces fonctions propres sous la forme $\Psi = e^{i\varphi}$ où φ est une fonction réelle. En injectant cet Ansatz dans l'équation de Schrödinger on obtient

$$\begin{aligned} & ((D - A_L)^2 + V_L - |\xi|^2)\Psi \\ & = e^{i\varphi}(|\nabla\varphi|^2 - 2 \langle A_L, \nabla\varphi \rangle - i\Delta\varphi + V_L + |A_L|^2 + i\operatorname{div}A_L - |\xi|^2), \quad \nabla = \nabla_x. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

En ne conservant que les termes réels dans (2.1.1) on obtient l'équation eiconale pour φ

$$|\nabla\varphi(x, \xi)|^2 - 2 \langle A_L(x), \nabla\varphi(x, \xi) \rangle + V_L(x) + |A_L(x)|^2 = |\xi|^2. \quad (2.1.2)$$

Faute de pouvoir résoudre globalement l'équation eiconale on va chercher à construire des solutions "approchées" de (2.1.2). Par solutions "approchées" on entend des solutions φ_{\pm}

qui vérifie (2.1.2) à un terme courte portée près dans tout cône $\pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \kappa$, $\forall \kappa \in (-1, 1)$. Pour cela on décompose φ_{\pm} de la manière suivante

$$\varphi_{\pm}(x, \xi) = \langle \xi, x \rangle + \Phi_{\pm}(x, \xi), \quad (2.1.3)$$

et on demande que $\Phi = \Phi_{\pm}$ vérifie l'équation

$$2 \langle \xi, \nabla \Phi(x, \xi) \rangle + |\nabla \Phi(x, \xi)|^2 - 2 \langle A_L(x), \xi + \nabla \Phi(x, \xi) \rangle + V_L(x) + |A_L(x)|^2 = q^{(N_e)}(x, \xi). \quad (2.1.4)$$

où $q^{(N_e)} = q_{\pm}^{(N_e)}$ est un terme à courte portée. Alors d'après (2.1.1)

$$((D - A_L)^2 + V_L - |\xi|^2)(e^{i\varphi_{\pm}}) = e^{i\varphi_{\pm}} q_{\pm}, \quad (2.1.5)$$

où

$$q_{\pm} = q_{\pm}^{(N_e)} + i \operatorname{div} A_L - i \Delta \Phi_{\pm}, \quad (2.1.6)$$

est encore à courte portée pourvu que la fonction $\varphi = \varphi_{\pm}$ soit suffisamment proche d'une phase plane, i.e. qu'elle vérifie, au moins dans les cônes $\pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \kappa$, $\forall \kappa \in (-1, 1)$, l'estimation suivante

$$\partial_x^{\alpha} (\varphi_{\pm}(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) = \partial_x^{\alpha} \Phi_{\pm}(x, \xi) = O(|x|^{1-\rho-|\alpha|}). \quad (2.1.7)$$

Commençons par étudier l'équation linéaire auxiliaire

$$2 \langle \xi, \nabla \phi(x, \xi) \rangle + F(x, \xi) = 0. \quad (2.1.8)$$

Lemme 2.1.1 *Supposons que $F = F_{\pm}$ vérifie pour tout multi-indice α, β*

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} F_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-\rho-|\alpha|} |\xi|^{-\mu-|\beta|}, \quad \pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c, \quad (2.1.9)$$

pour tout $\kappa \in (-1, 1)$ et $\rho \in (0, 1)$. Alors la fonction

$$\phi_{\pm}(x, \xi) = \pm 2^{-1} \int_0^{\infty} \left(F_{\pm}(x \pm t\xi, \xi) - F_{\pm}(\pm t\xi, \xi) \right) dt. \quad (2.1.10)$$

est une solution de l'équation (2.1.8) qui vérifie pour tout α, β l'estimation

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \phi_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{1-\rho-|\alpha|} |\xi|^{-1-\mu-|\beta|}, \quad \pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c. \quad (2.1.11)$$

Preuve Il suffit de différencier (2.1.10) pour voir qu'il s'agit bien d'une solution de (2.1.8). Pour montrer (2.1.11) commençons par le cas où $|\alpha| \geq 1$. Dans ce cas on doit estimer pour $|x|$ grand

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi_\pm(x, \xi) = \pm 2^{-1} \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \frac{\beta!}{\beta_1! \beta_2!} \int_0^\infty (\pm t)^{|\beta_1|} \partial_x^{\alpha + \beta_1} \partial_\xi^{\beta_2} F_\pm(x \pm t\xi, \xi) dt \quad (2.1.12)$$

dans le cône $\pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \kappa$. Dans cette zone on a pour $\pm t \geq 0$

$$|x \pm \xi|^2 = |x|^2 \pm 2t \langle x, \xi \rangle + t^2 |\xi|^2 \geq |x|^2 + 2\kappa |t| |x| |\xi| + t^2 |\xi|^2 \geq (1 - \kappa^2)(|x|^2 + t^2 |\xi|^2).$$

Maintenant en faisant le changement de variable $t = s|x|/|\xi|$ et en tenant compte de (2.1.9) on obtient que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi_\pm(x, \xi)| \leq \frac{1 - \kappa^2}{2} C'_{\alpha, \beta} |x|^{1 - \rho - |\alpha|} |\xi|^{\mu - 1 - |\beta|} \int_0^\infty \langle s \rangle^{-\rho - |\alpha|} ds.$$

Pour $\alpha = 0$ il suffit d'écrire le développement de Taylor de ϕ_\pm

$$|\partial_\xi^\beta \phi_\pm(x, \xi)| \leq |\partial_\xi^\beta \phi_\pm(0, \xi)| + |x| \int_0^1 |\nabla_x \partial_\xi^\beta \phi_\pm(tx, \xi)| dt,$$

et d'utiliser l'estimation (2.1.11) pour $|\alpha| = 1$. \square

Maintenant on peut construire par itération une fonction Φ_\pm vérifiant (2.1.4) et (2.1.7) dans tout cône $\pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \kappa$, $\forall \kappa \in (-1, 1)$, avec $q^{(N_e)}$ à courte portée. Posons

$$\Phi_\pm(x, \xi) = \sum_{n=1}^{N_e} \Phi_\pm^{(n)}(x, \xi), \quad (2.1.13)$$

où les fonctions $\Phi_\pm^{(n)}$ sont solutions des équations

$$2 \langle \xi, \nabla \Phi_\pm^{(1)} \rangle + V_L - 2 \langle A_L, \xi \rangle = 0, \quad (2.1.14)$$

$$2 \langle \xi, \nabla \Phi_\pm^{(2)} \rangle + |\nabla \Phi_\pm^{(1)}|^2 - 2 \langle A_L, \nabla \Phi_\pm^{(1)} \rangle + |A_L|^2 = 0, \quad (2.1.15)$$

$$2 \langle \xi, \nabla \Phi_\pm^{(n+1)} \rangle - 2 \langle A_L, \nabla \Phi_\pm^{(n)} \rangle + \sum_{m+p=n+1} \langle \nabla \Phi_\pm^{(m)}, \nabla \Phi_\pm^{(p)} \rangle = 0, \quad n \geq 2 \quad (2.1.16)$$

La fonction Φ_\pm , définie par (2.1.13), vérifie donc (2.1.4) avec $q_\pm^{(N_e)}$ qui s'écrit

$$q_\pm^{(N_e)}(x, \xi) = -2 \langle A_L(x), \nabla \Phi_\pm^{(N_e)}(x, \xi) \rangle + \sum_{m+p > N_e} \langle \nabla \Phi_\pm^{(m)}(x, \xi), \nabla \Phi_\pm^{(p)}(x, \xi) \rangle. \quad (2.1.17)$$

En utilisant le lemme 2.1.1 on déduit par induction des estimations pour les fonctions $\Phi_\pm^{(n)}$, Φ_\pm et $q_\pm^{(N_e)}$.

Proposition 2.1.2 *Supposons que l'hypothèse (1.3.4) soit satisfaite pour un certain $\rho \in (0, 1)$. Soient Φ_{\pm} la fonction définie par les égalités (2.1.13)-(2.1.16), et $q_{\pm}^{(N_e)}$ celle définie par (2.1.4). Alors pour tout multi-indices α, β on a dans la région $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa$, pour tout $\kappa \in (-1, 1)$ (ou $|x| \leq c$)*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Phi_{\pm}^{(n)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{1-n\rho-|\alpha|} |\xi|^{1-n-|\beta|} \quad (2.1.18)$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Phi_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{1-\rho-|\alpha|} |\xi|^{-|\beta|} \quad (2.1.19)$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q_{\pm}^{(N_e)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-(N_e+1)\rho-|\alpha|} |\xi|^{1-N_e-|\beta|} \quad (2.1.20)$$

A partir d'ici on choisit $N_e = [\rho^{-1}]$ et on pose $\epsilon = (N_e + 1)\rho - 1$ (on remarque que $\rho \geq \epsilon > 0$). Les estimations (1.3.4), (2.1.19) et (2.1.20) impliquent que $e^{i\varphi_{\pm}}$ vérifie l'équation de Schrödinger, au terme $e^{i\varphi_{\pm}} q_{\pm}$ à courte portée près, en dehors de tout voisinage de la direction $\mp \hat{\xi}$. Pour tout α, β , et tout $\kappa \in (-1, 1)$ on a alors l'estimation

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-1-\epsilon-|\alpha|} |\xi|^{1-N_e-|\beta|}, \quad \pm < \hat{\xi}, \hat{x} > \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c. \quad (2.1.21)$$

Remarque 2.1.3 Quand $\rho > 1/2$ dans (1.3.4) on n'a besoin que d'une seule étape pour construire la fonction Φ qui dans ce cas admet une expression tout à fait explicite

$$\Phi_{\pm}(x, \xi) = \pm 2^{-1} \int_0^\infty \left(V_L(x \pm t\xi) - V_L(\pm t\xi) - 2 \langle A_L(x \pm t\xi) - A_L(\pm t\xi), \xi \rangle \right) dt. \quad (2.1.22)$$

En dérivant cette expression on remarque que la fonction $\Phi_{\pm}(x, \xi) = \Phi_{\pm}^{(1)}(x, \xi)$ ne dépend pas de la projection de x sur la direction $\hat{\xi}$.

A partir de cette première approximation des fonctions propres de H_1 il est possible d'en construire de "meilleures" par itération. Si on pose $\Psi_{\pm} = e^{i\varphi_{\pm}} a_{\pm}$ alors en injectant cet Ansatz dans l'équation de Schrödinger et en tenant compte de (2.1.5) on obtient

$$\begin{aligned} & ((D - A_L(x))^2 + V_L(x) - |\xi|^2) \Psi_{\pm}(x, \xi) \\ &= e^{i\varphi_{\pm}(x, \xi)} (q_{\pm}(x, \xi) a_{\pm}(x, \xi) - 2i \langle \xi + \nabla \Phi_{\pm}(x, \xi) - A_L(x), \nabla a_{\pm}(x, \xi) \rangle - \Delta a_{\pm}(x, \xi)), \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

d'où l'on tire l'équation de transport pour a_{\pm}

$$q_{\pm}(x, \xi) a_{\pm}(x, \xi) - 2i \langle \xi + \nabla \Phi_{\pm}(x, \xi) - A_L(x), \nabla a_{\pm}(x, \xi) \rangle - \Delta a_{\pm}(x, \xi) = 0. \quad (2.1.24)$$

Là encore on résout (2.1.24) de manière approchée en utilisant la même démarche d'approximations successives que pour l'équation eiconale. On pose

$$a_{\pm}(x, \xi) = \sum_{n=0}^{N_t} b_{\pm}^{(n)}(x, \xi), \quad b_{\pm}^{(0)}(x, \xi) = 1, \quad (2.1.25)$$

où $b_{\pm}^{(n)}$ est défini par récurrence comme solution de l'équation

$$\begin{aligned} 2 < \xi, \nabla b_{\pm}^{(n)}(x, \xi) > - i q_{\pm}(x, \xi) b_{\pm}^{(n-1)}(x, \xi) \\ + 2 < \nabla \Phi_{\pm}(x, \xi) - A(x), \nabla b_{\pm}^{(n-1)}(x, \xi) > - \Delta b_{\pm}^{(n-1)}(x, \xi) = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Pour résoudre (2.1.26) on utilise un lemme similaire au lemme 2.1.1 (dont la démonstration est d'ailleurs la même).

Lemme 2.1.4 *Supposons que $F = F_{\pm}$ vérifie pour tout multi-indice α, β*

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} F_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-1 - \epsilon - |\alpha|} |\xi|^{-\mu - |\beta|}, \quad \pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c, \quad (2.1.27)$$

pour tout $\kappa \in (-1, 1)$ et $\epsilon > 0$. Alors la fonction

$$\phi_{\pm}(x, \xi) = \pm 2^{-1} \int_0^{\infty} F_{\pm}(x \pm t\xi, \xi) dt. \quad (2.1.28)$$

est une solution de l'équation (2.1.8) qui vérifie pour tout α, β l'estimation

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \phi_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-\epsilon - |\alpha|} |\xi|^{-1 - \mu - |\beta|}, \quad \pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa, \text{ ou } |x| \leq c. \quad (2.1.29)$$

En utilisant (2.1.26) on conclut que la fonction $e^{i\varphi_{\pm}} a_{\pm}$ est une solution de l'équation de Schrödinger modulo le terme

$$((D - A_L(x))^2 + V_L(x) - |\xi|^2) \Psi_{\pm}(x, \xi) = e^{i\varphi_{\pm}(x, \xi)} q_{\pm}^{(N_t)}(x, \xi), \quad (2.1.30)$$

où $q_{\pm}^{(0)}(x, \xi) = q_{\pm}(x, \xi)$ et

$$q_{\pm}^{(N_t)}(x, \xi) = -2i < \xi, \nabla b_{\pm}^{(N_t+1)}(x, \xi) >. \quad (2.1.31)$$

Grâce au lemme 2.1.4 on obtient par induction des estimations sur $a_{\pm}, b_{\pm}^{(n)}, q_{\pm}^{(N_t)}$.

Proposition 2.1.5 *Supposons que l'hypothèse (1.3.4) soit satisfaite pour un certain $\rho \in (0, 1)$. Soient $\epsilon = (N_e + 1)\rho - 1 \in (0, \rho)$, Φ_{\pm} la fonction définie par les égalités (2.1.13)-(2.1.16), et $q_{\pm}^{(N_t)}$ celle définie par (2.1.31). Alors pour tout multi-indice α, β on a dans la région $\pm < \hat{x}, \hat{\xi} > \geq \kappa$, pour tout $\kappa \in (-1, 1)$ (ou $|x| \leq c$)*

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} b_{\pm}^{(n)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-n\epsilon - |\alpha|} |\xi|^{-n - |\beta|} \quad (2.1.32)$$

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a_{\pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-|\alpha|} |\xi|^{-|\beta|} \quad (2.1.33)$$

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} q_{\pm}^{(N_t)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-1 - (N_t+1)\epsilon - |\alpha|} |\xi|^{-N_t - |\beta|} \quad (2.1.34)$$

2.1.2 Existence et complétude asymptotique

On considère le couple de Hamiltoniens $H_0 = -\Delta$, $H_1 = (D - A_L)^2 + V_L$, où A_L et V_L vérifient (1.3.4). Soient Φ_{\pm} et a_{\pm} les fonctions construites dans la section précédente (cf. propositions 2.1.2 et 2.1.5). Le modificateur $J_{\pm} = J_{\pm}(N_t, \zeta_{\pm}, \psi)$ est défini par la formule

$$(J_{\pm}f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle + i\Phi_{\pm}(x, \xi)} a_{\pm}(x, \xi) \zeta_{\pm}(x, \xi) \psi(|\xi|^2) \hat{f}(\xi) d\xi, \quad (2.1.35)$$

où la fonction de troncature

$$\zeta_{\pm}(x, \xi) = \sigma_{\pm}(\langle \hat{\xi}, \hat{x} \rangle \eta(|x|)), \quad \hat{\xi} = \xi/|\xi|, \quad \hat{x} = x/|x|. \quad (2.1.36)$$

Les fonctions σ_{\pm} et η doivent vérifier les hypothèses suivantes

- $\sigma_{\pm} \in C^{\infty}(\mathbb{R}, [0, 1])$ telle que : $\sigma_{\pm}(\tau) = 0$ pour $\pm\tau \leq \theta'$ et $\sigma_{\pm}(\tau) = 1$ pour $\pm\tau \geq \theta$, pour $-1 < \theta' < \theta < 1$
- $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, [0, 1])$ telle que : $\eta(\tau) = 0$ pour $\tau \leq a > 0$ et $\eta(\tau) = 1$ pour $\tau \geq 2a$.

Ainsi la fonction $\zeta_{\pm}(x, \xi) = 1$ si $\pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \theta$ ou $|x| \leq a$ (voir Figure 2.1). La fonction η est introduite uniquement pour éliminer la singularité de la fonction \hat{x} au point $x = 0$. La fonction $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ nous permet de localiser notre étude sur un intervalle d'énergie Λ borné et disjoint de 0

$$\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1), \quad [\lambda_0, \lambda_1] \subset (0, \infty). \quad (2.1.37)$$

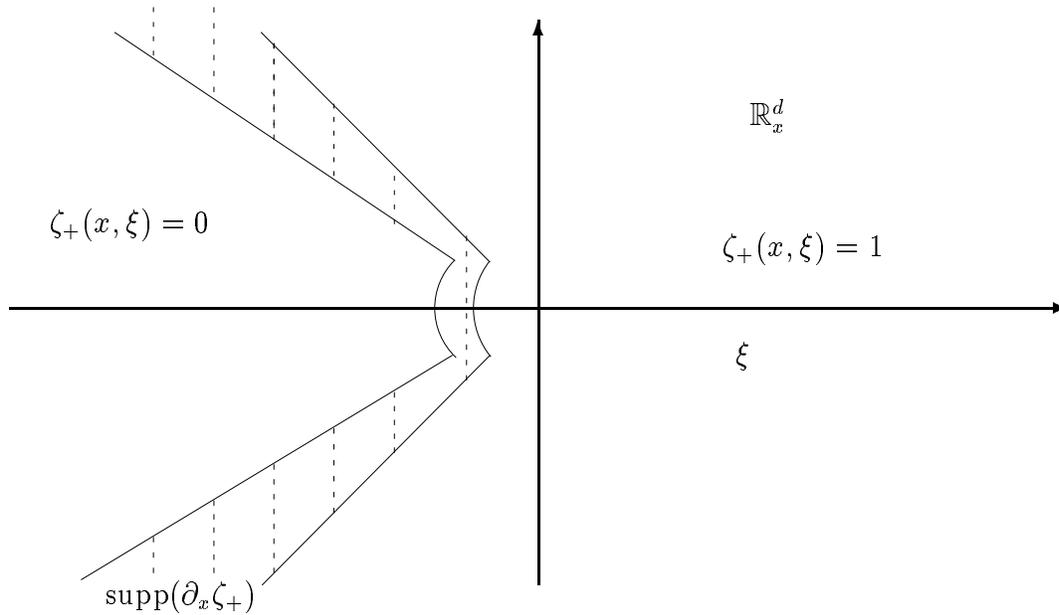
Pour appliquer la théorie développée dans la section 1.2.2 à l'opérateur (2.1.35) On utilise l'astuce suivante. Soient $\tilde{\eta}$, $\tilde{\sigma}_{\pm}$, $\tilde{\psi}$ vérifiant les mêmes hypothèses que les fonctions η , σ_{\pm} , ψ , respectivement, et $\tilde{\zeta}_{\pm}(x, \xi) = \tilde{\sigma}_{\pm}(\langle \hat{\xi}, \hat{x} \rangle \tilde{\eta}(|x|))$. Si on choisit ces fonctions telles que $\tilde{\zeta}_{\pm}(x, \xi) \tilde{\psi}(|\xi|^2) = 1$ sur le support de $\zeta_{\pm}(x, \xi) \psi(|\xi|^2)$, on voit que la fonction Φ_{\pm} dans (2.1.35) peut être remplacée $\tilde{\Phi}_{\pm} = \Phi_{\pm} \tilde{\zeta}_{\pm} \tilde{\psi}$. Comme $\tilde{\zeta}_{\pm}(x, \xi)$ est supportée dans la région $\pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \kappa$, $\kappa \in (-1, 1)$, (ou $|x| \leq a$), il découle de l'estimation (2.1.19) que $\tilde{\Phi}_{\pm} \in \mathcal{S}^{1-\rho}$. Finalement l'opd (2.1.35) a pour symbole

$$j_{\pm}(x, \xi) = e^{i\Phi_{\pm}(x, \xi)} a_{\pm}(x, \xi) \zeta_{\pm}(x, \xi) \psi(|\xi|^2) = e^{i\tilde{\Phi}_{\pm}(x, \xi)} a_{\pm}(x, \xi) \zeta_{\pm}(x, \xi) \psi(|\xi|^2) \in \mathcal{C}^0(\tilde{\Phi}_{\pm}), \quad (2.1.38)$$

et conséquemment, d'après la proposition 1.2.12, J_{\pm} est un opérateur borné sur $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. On a aussi besoin d'opérateurs d'onde "inverse"

$$W_{\pm}(H_0, H_1; J^*) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_0 t} J^* e^{-iH_1 t} P_1, \quad (2.1.39)$$

avec $J = J_+$ ou $J = J_-$ et P_1 est le projecteur sur le sous-espace absolument continu de H_1 . Comme H_1 n'a pas de valeurs propres positives d'après le théorème 1.3.1 on a $P_1 = E_1(\mathbb{R}_+)$.


 FIG. 2.1: Le support de ζ_+

Remarque 2.1.6 D'après les estimations de la proposition 2.1.5 on a pour un $\epsilon > 0$

$$J_{\pm}(0, \zeta_{\pm}, \psi) - J_{\pm}(N_t, \zeta_{\pm}, \psi) = \text{Op} \left(e^{i\Phi_{\pm}(x, \xi)} (a_{\pm}(x, \xi) - 1) \zeta_{\pm}(x, \xi) \psi(|\xi|^2) \right) \in \mathcal{C}^{-\epsilon}(\tilde{\Phi}_{\pm}). \quad (2.1.40)$$

En particulier l'opérateur $J_{\pm}(0, \zeta_{\pm}, \psi) - J_{\pm}(N_t, \zeta_{\pm}, \psi)$ est compact d'après la proposition 1.2.12. Il découle de la proposition 1.1.5 que

$$W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\pm}(0, \zeta_{\pm}, \psi)) = W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\pm}(N_t, \zeta_{\pm}, \psi))$$

pour tout N_t . On pourra donc supposer, sans perte de généralité, dans toute la section 2.1 que $a_{\pm} = 1$ dans (2.1.35).

Le but de cette section est de montrer que le couple H_0, H_1 , avec les identifications J_+ et J_- , rentre dans le cadre de la théorie des perturbations lisses et que les opérateurs d'onde (24) et (2.1.39) existent. On doit en particulier obtenir une décomposition de la perturbation effective

$$T_{\pm} = HJ_{\pm} - J_{\pm}H_0, \quad (2.1.41)$$

de la forme (1.1.4). Pour cela nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.7 Soit T on opd de symbole

$$t(x, \xi) = g(x, \xi) w(\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle > \eta(x)) \psi(|\xi|^2),$$

où $g \in \mathcal{C}^{-1}(\Phi)$, $\Phi \in \mathcal{S}^{1-\rho}$, $\rho > 0$, $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $w(\tau) = 0$ si $|\tau| \geq \varepsilon$ avec $\varepsilon \in (0, 1)$. Soient $G_j, j = 1, \dots, d$, définis par (1.3.31). Alors T admet la représentation

$$T = \sum_{j=1}^d G_j^* B^{(s)} G_j + \langle x \rangle^{-p} B^{(r)} \langle x \rangle^{-p}, \quad (2.1.42)$$

avec $p = (1 + \rho)/2$ et $B^{(s)} \in \mathcal{C}^0(\Phi)$, $B^{(r)}$ sont bornés.

Preuve Soient $B^{(s)}$ et $T_j, j = 1, \dots, d$, des opd de symboles

$$\begin{aligned} b^{(s)}(x, \xi) &= \langle x \rangle |\xi|^{-2} (1 - \langle \hat{\xi}, \hat{x} \rangle^2)^{-1} g(x, \xi) w(\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle) \eta(x) \psi(|\xi|^2). \\ t_j(x, \xi) &= \langle x \rangle^{-1} (\xi_j - |x|^{-2} x_j \langle \xi, x \rangle)^2 b^{(s)}(x, \xi) \end{aligned}$$

La fonction $(1 - \tau^2)^{-1} w(\tau) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, de telle sorte que $b^{(s)} \in \mathcal{C}^0(\tilde{\Phi})$ et, d'après la proposition 1.2.12, L'opérateur $B^{(s)}$ est borné. Comme G_j à pour symbole $\langle x \rangle^{-1/2} (\xi_j - |x|^{-2} x_j \langle \xi, x \rangle) \in \mathcal{S}^{-1/2}$ et que $t_j(x, \xi) = |g_j(x, \xi)|^2 b^{(s)}(x, \xi)$ on peut appliquer la proposition 1.2.14 pour obtenir que l'opérateur $\langle x \rangle^p (G_j^* B^{(s)} G_j - T_j) \langle x \rangle^p$ est borné pour $2p = \rho + 1$. Maintenant comme pour tout $|x| \geq 2a$

$$t(x, \xi) - \sum_{j=1}^d t_j(x, \xi) = g(x, \xi) \left(w(\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \eta(x)) - w(\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle) \eta(x) \right) \psi(|\xi|^2) = 0,$$

on a que $t(x, \xi) - \sum_{j=1}^d t_j(x, \xi) \in \mathcal{S}^{-N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Ceci implique la continuité de l'opérateur

$$\begin{aligned} B^{(r)} &= \langle x \rangle^p \left(\sum_{j=1}^d G_j^* B^{(s)} G_j - T \right) \langle x \rangle^p \\ &= \langle x \rangle^p \left(\sum_{j=1}^d G_j^* B^{(s)} G_j - T_j \right) \langle x \rangle^p + \langle x \rangle^p \left(\sum_{j=1}^d T_j - T \right) \langle x \rangle^p. \end{aligned}$$

Au final on obtient (2.1.42). □

Lemme 2.1.8 *L'opd (2.1.41) peut être représenté sous la forme $T_\pm = T_\pm^{(s)} + T_\pm^{(r)}$ où $T_\pm^{(s)}, T_\pm^{(r)}$ sont des opd de symboles respectifs*

$$t_\pm^{(s)}(x, \xi) = e^{i\Phi_\pm(x, \xi)} (-2i \langle \xi, \nabla \zeta_\pm(x, \xi) \rangle) \psi(|\xi|^2) \in \mathcal{C}^{-1}(\tilde{\Phi}_\pm) \quad (2.1.43)$$

$$t_\pm^{(r)} = e^{i\Phi_\pm(x, \xi)} \tau_\pm^{(r)}(x, \xi) \psi(|\xi|^2) \in \mathcal{C}^{-1-\epsilon}(\tilde{\Phi}_\pm), \quad \epsilon > 0. \quad (2.1.44)$$

Preuve D'après (2.1.41), (2.1.5) et (2.1.35), on a

$$(T_\pm f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle + i\Phi_\pm(x, \xi)} \tau_\pm(x, \xi) \psi(|\xi|^2) \hat{f}(\xi) d\xi,$$

où

$$\begin{aligned} \tau_{\pm}(x, \xi) &= q_{\pm}(x, \xi) a_{\pm}(x, \xi) \zeta_{\pm}(x, \xi) \\ &\quad - 2i \langle \xi + \nabla \Phi_{\pm}(x, \xi) - A(x), \nabla(a_{\pm}(x, \xi) \zeta_{\pm}(x, \xi)) \rangle - \Delta(a_{\pm}(x, \xi) \zeta_{\pm}(x, \xi)) \end{aligned} \quad (2.1.45)$$

On élimine le seul terme à longue portée dans (2.1.45)

$$\tau_{\pm}^{(s)}(x, \xi) = -2i \langle \xi, \nabla \zeta_{\pm}(x, \xi) \rangle,$$

qui ne décroît que comme $|x|^{-1}$ à cause de la fonction de troncature (2.1.36). Comme tous les autres termes dans (2.1.45) décroissent plus vite, on définit $t_{\pm}^{(r)}$ par les égalités

$$\tau_{\pm}^{(r)}(x, \xi) = \tau_{\pm}(x, \xi) - \tau_{\pm}^{(s)}(x, \xi), \quad t_{\pm}^{(r)}(x, \xi) = e^{i\Phi_{\pm}(x, \xi)} \tau_{\pm}^{(r)}(x, \xi).$$

Par conséquent, d'après (2.1.21) et les estimations des propositions 2.1.2 et 2.1.5, $t_{\pm}^{(r)}$ appartient à la classe $\mathcal{C}^{-1-\epsilon}(\tilde{\Phi}_{\pm})$. \square

Maintenant il est facile d'obtenir la représentation (2.1.42).

Proposition 2.1.9 *L'opérateur T_{\pm} admet la représentation (2.1.42) pour $p = (1 + \epsilon)/2 > 1/2$ et deux opérateurs bornés $B_{\pm}^{(r)}, B_{\pm}^{(s)}$.*

Preuve Comme $t_{\pm}^{(s)} \in \mathcal{C}^{-1}(\tilde{\Phi}_{\pm})$ et $\sigma'_{\pm}(\tau) = 0$ dans un voisinage des points -1 et 1 , le lemme 2.1.7 peut être directement appliqué à $T_{\pm}^{(s)}$. Comme, par le lemme 2.1.8, $t_{\pm}^{(r)} \in \mathcal{C}^{-1-\epsilon}(\tilde{\Phi}_{\pm})$ l'opérateur $\langle x \rangle^p T_{\pm}^{(r)} \langle x \rangle^p$ est borné pour $p \leq (1 + \epsilon)/2$, d'après la proposition 1.2.13. Ceci conduit à (2.1.42) avec $p = (1 + \epsilon)/2 > 1/2$. \square

En prenant en compte les propositions 1.1.3, 1.1.4, 1.3.7 and 1.3.13 on arrive au résultat suivant.

Théorème 2.1.10 *Soient A_L et V_L vérifiant (1.3.4). Soit $J_{\pm} = J_{\pm}(\zeta_{\pm}, \psi)$ défini par (2.1.35). Alors les opérateurs d'onde*

$$W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\pm}), \quad W_{\pm}(H_0, H_1; J_{\pm}^*) \quad (2.1.46)$$

et

$$W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\mp}), \quad W_{\pm}(H_0, H_1; J_{\mp}^*) \quad (2.1.47)$$

existent. Les opérateurs (2.1.46) ainsi que (2.1.47) sont mutuellement adjoints l'un de l'autre.

La preuve de l'isométrie et de la complétude de $W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\pm})$ repose sur des estimations du type (1.1.7) et (1.1.8).

Lemme 2.1.11 *On a les deux limites suivantes*

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J_{\pm}^* J_{\pm} - \psi^2(H_0)) e^{-iH_0 t} = 0, \quad (2.1.48)$$

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} J_{\mp} e^{-iH_0 t} = 0. \quad (2.1.49)$$

Preuve D'après la proposition 1.2.11, à des termes compacts près, $J_{\pm}^* J_{\pm} - \psi^2(H_0)$ est un opd (que l'on notera A) de symbole $(\zeta_{\pm}^2(x, \xi) - 1)\psi^2(|\xi|^2)$ et

$$(Ae^{-iH_0 t} f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle - i|\xi|^2 t} (\zeta_{\pm}^2(x, \xi) - 1)\psi^2(|\xi|^2) \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.1.50)$$

Pour les points stationnaires $\xi_0 = x/(2t)$ de cette intégrale on a $\zeta_{\pm}(x, \xi_0) = 1$ si $t \rightarrow \pm\infty$ (voir Figure 2.1). Par conséquent si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en intégrant par parties on peut estimer l'intégrale (2.1.50) par $C_N(1 + |x| + |t|)^{-N}$ pour tout N , ce qui prouve (2.1.49). Pour (2.1.48) on applique les mêmes arguments à l'opd de symbole $\zeta_{\mp}(x, \xi)\chi(x)\psi(|\xi|^2)$ où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vaut 0 pour $|x| \leq 2a$ et 1 pour $|x| \leq 3a$. \square

Proposition 2.1.12 *Soient Λ vérifiant (2.1.37) et une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que $\psi|_{\Lambda} = 1$. Alors sous les hypothèses du théorème 2.1.10 les opérateurs $W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\pm})$ sont isométriques sur le sous-espace $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$ et*

$$W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\mp}) = 0, \quad W_{\pm}(H_0, H_1; J_{\mp}^*) = 0. \quad (2.1.51)$$

Preuve Les résultats pour les opérateurs $W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\pm})$ et $W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\mp})$ découlent directement de (2.1.48) et (2.1.49), respectivement. La seconde égalité (2.1.51) est une conséquence de la première car $W_{\pm}(H_0, H_1; J_{\mp}^*) = W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\mp})^*$. \square

Maintenant on peut montrer la complétude asymptotique des $W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\pm})$.

Théorème 2.1.13 *Soient A_L et V_L vérifiant (1.3.4), Λ vérifiant (2.1.37) et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que $\psi|_{\Lambda} = 1$. Alors les opérateurs d'onde (24) sont complets :*

$$\text{Ran}(W_{\pm}(H_1, H_0; J_{\pm})E_0(\Lambda)) = E(\Lambda)\mathcal{H}. \quad (2.1.52)$$

Preuve On doit vérifier que pour tout $f \in E(\Lambda)\mathcal{H}$ il existe $f_0 \in E_0(\Lambda)\mathcal{H}$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{-iH_1 t} f - J_{\pm} e^{-iH_0 t} f_0\| = 0. \quad (2.1.53)$$

L'existence des opérateurs $W_{\pm}(H_0, H_1; J_{\pm}^*)$ implique que pour $f_0 = W_{\pm}(H_0, H_1; J_{\pm}^*)f$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J_{\pm}^* e^{-iH_1 t} f - e^{-iH_0 t} f_0\| = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J_{\pm} J_{\pm}^* e^{-iH_1 t} f - J_{\pm} e^{-iH_0 t} f_0\| = 0. \quad (2.1.54)$$

La seconde égalité (2.1.51) conduit à $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J_{\mp}^* e^{-iH_1 t} f\| = 0$ puis

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J_{\mp} J_{\mp}^* e^{-iH_1 t} f\| = 0. \quad (2.1.55)$$

D'après la proposition 1.2.11, à des termes compacts près, $J_{\pm} J_{\pm}^* + J_{\mp} J_{\mp}^*$ est un opd de symbole $(\zeta_{\pm}^2(x, \xi) + \zeta_{\mp}^2(x, \xi))\psi^2(|\xi|^2)$. Si on choisit les fonctions σ_{\pm} (voir (2.1.36)) de telle sorte que $\sigma_{+}^2(\tau) + \sigma_{-}^2(\tau) = 1$ on déduit de (2.1.54), (2.1.55) que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\psi^2(H_0) e^{-iH_1 t} f - J_{\pm} e^{-iH_0 t} f_0\| = 0.$$

Comme l'opérateur $\psi^2(H_1) - \psi^2(H_0)$ est compact, on aboutit à (2.1.53). \square

Il ne reste plus qu'à traiter le cas des termes à courte portée.

Proposition 2.1.14 *Sous les hypothèses (1.3.2)-(1.3.7) on a l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_1; Id)$ et $W_{\pm}(H_1, H; Id)$, définis par (1.1.5).*

Preuve D'après l'hypothèse (1.3.5), le théorème 1.3.7 et les propositions 1.1.3, 1.1.4 et 1.3.11 il suffit de décomposer la perturbation

$$T = H - H_1 = -DA_S - A_S D + 2 \langle A_S, A_L \rangle + |A_S|^2 + V_S \quad (2.1.56)$$

sous la forme

$$T = \langle x \rangle^{-p} B_1 \langle x \rangle^{-p} + \sum_{k=1}^d \langle x \rangle^{-p} B_{2,k} \langle x \rangle^{-p} D_k + D_k \langle x \rangle^{-p} B_{2,k} \langle x \rangle^{-p}, \quad (2.1.57)$$

$$B_1 = \langle x \rangle^p (2 \langle A_S(x), A_L(x) \rangle + |A_S(x)|^2 + V_S(x)) \langle x \rangle^p, \quad B_{2,k} = \langle x \rangle^p A_S(x) \langle x \rangle^p, \quad (2.1.58)$$

pour $p = \rho_0/2 > 1/2$. Les opérateurs d'onde ainsi construits sont automatiquement isométriques et complets d'après la proposition 1.1.7. \square

Enfin le théorème de multiplication permet de conclure par

Théorème 2.1.15 *Sous les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) les opérateurs d'onde modifiés $W_{\pm}(H, H_0; J_{\pm})$ et $W_{\pm}(H_0, H; J_{\pm}^*)$, définis par (24), existent et sont complets.*

2.1.3 Coïncidence avec l'approche dépendante du temps

Il nous reste maintenant à montrer que les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0; J_{\pm})$ construits dans la section précédente coïncident avec les opérateurs d'onde définis par une modification du groupe unitaire $e^{-iH_0 t}$ associé à l'évolution libre. On considérera dans cette partie une évolution modifiée $U_0(t)$ en représentation d'espace comme celle construite dans [Yaf80], mais on pourrait aussi bien considérer une modification en représentation de moment comme celle présentée dans [Hör76]. Dans cette section on adopte la même stratégie que dans [Yaf98, Yaf00b] : dans un premier temps on construit $U_0(t)$ en termes des solutions de l'équation eiconale (2.1.2), ensuite on montre que cette définition coïncide avec une définition du même type que celle dans [Yaf80]. Notre construction de $U_0(t)$ repose sur une description précise de l'asymptotique de

$$(J_{\pm} e^{-iH_0 t} f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi_{\pm}(x, \xi) - i|\xi|^2 t} \zeta_{\pm}(x, \xi) \psi(|\xi|^2) \hat{f}(\xi) d\xi, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad (2.1.59)$$

pour $t \rightarrow \pm\infty$. Les points stationnaires $\xi_0 = \xi_0(x, t)$ de la phase sont déterminés par l'équation

$$x + (\nabla_{\xi} \Phi_{\pm})(x, \xi_0(x, t)) - 2\xi_0(x, t)t = 0, \quad \pm t > 0. \quad (2.1.60)$$

A cause de la fonction $\zeta_{\pm}(x, \xi) \psi(|\xi|^2)$ on s'intéresse seulement aux points $\xi_0(x, t)$ tels que $0 < c \leq |\xi_0|^2 \leq C < \infty$ et $\pm < \hat{\xi}_{\pm}, \hat{x} \geq \pm \kappa$ pour $\kappa \in (-1, 1)$. D'après l'estimation (2.1.19) sur $\nabla_{\xi} \Phi_{\pm}$ on a que pour $|t|$ grand l'équation (2.1.60) a une solution unique $\xi_0(x, t)$ et

$$\xi_0(x, t) = (2t)^{-1}x + O(|t|^{-\rho}). \quad (2.1.61)$$

Posons

$$\Xi(x, t) = \langle \xi_0(x, t), x \rangle + \Phi_{\pm}(x, \xi_0(x, t)) - |\xi_0(x, t)|^2 t, \quad \pm t > 0, \quad (2.1.62)$$

la méthode de la phase stationnaire appliquée à l'intégrale (2.1.59), en tenant compte de $\zeta_{\pm}(x, \xi_0) = 1$, nous donne

$$(J_{\pm} e^{-iH_0 t} f)(x) = e^{\mp \pi i d/4} e^{i\Xi(x, t)} (2|t|)^{-d/2} \psi(|\xi_0(x, t)|^2) \hat{f}(\xi_0(x, t)) + r_{\pm}(x, t), \quad (2.1.63)$$

où $r_{\pm}(x, t)$ tend vers zéro dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$. L'équation (2.1.60) permet de réécrire (2.1.62) de la manière suivante

$$\Xi(x, t) = |x|^2/4t + \Omega(x, t), \quad (2.1.64)$$

où

$$\Omega(x, t) = \Phi_{\pm}(x, \xi_0(x, t)) - (4t)^{-1} |(\nabla_{\xi} \Phi_{\pm})(x, \xi_0(x, t))|^2. \quad (2.1.65)$$

Il découle de (2.1.61) que dans l'équation (2.1.63) le terme $\psi(|\xi_0|^2) \hat{f}(\xi_0)$ peut être remplacé par $\psi((2t)^{-2}|x|^2) \hat{f}((2t)^{-1}x)$. Ce qui nous conduit au lemme suivant

Lemme 2.1.16 *Soit $\xi_0(x, t)$ vérifiant l'équation (2.1.60) et soit $\Xi(x, t)$ défini par (2.1.64) et (2.1.65). On définit une famille d'opérateurs unitaires par l'égalité*

$$(U_0(t)f)(x) = e^{\mp \pi d i/4} e^{i\Xi(x, t)} (2|t|)^{-d/2} \hat{f}((2t)^{-1}x), \quad \pm t > 0. \quad (2.1.66)$$

Alors pour toute fonction ζ_{\pm} , définie par (2.1.36), on a

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J_{\pm}(\psi, \zeta_{\pm}) e^{-iH_0 t} f - U_0(t) \psi(H_0) f\| = 0, \quad \forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Le lemme 2.1.16 permet de reformuler les résultats de la partie précédente en particulier le théorème 2.1.15.

Proposition 2.1.17 *Supposons que A et V vérifient les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) et soit $U_0(t)$ défini par (2.1.66). Alors les opérateurs d'onde*

$$\mathbf{W}_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} U_0(t) \quad (2.1.67)$$

existent, sont isométriques et $\text{Ran } \mathbf{W}_{\pm} = P\mathcal{H}$. De plus, pour tout $N_t \geq 0$, $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$ et toute fonction (2.1.36)

$$\mathbf{W}_{\pm} \psi(H_0) = W_{\pm}(H, H_0; J_{\pm}(N_t, \psi, \zeta_{\pm})).$$

Remarque 2.1.18 Une conséquence directe de la proposition 2.1.17 est que les opérateurs d'onde $W_{\pm}(H, H_0; J_{\pm}(N_t, \psi, \zeta_{\pm}))$ ne dépendent pas du choix des fonctions de troncature ζ_{\pm} ni de l'ordre N_t d'approximation de l'équation de transport (2.1.24) (ce qu'on savait déjà d'après la remarque 2.1.6).

Si $\rho > 1/2$ alors la fonction (2.1.64) peut être remplacée par une expression plus simple. Comme d'après (2.1.19) et (2.1.61) on a pour $|x| \sim |t|$ que

$$(4t)^{-1} |\nabla_{\xi} \Phi_{\pm}(x, \xi_0(x, t))|^2 = O(|t|^{1-2\rho}), \quad \Phi_{\pm}(x, \xi_0(x, t)) - \Phi_{\pm}(x, x/(2t)) = O(|t|^{1-2\rho}),$$

on peut poser $\Omega(x, t) = \Phi_{\pm}(x, x/(2t))$ dans (2.1.65) avec $\Phi_{\pm} = \Phi_{\pm}^{(1)}$. En tenant compte de (2.1.22) on arrive, pour $\pm t > 0$, a

$$\begin{aligned} \Xi(x, t) &= \frac{|x|^2}{4t} + t \int_0^\infty \left(V_L((1 \pm s)x) - V_L(\pm sx) \right) ds \\ &\mp \int_0^\infty \langle A_L((1 \pm s)x) - A_L(\pm sx), x \rangle ds. \end{aligned} \quad (2.1.68)$$

Une conséquence directe de (2.1.68) est le résultat de Loss et Thaller sur l'existence des opérateurs d'onde usuels (8) pour des potentiels magnétiques à longue portée vérifiant la condition de jauge transverse [LT87].

Proposition 2.1.19 *Supposons que V et A vérifient les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7), pour un $\rho > 1/2$, avec en plus $V_L = 0$ et A_L satisfaisant la condition de jauge transverse (19). Alors les opérateurs d'onde*

$$W_\pm(H, H_0) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \quad (2.1.69)$$

existent et coïncident avec les opérateurs (24). En conséquence les opérateurs (2.1.69) sont complets.

Preuve Sous les hypothèses énoncées il découle de (2.1.68) que $\Xi(x, t) = |x|^2/(4t)$. Donc pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U_0(t)f - e^{-itH_0} f\| = 0,$$

et l'évolution modifiée $U_0(t)$ coïncide avec l'évolution libre e^{-itH_0} . \square

Les opérateurs d'onde (2.1.67) avec $U_0(t)$ défini par (2.1.66) ont été étudiés dans [Yaf80] (pour $A = 0$). Dans cet article la fonction Ξ était toujours définie par la formule (2.1.64) mais avec $\Omega(x, t)$ une solution approchée de l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega(x, t) + t^{-1} \langle x, (\nabla \Omega)(x, t) \rangle + |(\nabla \Omega)(x, t)|^2 \\ - 2 \langle A_L(x), x \rangle / (2t) + \nabla \Omega(x, t) \cdot \nabla \Omega(x, t) + V_L(x) + |A_L(x)|^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.1.70)$$

vérifiant la condition

$$\sup_{c|t| \leq |x| \leq c'|t|} |\partial_x^\alpha \Omega(x, t)| \leq C |t|^{1-\varepsilon-|\alpha|}, \quad |\alpha| = 1, 2, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.1.71)$$

Il convient donc de montrer que la construction développée dans la section 2.1 coïncide avec celle de [Yaf80].

Proposition 2.1.20 *Soit $\xi_0(x, t)$ vérifiant l'équation (2.1.60) et soit $\Omega(x, t)$ définie par la formule (2.1.65). Alors $\Omega(x, t)$ vérifie l'équation (2.1.70), à un terme d'ordre $|t|^{-(N+1)\rho}$ près, dans la région $0 < c \leq |x|/|t| \leq c' < \infty$ ainsi que la condition (2.1.71).*

Preuve Pour simplifier les notations, on omet ici les variables t et x . En différenciant (2.1.65), on trouve que

$$\partial_t \Omega = \frac{1}{4t^2} |\nabla_\xi \Phi_\pm|^2 + \left\langle \nabla_\xi \Phi_\pm, \partial_t \xi_0 - \frac{1}{2t} \sum_{k=1}^d \partial_t \xi_{k,0} \partial_{\xi_k} \nabla_\xi \Phi_\pm \right\rangle, \quad (2.1.72)$$

$$\partial_{x_i} \Omega = \partial_{x_i} \Phi_\pm + \left\langle \nabla_\xi \Phi_\pm, \partial_{x_i} \xi_0 - \frac{1}{2t} \left(\partial_{x_i} \nabla_\xi \Phi_\pm + \sum_{k=1}^d \partial_{x_i} \xi_{k,0} \partial_{\xi_k} \nabla_\xi \Phi_\pm \right) \right\rangle. \quad (2.1.73)$$

En différenciant l'équation (2.1.60), on trouve que

$$\partial_t \xi_0 - \frac{1}{2t} \sum_{k=1}^d \partial_t \xi_{k,0} \partial_{\xi_k} \nabla_\xi \Phi_\pm = -\frac{1}{2t^2} x - \frac{1}{2t^2} \nabla_\xi \Phi_\pm \quad (2.1.74)$$

et

$$\partial_{x_i} \xi_{j,0} - \frac{1}{2t} \left(\partial_{x_i} \partial_{\xi_j} \Phi_\pm + \sum_{k=1}^d \partial_{x_i} \xi_{k,0} \partial_{\xi_k} \partial_{\xi_j} \Phi_\pm \right) = \frac{1}{2t} \delta_{ij}, \quad (2.1.75)$$

où $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. En comparant (2.1.72) et (2.1.74) on obtient que

$$\partial_t \Omega = -\frac{1}{2t^2} \langle x, \nabla_\xi \Phi_\pm \rangle - \frac{1}{4t^2} |\nabla_\xi \Phi_\pm|^2. \quad (2.1.76)$$

De manière similaire, en comparant (2.1.73) et (2.1.75) on obtient que

$$\nabla_x \Omega = \nabla_x \Phi_\pm + \frac{1}{2t} \nabla_\xi \Phi_\pm. \quad (2.1.77)$$

Ces égalités entraînent que

$$\partial_t \Omega + \frac{1}{t} \langle x, \nabla_x \Omega \rangle + |\nabla_x \Omega|^2 = \frac{1}{t} \langle x + \nabla_\xi \Phi_\pm, \nabla_x \Phi_\pm \rangle + |\nabla_x \Phi_\pm|^2 \quad (2.1.78)$$

et d'après (2.1.60)

$$\frac{1}{2t} x + \nabla_x \Omega = \xi_0 + \nabla_x \Phi_\pm. \quad (2.1.79)$$

Les équations (2.1.4), (2.1.77) et (2.1.78) conduisent à

$$\begin{aligned} & \partial_t \Omega + t^{-1} \langle x, \nabla_x \Omega \rangle + |\nabla_x \Omega|^2 - 2 \langle A, x/(2t) + \nabla_x \Omega \rangle + V + |A|^2 \\ &= t^{-1} \langle x + \nabla_\xi \Phi, \nabla_x \Phi \rangle + |\nabla_x \Phi|^2 - 2 \langle A, \xi + \nabla_x \Phi \rangle + V + |A|^2 \\ &= q^{(N)} \end{aligned}$$

D'après l'estimation (2.1.20) le terme $q^{(N_e)} = q^{(N_e)}(x, \xi_0)$ est d'ordre $|t|^{-(N_e+1)\rho}$ dans la région considérée. La condition (2.1.71) découle des estimations (2.1.19) et (2.1.61). \square

2.2 La matrice de diffusion $S(\lambda; H, H_0)$

Dans cette section on s'intéresse à la matrice de la diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ les résultats pour $S(\lambda; H, H_0)$ découlant du théorème de multiplication 1.1.11. La première étape consiste à justifier une formule de représentation stationnaire du type de celle proposée dans [IK86, Yaf98]. C'est ici que l'on utilisera les estimations microlocales de la section 1.3.4. Une fois cette représentation justifiée on cherchera à en extraire la partie principale (à des termes compacts près) de la matrice de la diffusion. Si on considère $S(\lambda; H_1, H_0)$ comme un opérateur intégral sur $\mathfrak{N} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ alors son noyau $s(\omega, \omega'; \lambda)$ est une fonction régulière en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$. C'est la structure de cette singularité diagonale qui détermine les propriétés spectrales de la partie principale de $S(\lambda; H_1, H_0)$ qui seront étudiées dans la section 2.3.1. A partir d'ici on fixe certaines contraintes sur les fonctions de troncature ζ_{\pm} définies par (2.1.36)

$$\begin{aligned} \sigma_+(\tau) &= 1 \text{ pour } \tau \in [-\varepsilon, 1] & \text{et} & \quad \sigma_+(\tau) = 0 \text{ pour } \tau \in [-1, -2\varepsilon], \\ \sigma_-(\tau) &= 1 \text{ pour } \tau \in [-1, \varepsilon] & \text{et} & \quad \sigma_-(\tau) = 0 \text{ pour } \tau \in [2\varepsilon, 1]. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

pour un certain $\varepsilon \in (0, 1/2)$ fixé.

2.2.1 Construction de $S(\lambda; H, H_0)$

D'après les théorèmes 2.1.10, 2.1.13 et 2.1.15 les opérateurs de diffusion pour les couples H_0, H et H_0, H_1 définis par (1.1.9)

$$\mathbf{S}(H, H_0; J_+, J_-) = W_+^*(H, H_0; J_+)W_-(H, H_0; J_-), \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{S}(H_1, H_0; J_+, J_-) = W_+^*(H_1, H_0; J_+)W_-(H_1, H_0; J_-), \quad (2.2.3)$$

commutent avec H_0 et sont unitaires sur le sous-espace $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$. Donc d'après le théorème 1.1.9 dans une représentation de \mathcal{H} où H_0 est diagonal ces deux opérateurs se ramènent à la multiplication par les fonctions à valeur opérateur $S(\lambda; H, H_0)$ et $S(\lambda; H_1, H_0)$ appelées matrices de diffusion. On considérera la représentation standard de \mathcal{H} décrite en terme des opérateurs (1.2.23), (1.2.24) et

$$\begin{aligned} F_0 : E_0(\Lambda)\mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{L}^2(\Lambda, \mathfrak{N}) \\ f &\longmapsto (F_0 f)(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)f \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

qui vérifie

$$(F_0 H_0 f)(\lambda) = \lambda(F_0 f)(\lambda).$$

Les matrices de diffusion opèrent alors sur l'espace $\mathfrak{N} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ comme des opérateurs unitaires et ce pour presque tout $\lambda \in (0, \infty)$.

On commence par traiter le cas de $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$. On a besoin d'une formule de représentation stationnaire pour ces matrices de diffusion dans les cas où les modificateurs J_+ et J_- pour $t \rightarrow +\infty$ et $t \rightarrow -\infty$ sont différents. Cette formule nous est formellement donnée par (1.1.10) que l'on rappelle ici

$$S(\lambda) = \Omega_+(\lambda) - 2\pi i \Gamma_0(\lambda) \left(J_+^* T_- - T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \right) \Gamma_0^*(\lambda). \quad (2.2.5)$$

Les opérateurs J_\pm sont définis par (2.1.35), T_\pm sont définis par (2.1.41) et $\Omega_+(\lambda)$ représente les valeurs diagonales d'un opérateur d'onde auxiliaire Ω_+

$$\Omega_+ = W_\pm(H_0, H_0; J_+^* J_-) = s - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iH_0 t} J_+^* J_- e^{-iH_0 t}. \quad (2.2.6)$$

L'opérateur Ω_+ existe pourvu que la perturbation effective $[H_0, J_+^* J_-] = J_+^* T_- - T_+^* J_-$ se décompose en un produit de perturbations H_0 -lisses, mais on peut aussi déduire son existence du théorème de multiplication des opérateurs d'onde 1.1.8. Comme d'après la propriété d'entrelacement (cf. section 1.1.1) l'opérateur Ω_+ commute avec H_0 il opère dans la représentation spectrale définie par (2.2.4) comme la multiplication par $\Omega_+(\lambda)$.

On commence par le lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *L'opérateur $J_\pm^* T_\mp$ admet une décomposition de type (2.1.42) pour $p = (1 + \epsilon)/2 > 1/2$.*

$$J_\pm^* T_\mp = \sum_{j=1}^d G_j B_{JT,\pm}^{(s)} G_j + \langle x \rangle^{-p} B_{JT,\pm}^{(r)} \langle x \rangle^{-p},$$

où les opérateurs G_j sont définis par (1.3.31) et les opérateurs $B_{JT,\pm}^{(s)}, B_{JT,\pm}^{(r)}$ sont bornés.

Preuve D'après la décomposition (2.1.42) pour l'opérateur T_\mp , On a pour $p = (1 + \epsilon)/2 > 1/2$

$$\begin{aligned} J_\pm^* T_\mp &= J_\pm^* \langle x \rangle^{-p} B_\mp^{(r)} \langle x \rangle^{-p} + \sum_{j=1}^d J_\pm^* G_j B_\mp^{(s)} G_j \\ &= \langle x \rangle^{-p} \left(\langle x \rangle^p J_\pm^* \langle x \rangle^{-p} B_\mp^{(r)} \right) \langle x \rangle^{-p} + \sum_{j=1}^d G_j^* J_\pm^* B_\mp^{(s)} G_j + [G_j, J_\pm]^* B_\mp^{(s)} G_j \end{aligned}$$

où $B_\mp^{(s)} \in \mathcal{C}^0(\tilde{\Phi}_\mp)$ et $B_\mp^{(r)}$ sont des opérateurs bornés. On remarque d'abord que les opérateurs $B_{JT,\pm}^{(s)} = J_\pm^* B_\mp^{(s)}$ et $\tilde{B}^{(r)} = \langle x \rangle^p J_\pm^* \langle x \rangle^{-p} B_\mp^{(r)}$ sont bornés par les propositions 2.1.9 et 1.2.13. D'après les propositions 1.2.9 et 1.2.10 le commutateur $[G_j, J_\pm] = A + R$ où A appartient à la classe $\mathcal{C}^{-1/2-\rho}(\tilde{\Phi}_\pm)$ et R à un symbole dans la classe de Schwartz, en conséquence l'opérateur $B_j = \langle x \rangle^{\rho/2} [G_j, J_\pm] \langle x \rangle^p$ est borné. Comme $\langle x \rangle^{-\rho/2} B_\mp^{(s)} G_j \in \mathcal{C}^{-(1+\rho)/2}(\tilde{\Phi}_\mp)$ on obtient que $\tilde{B}_j = \langle x \rangle^{-\rho/2} B_\mp^{(s)} G_j \langle x \rangle^p$ est borné. Finalement l'égalité $[G_j, J_\pm]^* B_\mp^{(s)} G_j = \langle x \rangle^{-p} B_j^* \tilde{B}_j \langle x \rangle^{-p}$ nous conduit à la représentation (2.1.42) pour $J_\pm^* T_\mp$

avec $B_{JT,\pm}^{(r)} = \tilde{B}^{(r)} + \sum_{j=1}^d B_j^* \tilde{B}_j$ bornés. \square

Le lemme 2.2.1 assure en particulier l'existence des opérateurs d'onde Ω_+ et permet de définir l'opérateur $\Gamma_0(\lambda)J_+^*T_-\Gamma_0^*(\lambda)$ grâce aux propositions 1.2.21 et 1.3.14. Pour l'étude du terme contenant la résolvante on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.2 *Soient $J_\pm = J_\pm(N_t, \zeta_\pm, \psi)$ définis par (2.1.35) et T_\pm définis par (2.1.41). Alors l'opérateur $\langle x \rangle^p T_+^* R_1^l(\lambda + i0) T_- \langle x \rangle^p$ est borné dans \mathcal{H} et continu en norme par rapport à $\lambda > 0$ si $p < 1 + (N_t + 1)\epsilon/2 - l/2$.*

Preuve On a besoin d'une décomposition $T_\pm = T_\pm^{(sing)} + T_\pm^{(reg)}$ analogue à celle de la proposition 2.1.8 mais où le terme $T_\pm^{(reg)}$ appartienne à une classe $\mathcal{C}^m(\tilde{\Phi}_\pm)$ avec un $m = m(N_t) \rightarrow -\infty$ quand $N_t \rightarrow \infty$. Pour obtenir cette décomposition on repart de l'équation (2.1.45) qu'on réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} \tau_\pm(x, \xi) &= q_\pm^{(N_t)}(x, \xi) \zeta_\pm(x, \xi) - 2i \langle \xi + \nabla \Phi_\pm(x, \xi) - A(x), \nabla \zeta_\pm(x, \xi) \rangle \\ &\quad a_\pm(x, \xi) - 2 \langle \nabla a_\pm(x, \xi), \nabla \zeta_\pm(x, \xi) \rangle - a_\pm(x, \xi) \Delta \zeta_\pm(x, \xi). \end{aligned}$$

On pose alors

$$t_\pm^{(reg)}(x, \xi) = e^{i\phi_\pm(x, \xi)} q_\pm^{(N_t)}(x, \xi) \zeta_\pm(x, \xi) \psi(|\xi|^2), \quad t_\pm^{(sing)}(x, \xi) = t_\pm(x, \xi) - t_\pm^{(reg)}(x, \xi),$$

de sorte que les symboles de $T_\pm^{(reg)}$ et $T_\pm^{(sing)}$ vérifient

$$t_\pm^{(reg)} \in \mathcal{C}^{-1-(N_t+1)\epsilon}(\tilde{\Phi}_\pm), \quad (2.2.7)$$

$$t_\pm^{(sing)} \in \mathcal{C}^{-1}(\tilde{\Phi}_\pm), \quad \text{supp } t_\pm^{(sing)} \subset \Gamma_\mp(-\epsilon, a). \quad (2.2.8)$$

le fait que le symbole de $T_\pm^{(sing)}$ soit supporté dans la zone $\Gamma_\mp(-\epsilon, a)$ découle des condition (2.2.1) et de ce que tous les termes qui composent $t_\pm^{(sing)}$ contiennent des dérivées de ζ_\pm (cf. Figures 1.2 et 2.1). Maintenant on décompose le problème de la manière suivante

$$\langle x \rangle^p T_+^* R_1^l(\lambda + i0) T_- \langle x \rangle^p = B_1(\lambda) + B_2(\lambda) + B_3(\lambda) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (2.2.9)$$

avec

$$B_1(\lambda) = \left(\langle x \rangle^s T_+^{(reg)} \langle x \rangle^p \right)^* \langle x \rangle^{-s} R_1^l(\lambda + i0) \langle x \rangle^{-s} \left(\langle x \rangle^s T_-^{(reg)} \langle x \rangle^p \right), \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} B_2(\lambda) &= \left(\langle x \rangle^s T_-^{(reg)} \langle x \rangle^p \right)^* \langle x \rangle^{-s} R_1^l(\lambda + i0) T_-^{(sing)} \langle x \rangle^p \\ &\quad + \langle x \rangle^p T_+^{(sing)*} R_1^l(\lambda + i0) \langle x \rangle^{-s} \left(\langle x \rangle^s T_\pm^{(reg)} \langle x \rangle^p \right), \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

$$B_3(\lambda) = \langle x \rangle^p T_+^{(sing)*} R_1^l(\lambda + i0) T_-^{(sing)} \langle x \rangle^p. \quad (2.2.12)$$

tout d'abord remarquons que, d'après la proposition 1.2.13 et (2.2.7), l'opd $\langle x \rangle^s T_{\pm}^{(reg)} \langle x \rangle^p$ est borné pour $s+p \leq 1+(N_t+1)\epsilon$. Les termes contenant la résolvante sont estimés grâce au théorème 1.3.21, puisque d'après (2.2.8) le symbole $t_{\pm}^{(sing)}$ en vérifie les hypothèses, si $l-1/2 < s$ et $l-1 < s-p$. En combinant ces estimations on obtient que $B(\lambda)$ est une somme d'opérateurs bornés, continu en norme par rapport à $\lambda > 0$, si on peut choisir un s tel que les conditions suivantes soient vérifiées $1/2 \geq p \leq 1+(N_t+1)\epsilon - l/2$. En remarquant que l'estimation pour p entraîne celle pour n'importe quel $p' \leq p$ on conclut que la seule restriction est $p < 1+(N_t+1)\epsilon - l/2$. \square

Maintenant on peut donner un sens à la formule (2.2.5) par le théorème 1.1.10.

Théorème 2.2.3 *Supposons que l'hypothèse (1.3.4) soit vérifiée et que J_{\pm} soient définis par (2.1.35). Alors pour tout choix admissible de fonctions (2.1.36), la matrice de diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ pour le couple H_0, H_1 , avec identifications J_{\pm} , admet la représentation (2.2.5), où $\Omega_+(\lambda) = 0$. L'opérateur $S(\lambda)$ est fortement continu par rapport à $\lambda > 0$.*

Preuve Pour justifier (2.2.5) il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 1.1.10. La représentation (2.1.42) pour $J_+^* T_-$ permet d'obtenir la factorisation

$$J_+^* T_- = K_0^* B K_0, \quad K_0 = \begin{pmatrix} \langle x \rangle^{-p} \\ \langle x \rangle^{-1/2} \nabla^{\perp} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{JT,+}^{(r)} & 0 \\ 0 & B_{JT,+}^{(s)} Id_{\mathcal{H}^{\otimes d}} \end{pmatrix}.$$

avec $p = 1/2 + \epsilon/4$. Ici $K_0 : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{N}$ est un ‘‘vecteur’’ opérateur et B est un opérateur ‘‘matriciel’’ borné sur \mathcal{G} . L'espace $\mathcal{G} = \mathcal{H}^{\otimes d}$ consiste en plusieurs copies de \mathcal{H} et d'après les propositions 1.2.21 et 1.3.14 l'opérateur $Z_0(\lambda, K_0) : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{N}$ défini par (1.1.12) et son adjoint sont bornés et continus en $\lambda > 0$. Pour le terme contenant la résolvante on utilise la décomposition suivante

$$T_{\pm} = K_{\pm}^* K_0, \quad K_{\pm} = \begin{pmatrix} \langle x \rangle^{-p} T_{\pm}^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

car d'après le lemme 2.2.2 l'opérateur $\mathcal{R}(z, K_+, K_-)$ défini par (1.1.13) est bien borné et faiblement continu. La continuité forte de $S(\lambda; H_1, H_0)$ découle de la continuité faible puisque $S(\lambda; H_1, H_0)$ est unitaire. Il reste à montrer que $\Omega_+(\lambda) = 0$, pour tout $\lambda > 0$, ce qui découle de l'égalité $\Omega_+ = 0$ qui elle-même résulte de la limite (2.1.49)

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} J_{\mp} \exp(-iH_0 t) = 0. \quad \square$$

Il reste à étudier la matrice de diffusion pour le couple H_0, H avec identification J_+, J_- . D'après le théorème de multiplication 1.1.11 il suffit de construire la matrice de la diffusion pour le couple H_1, H pour récupérer celle pour le couple H_0, H avec identification J_+, J_- .

Proposition 2.2.4 *Supposons que A et V vérifient les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) et que les opérateurs J_{\pm} soient définis par (2.1.35). Alors la matrice de la diffusion $S(\lambda, H, H_1)$ (avec identification J_{\pm}) vérifie la relation*

$$S(\lambda; H, H_1) = Id - 2i\pi\Gamma_1(\lambda) \left(T - TR(\lambda + i0)T \right) \Gamma_1^*(\lambda), \quad (2.2.13)$$

où $\Gamma_1(\lambda)$ est défini dans le Corollaire 1.3.12 et $T = T^*$ est défini par (2.1.56).

Preuve Dans ce cas les identifications pour $t \rightarrow \pm\infty$ coïncident avec l'identité, donc dans la formule (1.1.10) on a $\Omega_+(\lambda) = I$ et $J_+^* T_- = T_+^* = T_- = T$ ce qui mène formellement à (2.2.13). Il reste à justifier (2.2.13) en vérifiant les hypothèses du théorème 1.1.10. Pour cela il suffit de prendre pour $p = \rho_0/2 > 1/2$

$$T = K_0^* B K_0, \quad K_0 = \begin{pmatrix} \langle x \rangle^{-p} \\ \langle x \rangle^{-p} D_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{2,k} \\ B_{2,k} & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$T = K^* K_0, \quad K = \begin{pmatrix} B_1 \langle x \rangle^{-p} + \sum_{k=1}^d D_k \langle x \rangle^{-p} B_{2,k} \\ D_k \langle x \rangle^{-p} B_{2,k} \end{pmatrix}.$$

où les opérateurs $B_1, B_{2,k}, k = 1, \dots, d$, sont définis dans (2.1.57) et (2.1.58) et sont bien bornés. Les hypothèses du théorème 1.1.10 sont vérifiées grâce au principe d'absorption limite et à la proposition 1.3.11. \square

Via le théorème de multiplication on obtient une représentation de la matrice de diffusion $S(\lambda; H, H_0)$ donnée par (1.1.19).

2.2.2 Analyse des singularités de $S(\lambda; H, H_0)$

Maintenant on peut commencer l'analyse des singularités de la matrice de la diffusion. La première étape consiste à ramener l'étude de $S(\lambda; H, H_0)$ à celle de $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ via le théorème de multiplication 1.1.11. Pour cela on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.5 *Sous les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) l'opérateur $S(\lambda; H, H_1) - Id$ est compact.*

Preuve d'après la proposition 2.2.4

$$S(\lambda; H, H_1) - Id = -2i\pi\Gamma_1(\lambda) \left(T - TR(\lambda + i0)T \right) \Gamma_1^*(\lambda),$$

où la perturbation T est définie par (2.1.57). D'après le théorème 1.3.7 et le corollaire 1.3.12 les opérateurs $\Gamma_1(\lambda) \langle x \rangle^{-p}$ et $\langle x \rangle^{-p} R(\lambda + i0) \langle x \rangle^{-p}$ étant compact pour $p > 1/2$ on obtient facilement la compacité de $S(\lambda; H, H_1) - Id$ en utilisant la décomposition (1.1.14). \square

A partir de la proposition 1.1.12 on déduit facilement la proposition

Proposition 2.2.6 *Supposons que les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) soient vérifiées et soit $S(\lambda; H, H_0)$ la matrice de diffusion pour le couple H_0, H . Alors la matrice de diffusion $S(\lambda; H, H_0)$ est continue en norme pour tout $\lambda > 0$ et l'opérateur $S(\lambda; H, H_0) - S(\lambda; H_1, H_0)$ est un opérateur compact sur \mathfrak{N} .*

Maintenant notre but est d'isoler la partie principale, à des termes compacts près, de la matrice de la diffusion $S(\lambda; H_1, H_0)$ à partir de sa représentation stationnaire (2.2.5). On rappelle que $T_{\pm}^{(r)} \in \mathcal{C}^{-1-\epsilon}(\tilde{\Phi}_{\pm})$, $T_{\pm}^{(s)} \in \mathcal{C}^{-1}(\tilde{\Phi}_{\pm})$ a pour symbole $t_{\pm}^{(s)}$ défini par (2.1.43). On décompose l'opérateur $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ comme suit

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) + S_1(\lambda) + S_2(\lambda), \quad (2.2.14)$$

$$S_0(\lambda) = -2\pi i \Gamma_0(\lambda) J_+^* T_-^{(s)} \Gamma_0^*(\lambda), \quad (2.2.15)$$

$$S_1(\lambda) = -2\pi i \Gamma_0(\lambda) J_+^* T_-^{(r)} \Gamma_0^*(\lambda), \quad (2.2.16)$$

$$S_2(\lambda) = 2\pi i \Gamma_0(\lambda) T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \Gamma_0^*(\lambda). \quad (2.2.17)$$

Les termes (2.2.15) à (2.2.17) dépendent du choix des fonctions de troncature ζ_{\pm} ainsi que du degré d'approximation de l'équation eiconale mais, d'après les remarques 2.1.6 et 2.1.18, leur somme (2.2.14) n'en dépend pas puisque les opérateurs d'onde ne dépendent pas de ces choix. C'est cette liberté dans le choix des paramètres qui rend la représentation (2.2.5) particulièrement flexible à l'usage.

On commence par l'étude du terme $S_2(\lambda)$. Celui-ci peut être considéré comme un "reste" négligeable dans la formule (2.2.5) comme le montre la proposition suivante.

Lemme 2.2.7 *L'opérateur $S_2(\lambda)$ défini par (2.2.17) est compact sur \mathfrak{N} et continu en norme par rapport à $\lambda > 0$. De plus son noyau $s_2(\omega, \omega'; \lambda)$ est une fonction $C^n(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ si $n < (N_t + 1)\epsilon - d + 1$.*

Preuve D'après le lemme 2.2.2, pour $l = 1$, on peut écrire que

$$S_2(\lambda) = 2\pi i \left(\Gamma_0(\lambda) \langle x \rangle^{-p} \right) \left(\langle x \rangle^p T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \langle x \rangle^p \right) \left(\langle x \rangle^{-p} \Gamma_0^*(\lambda) \right), \quad (2.2.18)$$

pour $p = 1/2 + \epsilon/4 \in (1/2, 1/2 + (N_t + 1)\epsilon/2)$. Comme $\langle x \rangle^p T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \langle x \rangle^p$ est borné et continu en norme par rapport à $\lambda > 0$, on conclut grâce à la proposition 1.2.21 qui affirme que $\Gamma(\lambda) \langle x \rangle^p$ est compact et continu en norme pour $\lambda > 0$.

On peut en plus obtenir des résultats de régularité sur le noyau de $S_2(\lambda)$ en utilisant les résultats du lemme 2.2.2 pour $l > 1$. En effet d'après (1.2.23), (1.2.24) et (2.2.17) le noyau de $S_2(\lambda)$ est formellement donné par la formule

$$s_2(\omega, \omega'; \lambda) = \frac{ik^{d-2}}{2(2\pi)^{d-1}} \left(T_+^* R_1(\lambda + i0) T_- \psi_0(\cdot, k\omega'), \psi_0(\cdot, k\omega) \right)_{\mathcal{H}}, \quad k = \lambda^{1/2}, \quad (2.2.19)$$

où $\psi_0(x, k\omega) = \exp(ik \langle x, \omega \rangle)$. La formule (2.2.19) est automatiquement justifiée si le membre de droite de cette équation est continu en $\omega, \omega' \in \mathbb{S}^{d-1}, \lambda > 0$. Si on calcule les

dérivées $\partial_\omega^\alpha \partial_{\omega'}^{\alpha'} \partial_\lambda^m s_2(\omega, \omega'; \lambda)$ jusqu'à l'ordre n on obtient que ces dérivées sont des sommes de termes de la forme

$$\left(T_+^* R_1^l(\lambda + i0) T_- \psi_0^{(\beta')}(\cdot, k\omega'), \psi_0^{(\beta)}(\cdot, k\omega) \right)_{\mathcal{H}} \quad (2.2.20)$$

où $\psi_0^{(\beta)}(x, k\omega) = x^\beta \psi_0(x, k\omega)$ et

$$|\alpha| + |\alpha'| + m = |\beta| + |\beta'| + l \leq n, \quad |\beta| \geq |\alpha|, \quad |\beta| \geq |\alpha|, \quad l \leq m.$$

Comme $\langle x \rangle^{-|\beta|-p} \psi_0^{(\beta)}(x, k\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ si $p > d/2$ il suffit donc que $\langle x \rangle^{|\beta|+p} T_+^* R_1^l(\lambda + i0) T_- \langle x \rangle^{|\beta'|+p}$ soit borné pour que immédiatement la dérivée $\partial_\omega^\alpha \partial_{\omega'}^{\alpha'} \partial_\lambda^m s_2(\omega, \omega'; \lambda)$ soit définie et continue. D'après le lemme 2.2.2 on aboutit à la condition $\max\{|\beta|, |\beta'|\} - d/2 < 1 + (N_t + 1)\epsilon/2 - l/2$ celle-ci est vérifiée si

$$(|\beta| + |\beta'| + 1 + l)/2 - d/2 < 1 + (N_t + 1)\epsilon/2,$$

pour tous les indices tels que $|\beta| + |\beta'| + l \leq n$, ce qui conclut la preuve. \square

Pour l'opérateur $S_1(\lambda)$ on a seulement un résultat de compacité.

Lemme 2.2.8 *L'opérateur $S_1(\lambda)$ défini par (2.2.17) est compact sur \mathfrak{N} et continu en norme par rapport à $\lambda > 0$. Son noyau $s_1(\omega, \omega'; \lambda)$ est une fonction C^∞ en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$ pour tout $\lambda > 0$.*

Preuve Soit $p = 1/2 + \epsilon/4 > 1/2$, on décompose $S_1(\lambda)$ comme suit

$$S_1(\lambda) = 2\pi i \left(\Gamma_0(\lambda) \langle x \rangle^{-p} \right) \left(\langle x \rangle^{-p} J_+ \langle x \rangle^p \right)^* \left(\langle x \rangle^p T_-^{(r)} \langle x \rangle^p \right) \left(\Gamma_0(\lambda) \langle x \rangle^{-p} \right)^*, \quad (2.2.21)$$

les termes contenant $\Gamma_0(\lambda)$ sont bornés et continus en norme, par rapport à $\lambda > 0$, d'après la proposition 1.2.21, et les termes contenant les opd J_+ et $T_-^{(r)}$ sont bornés d'après la proposition 1.2.13. La régularité de $s_1(\omega, \omega'; \lambda)$ en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$ découle de la proposition 1.2.24. \square

On va maintenant s'intéresser au terme (2.2.15). Comme d'après (2.2.21) on a la décomposition suivante pour l'opérateur $J_+^* T_-^{(r)} = \langle x \rangle^{-p} (\langle x \rangle^{-p} J_+ \langle x \rangle^p)^* (\langle x \rangle^p T_-^{(r)} \langle x \rangle^p) \langle x \rangle^p$ avec $p > 1/2$ d'après le lemme 2.2.1 l'opérateur $J_+^* T_-^{(s)}$ admet une décomposition du type (2.1.42). Sa restriction à la sphère de rayon $k = \lambda^{1/2}$ est donc bien définie en tant qu'opérateur borné sur \mathfrak{N} d'après les propositions 1.2.21 et 1.3.14. On peut aussi définir $S_0(\lambda)$ à partir de la proposition 1.2.26. En effet l'opérateur $S_0(\lambda)$ peut être regardé comme la restriction à la sphère \mathbb{S}_k^{d-1} de l'opd (1.2.14) définie par $\tilde{\mathbf{S}}_0 = -2i\pi \mathcal{F} J_+^* T_-^{(s)} \mathcal{F}^*$. Cet opd $\tilde{\mathbf{S}}_0$ a pour amplitude $s_0(x, \xi, \xi') = -2i\pi \overline{j_+(x, \xi)} t_-^{(s)}(x, \xi')$ et, d'après les équations (2.1.38) et (2.1.43), cette amplitude admet une décomposition du type (1.2.17)

$$s_0(x, \xi, \xi') = -4\pi e^{i\Theta(x, \xi, \xi')} \zeta_+(x, \xi) \langle \xi', \nabla \zeta_-(x, \xi') \rangle \psi(|\xi|^2) \psi(|\xi'|^2), \quad (2.2.22)$$

avec

$$\Theta(x, \xi, \xi') = \Phi_-(x, \xi') - \Phi_+(x, \xi). \quad (2.2.23)$$

Comme Θ ne vérifie pas les estimations de la classe $\tilde{\mathcal{S}}^{1-\rho}$ dans tout l'espace on doit utiliser la même astuce que dans la sous-section 2.1.2 pour que la théorie développée dans la sous-section 1.2.2 s'applique à l'opérateur $\tilde{\mathbf{S}}_0$. On remplace Θ dans (2.2.22) par une fonction

$$\tilde{\Theta}(x, \xi, \xi') = \Theta(x, \xi, \xi') \tilde{\zeta}_-(x, \xi') \tilde{\zeta}_+(x, \xi)$$

où $\tilde{\zeta}_\pm$ sont des fonctions de troncature définies par (2.1.36) qui valent respectivement 1 sur les supports de ζ_\pm . Dans ce cas on peut remplacer le facteur oscillant dans (2.2.22) par $\exp(i\tilde{\Theta}(x, \xi, \xi')) = \exp(i\Theta(x, \xi, \xi'))$ sur le support de $\mathbf{s}_0(x, \xi, \xi')$, on obtient donc que $\tilde{\mathbf{s}}_0(x, \xi, \xi') \in \tilde{\mathcal{C}}^{-1}(\tilde{\Theta})$. Pour des raisons techniques on introduit l'opérateur $\tilde{\mathbf{A}}$ qui diffère de $\tilde{\mathbf{S}}_0$ seulement par des termes compacts.

Lemme 2.2.9 *Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ l'opd de type (1.2.14) d'amplitude*

$$\mathbf{a}(x, \xi, \xi') = -2\pi e^{i\Theta(x, \xi, \xi')} \zeta_+(x, \xi) \langle \xi + \xi', \nabla \zeta_-(x, \xi') \rangle \psi(|\xi|^2) \psi(|\xi'|^2) \quad (2.2.24)$$

où Θ est défini par (2.2.23). Alors les restrictions $S_0(\lambda)$ et $A(\lambda)$ de $\tilde{\mathbf{S}}_0$ et $\tilde{\mathbf{A}}$ à la sphère \mathbb{S}_k^{d-1} existent et l'opérateur $S_0(\lambda) - A(\lambda)$ est compact. De plus les noyaux des opérateurs $S_0(\lambda)$ et $A(\lambda)$ sont de classe C^∞ en dehors de la diagonale $\omega = \omega'$.

Preuve L'existence de $S_0(\lambda)$ et $A(\lambda)$ découle de la proposition 1.2.26, la régularité des noyaux en dehors de la diagonale est une conséquence de la proposition 1.2.24. La différence $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{S}}_0 - \tilde{\mathbf{A}}$ est un opd (1.2.14) d'amplitude

$$\mathbf{b}(x, \xi, \xi') = -2\pi e^{i\Theta(x, \xi, \xi')} \sigma_+(\langle \widehat{x}, \widehat{\xi} \rangle) \langle \xi' - \xi, \nabla \sigma_-(\langle \widehat{x}, \widehat{\xi}' \rangle) \rangle \eta^2(x) \psi(|\xi|^2) \psi(|\xi'|^2).$$

Comme $\mathbf{b}(x, \xi, \xi) = 0$ l'opérateur $\tilde{\mathbf{B}}$ admet, d'après la proposition 1.2.18, la représentation (1.2.18) avec un symbole de la classe $\tilde{\mathcal{C}}^{-1-\rho}(\Theta_0)$ pour une phase $\Theta_0 \in \tilde{\mathcal{S}}^{1-\rho}$. En conséquence, par la proposition 1.2.19, sa restriction $B(\lambda)$ est un opérateur compact dans \mathfrak{N} . La régularité des noyaux de $S_0(\lambda)$ et $A(\lambda)$ découle de la proposition 1.2.24. \square

D'après le lemme 2.2.7 la régularité du noyau de $S_2(\lambda)$ peut être rendue arbitraire quitte à choisir des solutions de l'équation de transport "suffisamment" approché (i.e. N_t assez grand). En tenant compte des lemmes 2.2.8 à 2.2.9 on obtient le théorème

Théorème 2.2.10 *Soient $\chi_0, \chi_1 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ deux fonctions de troncature C^∞ aux supports disjoints et $S(\lambda) = S(\lambda; H_1, H_0)$ la matrice de diffusion pour le couple H_1, H_0 définie par (2.2.5). Alors le noyau l'opérateur $\chi_0 S(\lambda) \chi_1$ appartient à $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ et l'opérateur $\chi_0 S(\lambda) \chi_1$ est compact dans $\mathfrak{N} = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$.*

D'après le théorème 2.2.10 la singularité du noyau de $A(\lambda)$ est contenue dans un voisinage de la diagonale $\omega = \omega'$. Cette singularité détermine les propriétés spectrales de l'opérateur $A(\lambda)$ auxquelles on s'intéressera par la suite. En effet d'après le théorème 2.2.10 les termes dont le noyau est supporté loin de la diagonale ont un noyau C^∞ . Ces termes appartiennent donc à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt et sont en particulier des opérateurs compacts. D'après le théorème de Weyl ces termes n'influencent pas le spectre essentiel de l'opérateur $A(\lambda)$ ni celui de la matrice de la diffusion $S(\lambda)$. C'est pourquoi dans la suite on va se concentrer sur l'étude de l'opérateur $A_0(\lambda) = \chi_0 A(\lambda) \chi_0$ où χ_0 est supporté dans un petit voisinage $\mathcal{V} = \{\omega \in \mathbb{S}^{d-1}, |\omega - \omega_0| < \varepsilon\}$ d'un point $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ fixé et qui ne diffère de $\chi_0 S(\lambda) \chi_0$ que par des termes compacts.

Dans la suite on utilisera un système de coordonnées spécial $(y, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ défini par (voir Figure 1.1)

$$x = z(\omega + \omega')/2 + y/k, \quad \langle y, \omega_0 \rangle = 0. \quad (2.2.25)$$

Le changement de variables entre un système de coordonnées orthonormé de \mathbb{R}^d et celui défini par (2.2.25) se traduira dans les intégrales par l'apparition d'un déterminant Jacobien $dx = k^{d-1} \langle \omega + \omega', \omega_0 \rangle / 2 dz dy$.

Si on appelle Σ (voir Figure 1.1) la projection orthogonale de \mathcal{V} sur Λ_{ω_0} et \mathcal{U} l'application unitaire qui identifie $\mathbb{L}^2(\mathcal{V})$ à $\mathbb{L}^2(\Sigma)$ définie par (1.2.33), on peut, par la proposition 1.2.26, considérer l'opérateur $A_0^\varkappa(\lambda) = \mathcal{U} A_0(\lambda) \mathcal{U}^*$ comme un opd de type (1.2.14) sur Σ d'amplitude

$$\mathbf{a}_0^\varkappa(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = \frac{\alpha_0(\zeta, \zeta')}{4\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(z(\omega + \omega')/2 + y/k, k\omega, k\omega') dz, \quad (2.2.26)$$

où l'on adopte les notations

$$\alpha_0(\zeta, \zeta') = \alpha(\zeta, \zeta') \chi_0(\varkappa(\zeta)) \chi_0(\varkappa(\zeta')), \quad \omega = \varkappa(\zeta), \quad \omega' = \varkappa(\zeta') \quad (2.2.27)$$

avec \varkappa et α données par (1.2.32) et (1.2.36). Avant de remplacer \mathbf{a} par son expression (2.2.24) on remarque que si $\nabla \sigma_-(\langle \hat{x}, \omega' \rangle) \neq 0$ alors d'après (2.2.1) $\langle \hat{x}, \omega' \rangle \geq \varepsilon$. D'un autre coté pour $\omega, \omega' \in \mathcal{V}$ on a $|\omega - \omega'| < 2\varepsilon$. Ceci implique que $\langle \hat{x}, \omega \rangle \geq -\varepsilon$ et conséquemment $\sigma_+(\langle \hat{x}, \omega \rangle) = 1$ sur le support de support de $\nabla \sigma_-$. Donc la fonction ζ_+ peut être omise dans (2.2.24). Maintenant comme $\mathbf{a}(x, k\omega, k\omega')$ est supportée dans la région $\langle \omega_0, \hat{x} \rangle \geq 0$, $\langle \omega_0, \omega + \omega' \rangle \geq 2 - \varepsilon^2 > 0$ on obtient pour $x = z(\omega + \omega')/2 + y/k$ que

$$z = 2 \langle x, \omega_0 \rangle / \langle \omega + \omega', \omega_0 \rangle \geq 0.$$

Finalement en tenant compte de ce que la fonction ψ vaut 1 dans un voisinage du point λ on arrive à

Lemme 2.2.11 *Soit $A_0^\varkappa(\lambda)$ l'opd (1.2.14) sur Σ d'amplitude*

$$\mathbf{a}_0^\varkappa(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = -\alpha_0(\zeta, \zeta') \int_0^\infty e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} \langle (\omega + \omega')/2, \nabla \zeta_-(x, k\omega) \rangle dz, \quad (2.2.28)$$

où α_0, ω et ω' sont définis par (2.2.27), x par (2.2.25) et Θ par (2.2.23). Soit \mathcal{U} défini par (1.2.33), alors l'opérateur $\mathcal{U} \chi_0 S(\lambda) \chi_0 \mathcal{U}^* - A_0^\varkappa(\lambda)$ est compact.

Une conséquence de ce lemme est que l'amplitude de l'opérateur $A_0^\varkappa(\lambda)$ contient la fonction de troncature ζ_- alors que la matrice de diffusion n'en dépend pas. Dans la prochaine section on va montrer qu'en fait, à des termes compacts près, $A_0^\varkappa(\lambda)$ ne dépend pas du choix de ζ_- .

2.2.3 La partie principale de $S(\lambda; H, H_0)$

Dans cette section on va montrer que l'opd $A^\varkappa(\lambda)$ d'amplitude (2.2.28) est, à des termes compacts près, un opd avec une amplitude oscillante de type (1.2.17). Dans le cas où $A = 0$, $V_S = 0$ et V_L vérifie (1.3.4) avec $\rho > 1/2$ ce résultat à été montré par Yafaev dans [Yaf98]. Dans ce cas particulier, la démonstration est grandement simplifiée par le fait qu'on puisse définir le symbole principal de $A(\lambda)$ en tant qu'opd sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} . D'après (1.2.16) et (1.2.31) ce symbole principal est donné, en un point $(b, \omega) \in T^*\mathbb{S}^{d-1}$, $|b|/k \geq 2a$, $k = \sqrt{\lambda}$, par

$$\begin{aligned} a^\flat(b, \omega; \lambda) &= \frac{1}{4\pi k} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}(z\omega + b/k, k\omega, k\omega) dz \\ &= - \int_0^\infty e^{i\Theta(z\omega + b/k, k\omega, k\omega)} \partial_z \sigma_-(z) dz \\ &= \exp(i\Theta(b/k, k\omega, k\omega)), \end{aligned}$$

car $\Theta(z\hat{\xi} + y, \xi, \xi) = \Theta(y, \xi, \xi)$, ne dépend pas de z (cf. remarque 2.1.3) et $\int_0^\infty \partial_z \sigma_-(z) dz = \sigma_-(\infty) - \sigma_-(0) = -1$ (voir section 2.1.2 pour la définition de σ_\pm). La généralisation de ce résultat au cas d'un $\rho > 0$ arbitraire est plus délicate.

Dans toute la suite on travaillera avec le système de coordonnées défini par (2.2.25) et on notera $\omega = \varkappa(\zeta)$, $\omega' = \varkappa(\zeta')$, $k = \lambda^{1/2}$. Comme dans ce système on a

$$\langle (\omega + \omega')/2, \nabla \zeta_-(x, \xi) \rangle = \partial_z \zeta_-(x, \xi)$$

et que ζ_- varie de 1 à 0 quand z varie de 0 à l'infini on obtient en intégrant par parties dans (2.2.28)

$$\mathbf{a}_0^\varkappa(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = \alpha_0(\zeta, \zeta') \left(e^{i\Theta(y/k, k\omega, k\omega')} + \int_0^\infty \zeta_-(x, k\omega) \partial_z e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} dz \right). \quad (2.2.29)$$

Il faut maintenant montrer que le second terme dans le membre de droite de (2.2.29) est l'amplitude d'un opérateur compact. Pour simplifier les notations dans la suite on omettra les indices \varkappa et λ . Soit $\tilde{\mathbf{A}}_1$ l'opd sur Σ dont l'amplitude est le deuxième terme du second membre de (2.2.29)

$$\mathbf{a}_1(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta') \int_0^\infty e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} i \langle (\omega + \omega')/2, \nabla \Theta(x, k\omega, k\omega') \rangle \zeta_-(x, k\omega) dz, \quad (2.2.30)$$

On considère son noyau formellement défini par

$$p(\zeta, \zeta') = \frac{\alpha_0(\zeta, \zeta')}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\langle \zeta' - \zeta, y \rangle} \int_0^\infty e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} i \langle (\omega + \omega')/2, \nabla\Theta(x, k\omega, k\omega') \rangle \zeta_-(x, k\omega) dz dy \quad (2.2.31)$$

Comme, à partir de (2.2.27) et (2.2.25), on a que

$$\langle \zeta' - \zeta, y \rangle = \langle \omega' - \omega, y \rangle = \langle k\omega' - k\omega, y/k \rangle = \langle k\omega' - k\omega, x \rangle$$

on peut réécrire cette intégrale oscillante[†] sous la forme

$$p(\zeta, \zeta') = \frac{\alpha_1(\zeta, \zeta')}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\langle x, \omega_0 \rangle \geq 0} e^{iG(x, k\omega, k\omega')} i \langle (\omega + \omega')/2, \nabla\Theta(x, k\omega, k\omega') \rangle \zeta_-(x, k\omega) dx. \quad (2.2.32)$$

où

$$\alpha_1(\zeta, \zeta') = k^{1-d} \alpha_0(\zeta, \zeta') (\langle (\omega + \omega')/2, \omega_0 \rangle)^{-1}, \quad (2.2.33)$$

et

$$G(x, \xi, \xi') = \langle \xi' - \xi, x \rangle + \Theta(x, \xi, \xi'). \quad (2.2.34)$$

Si la phase $G(x, k\omega, k\omega')$ ne possédait pas de points stationnaires, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\langle x, \omega_0 \rangle \geq 0$ on ait

$$|\nabla_x G(x, k\omega, k\omega')| \geq c > 0,$$

il serait possible en intégrant par partie, modulo une hypothèse de décroissance des $\partial_x^\alpha G(x, \xi, \xi')$ quand $|x| \rightarrow \infty$, de donner un sens à l'intégrale oscillante (2.2.31). Ce sont donc les points critiques de G qui posent problème pour définir le noyau p sauf si l'amplitude dans l'intégrale (2.2.32) s'annule en ces points. Par chance on se trouve quasiment dans cette situation.

Lemme 2.2.12 *La fonction (2.2.23) vérifie l'égalité*

$$\langle \xi + \xi', \nabla\Theta(x, \xi, \xi') \rangle = \langle \nabla G(x, \xi, \xi'), F(x, \xi, \xi') \rangle + \mathbf{q}(x, \xi, \xi'), \quad (2.2.35)$$

où G est défini par (2.2.34) et les fonctions F et \mathbf{q} sont définies par

$$F(x, \xi, \xi') = 2A(x) - \nabla(\Phi_-(x, \xi') + \Phi_+(x, \xi)), \quad (2.2.36)$$

$$\mathbf{q}(x, \xi, \xi') = \left(q_-^{(N_\epsilon)}(x, \xi') - q_+^{(N_\epsilon)}(x, \xi) \right). \quad (2.2.37)$$

En particulier les fonctions F et \mathbf{q} vérifient dans la région $\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq -\kappa$, $\langle \hat{x}, \hat{\xi}' \rangle \leq \kappa$, pour tout $\kappa \in (0, 1)$, et tout α, β , les estimations

$$|\partial_x^\alpha \partial_{\xi, \xi'}^\beta F(x, \xi, \xi')| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-\rho - |\alpha|} \quad (2.2.38)$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_{\xi, \xi'}^\beta \mathbf{q}(x, \xi, \xi')| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-1 - \epsilon - |\alpha|} \quad (2.2.39)$$

[†]Pour justifier les manipulations que l'on va faire sur le noyau (2.2.31) il faudrait "tester" le noyau $p(\zeta, \zeta')$ contre une fonction $u(\zeta, \zeta') \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2(d-1)})$ et intégrer par parties par rapport à la variable x jusqu'à obtenir des intégrales absolument convergentes. On omettra ces détails pour lesquels on renvoie le lecteur au chapitre 1 section 1 de [Shu87].

Preuve D'après (2.2.23) on a

$$\begin{aligned} \langle \xi + \xi', \nabla \Theta(x, \xi, \xi') \rangle &= 2(\langle \xi', \nabla \Phi_-(x, \xi') \rangle - \langle \xi, \nabla \Phi_+(x, \xi) \rangle) \\ &\quad - \langle \xi' - \xi, \nabla \Phi_-(x, \xi') + \nabla \Phi_+(x, \xi) \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

Comme Φ_{\pm} sont solutions de l'équation eiconale (2.1.4), on a que

$$\begin{aligned} 2(\langle \xi', \nabla \Phi_-(x, \xi') \rangle - \langle \xi, \nabla \Phi_+(x, \xi) \rangle) \\ = q_-^{(N_e)}(x, \xi') - q_+^{(N_e)}(x, \xi) + |\nabla \Phi_+(x, \xi)|^2 - |\nabla \Phi_-(x, \xi')|^2 \\ + 2 \langle A(x), \nabla \Phi_-(x, \xi') - \nabla \Phi_+(x, \xi) \rangle + 2 \langle A(x), \xi' - \xi \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

En combinant (2.2.40) et (2.2.41) on obtient (2.2.35). Les estimations (2.2.38) et (2.2.39) sont des conséquences directes de (2.1.19) et (2.1.20). \square

Maintenant en injectant (2.2.35) et (2.2.34) dans (2.2.31), on obtient

$$\begin{aligned} p(\zeta, \zeta') &= \frac{\alpha_1(\zeta, \zeta')}{2k(2\pi)^{d-1}} \int_{\langle x, \omega_0 \rangle \geq 0} e^{iG(x, k\omega, k\omega')} i \left(\langle \nabla G(x, k\omega, k\omega'), F(x, k\omega, k\omega') \rangle \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{q}(x, k\omega, k\omega') \right) \zeta_-(x, k\omega) dx. \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Ensuite on intègre par parties le terme contenant ∇G

$$\begin{aligned} p(\zeta, \zeta') &= \frac{\alpha_1(\zeta, \zeta')}{(2\pi)^{d-1}} \left(- \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{iG(y/k, k\omega, k\omega')} \langle F(y/k, k\omega, k\omega'), \omega_0 \rangle / (2k^d) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\langle x, \omega_0 \rangle \geq 0} e^{iG(x, k\omega, k\omega')} \tilde{\mathbf{q}}(x, k\omega, k\omega') dx \right), \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

où l'hyperplan Λ_{ω_0} a été identifié à \mathbb{R}^{d-1} et

$$\tilde{\mathbf{q}}(x, \xi, \xi') = (2k)^{-1} \left(i \mathbf{q}(x, \xi, \xi') \zeta_-(x, \xi) - \operatorname{div}_x (F(x, \xi, \xi') \zeta_-(x, \xi)) \right). \quad (2.2.44)$$

D'après les estimations (2.2.38) et (2.2.39), la fonction (2.2.44) vérifie, comme \mathbf{q} , l'estimation (2.2.39) dans la région $|x| \leq c$ ou $\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \leq \kappa$, pour tout $\kappa \in (-1, 0)$. On obtient donc une décomposition de l'opd $\tilde{\mathbf{A}}_1$ d'amplitude (2.2.30) en deux opd $\tilde{\mathbf{A}}_2$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ d'amplitudes[†]

$$\mathbf{a}_2(y, \zeta, \zeta') = -\alpha_1(\zeta, \zeta') e^{i\Theta(y/k, k\omega, k\omega')} \langle F(y/k, k\omega, k\omega'), \omega_0 \rangle / (2k^d), \quad (2.2.45)$$

$$\mathbf{k}(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta') \int_0^\infty e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} \tilde{\mathbf{q}}(x, k\omega, k\omega') dz, \quad (2.2.46)$$

où Θ est défini par (2.2.23). la compacité de $\tilde{\mathbf{A}}_2$ repose sur la proposition 1.2.19.

[†]La somme des amplitudes \mathbf{a}_2 et \mathbf{k} n'est pas égale à \mathbf{a}_1 ce qui ne doit pas surprendre, au vu des manipulations faites sur le noyau p , puisque l'amplitude ne définit pas l'opérateur associé de manière intrinsèque (voir aussi le théorème 1.3 dans [Shu87] chapitre 1 section 3).

Lemme 2.2.13 *L'opd $\tilde{\mathbf{A}}_2$ d'amplitude (2.2.45) appartient à la classe $\tilde{\mathcal{C}}^{-\rho}(\Theta)$ où $\Theta = \Theta(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}z(\zeta), \lambda^{1/2}z(\zeta'))$ est donnée par (2.2.23). En particulier, c'est un opérateur compact dans $L_2(\Sigma)$.*

Preuve Comme $\langle \hat{y}, \omega_0 \rangle = 0$ on a $|\langle \hat{y}, \omega \rangle| \leq \varepsilon$ et $|\langle \hat{y}, \omega' \rangle| \leq \varepsilon$ pour $\omega, \omega' \in \mathcal{V}$. Ceci implique que l'estimation (2.2.38) est vérifiée par $\alpha_1(\zeta, \zeta') < F(y/k, k\omega, k\omega'), \omega_0 \rangle$, et $\tilde{\mathbf{A}}_2$ appartient à $\tilde{\mathcal{C}}^{-\rho}(\Theta)$, en conséquence c'est un opérateur compact. \square

La compacité de $\tilde{\mathbf{K}}$ repose essentiellement sur la proposition 1.2.25.

Lemme 2.2.14 *l'opd $\tilde{\mathbf{K}}$ d'amplitude (2.2.46) est compact dans $\mathbb{L}^2(\Sigma)$.*

Preuve Soit $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\vartheta(t) = 0$ pour $t \leq 1/2$ et $\vartheta(t) = 1$ pour $t \geq 1$. On décompose $\tilde{\mathbf{q}}(x, \xi, \xi') = \tilde{\mathbf{q}}_0(x, \xi, \xi') + \tilde{\mathbf{q}}_1(x, \xi, \xi')$ où $\tilde{\mathbf{q}}_0(x, \xi, \xi') = \tilde{\mathbf{q}}(x, \xi, \xi')\vartheta(z)$ et $\tilde{\mathbf{q}}_1(x, \xi, \xi') = \tilde{\mathbf{q}}(x, \xi, \xi')(1 - \vartheta(z))$. Pour $\hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \mathcal{V}$ on peut remarquer que les fonctions $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1$, définies par (2.2.44), vérifient les estimations (2.2.39). On considère d'abord l'opérateur $\tilde{\mathbf{K}}_0$ d'amplitude

$$\mathbf{k}_0(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} \tilde{\mathbf{q}}_0(x, k\omega, k\omega') dz.$$

D'après (1.2.35) $\tilde{\mathbf{K}}_0$ est la restriction à \mathbb{S}_k^{d-1} de l'opd (1.2.14) d'amplitude

$$\mathbf{h}_0(x, \xi, \xi') = 4\pi k \exp(i\Theta(x, \xi, \xi')) \tilde{\mathbf{q}}_0(x, \xi, \xi') \chi_0(\hat{\xi}) \chi_0(\hat{\xi}').$$

Comme $\mathbf{h}_0 \in \tilde{\mathcal{C}}^{-1-\epsilon}(\tilde{\Theta})$, l'opérateur $\tilde{\mathbf{K}}_0$ est compact par la proposition 1.2.19.

Ensuite on considère l'opd $\tilde{\mathbf{K}}_1$ de type (1.2.14) sur Σ et d'amplitude

$$\mathbf{k}_1(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta') \int_0^1 e^{i\Theta(x, k\omega, k\omega')} \tilde{\mathbf{q}}_1(x, k\omega, k\omega') dz.$$

On réécrit cette expression de la manière suivante

$$\mathbf{k}_1(y, \zeta, \zeta') = e^{i\Theta(y/k, k\omega, k\omega')} \mathbf{h}_1(y, \zeta, \zeta'),$$

où

$$\mathbf{h}_1(y, \zeta, \zeta') = \alpha_0(\zeta, \zeta') \int_0^1 e^{i(\Theta(x, k\omega, k\omega') - \Theta(y/k, k\omega, k\omega'))} \tilde{\mathbf{q}}_1(x, k\omega, k\omega') dz.$$

Comme $|\langle \hat{x}, \omega \rangle| \leq 2\varepsilon$, $|\langle \hat{x}, \omega' \rangle| \leq 2\varepsilon$, pour $\omega, \omega' \in \mathcal{V}$ on déduit de (2.1.19) et (2.2.23) que

$$\left| \partial_y^\alpha \partial_{\zeta, \zeta'}^\beta e^{i(\Theta(x, k\omega, k\omega') - \Theta(y/k, k\omega, k\omega'))} \right| = O\left(\langle y \rangle^{-\rho - |\alpha|}\right)$$

uniformément en $z \in [0, 1]$. En tenant compte des estimations (2.2.39) pour $\tilde{\mathbf{q}}_1(x, \xi, \xi')$ on obtient que $\mathbf{k}_1 \in \tilde{\mathcal{C}}^{-1-\rho-\epsilon}(\Theta)$. En conclusion l'opérateur $\tilde{\mathbf{K}}_1$ est compact. \square

Le premier terme dans le membre de droite de (2.2.29) représente donc la partie non-compacte de $A_0^\varkappa(\lambda)$. comme d'après (1.2.36) le terme $\alpha(\zeta, \zeta) = 1$ on peut, d'après la proposition 1.2.18, éliminer ce facteur de la partie principale de $A_0^\varkappa(\lambda)$. Maintenant on peut énoncer le résultat principal de la thèse dans le théorème qui suit.

Théorème 2.2.15 *Supposons que les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) sont vérifiées et que $S(\lambda; H, H_0)$, $\lambda \in (0, \infty)$, est la matrice de diffusion pour le couple H_0, H avec identifications J_\pm . Soit $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ une fonction de troncature supportée dans un petit voisinage de ω_0 , $S_0^\varkappa(\lambda)$ l'opd (1.2.14) sur Λ_{ω_0} (l'hyperplan orthogonal à ω_0) d'amplitude*

$$s_0^\varkappa(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = \exp(i\Theta(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta), \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta'))) \chi_0(\varkappa(\zeta))\chi_0(\varkappa(\zeta')) \quad (2.2.47)$$

où \varkappa et Θ sont définis par (1.2.32) et (2.2.23), et \mathcal{U} défini par (1.2.33). Alors l'opérateur $\chi_0 S(\lambda; H, H_0) \chi_0 - \mathcal{U}^* S_0^\varkappa(\lambda) \mathcal{U}$ est compact sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$. Si χ_1 est une autre fonction de troncature telle que $\text{supp } \chi_0 \cap \text{supp } \chi_1 = \emptyset$, alors $\chi_0 S(\lambda; H, H_0) \chi_1$ est compact.

Remarque 2.2.16 D'après la preuve du lemme 2.2.11, la représentation (2.2.28) est encore vraie si l'intégrale sur $(0, \infty)$ est remplacée par la même intégrale mais sur l'intervalle $(-\delta, \infty)$ pour un $\delta \in (0, \varepsilon)$. Alors, d'après la preuve du théorème 2.2.15 on obtient à la place de (2.2.47) l'expression

$$s_0^\varkappa(y, \zeta, \zeta'; \lambda) = e^{i\Theta(\lambda^{-1/2}y - \delta(\varkappa(\zeta) + \varkappa(\zeta'))/2, \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta), \lambda^{1/2}\varkappa(\zeta'))} \chi_0(\varkappa(\zeta))\chi_0(\varkappa(\zeta')). \quad (2.2.48)$$

pour l'amplitude de l'opérateur $S_0^\varkappa(\lambda)$. D'après le théorème 2.2.15, la différence entre (2.2.47) et (2.2.48) doit être l'amplitude d'un opérateur compact. On peut le vérifier par un calcul direct en remarquant que

$$\Theta(y/k - \delta(\varkappa(\zeta) + \varkappa(\zeta'))/2, k\varkappa(\zeta), k\varkappa(\zeta')) - \Theta(y/k, k\varkappa(\zeta), k\varkappa(\zeta')) \in \tilde{\mathcal{S}}^{-\rho}.$$

2.3 Propriétés spectrales de $S(\lambda; H, H_0)$

Dans cette dernière section on va utiliser le résultat du théorème 2.2.15 pour l'étude des propriétés spectrales de la matrice de diffusion $S(\lambda)$. L'objectif est de généraliser le résultat de [Yaf98] où il est démontré que le spectre de $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité pour des potentiels électrostatiques V homogènes de degré $-\rho$ avec $\rho \in (1/2, 1]$ (et $A = 0$). Ce résultat reste vrai pour la plupart des potentiels électromagnétiques asymptotiquement homogènes de degré $-\rho$, $\rho \in (0, 1)$. Par contre, on verra que le cas critique $\rho = 1$, dans (1.3.4), peut donner lieu à d'autres comportements.

2.3.1 Le spectre essentiel dans le cas $\rho < 1$

Commençons par définir la fonction

$$\mathbf{V}(x, \xi) = 2^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(V_L(t\xi) - V_L(x + t\xi) + 2 \langle A_L(x + t\xi) - A_L(t\xi), \xi \rangle \right) dt. \quad (2.3.1)$$

qui sera l'objet central de toute cette section. La fonction \mathbf{V} joue le rôle de partie principale de la fonction Θ définie par (2.2.23). D'après la remarque 2.1.3, il est clair que cette fonction ne dépend pas de la projection de x sur la direction $\hat{\xi}$.

Théorème 2.3.1 *Supposons que les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) soient satisfaites et que pour un certain point $(x_0, k\omega_0) \in \mathbb{R}^{2d}$, $\langle x_0, \omega_0 \rangle = 0$, la fonction (2.3.1) vérifie les estimations*

$$|\mathbf{V}(\tau x_0, k\omega_0)| \geq c\tau^{1-\rho}, \quad |\nabla \mathbf{V}(\tau x_0, k\omega_0)| \geq c\tau^{-\rho}, \quad \rho \in (0, 1), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.3.2)$$

Alors le spectre de la matrice de la diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ coïncide, pour tout $\lambda > 0$, avec le cercle unité \mathbb{T} .

Preuve Il découle des équations (2.1.10), (2.1.13), (2.1.14), (2.2.23) et (2.3.1) que

$$\Theta(x, \xi, \xi) - \mathbf{V}(x, \xi) = \sum_{n=2}^N \left(\Phi_-^{(n)}(x, \xi) - \Phi_+^{(n)}(x, \xi) \right),$$

donc d'après l'estimation (2.1.18) on obtient pour tout α

$$|\partial_x^\alpha (\Theta(x, \xi, \xi) - \mathbf{V}(x, \xi))| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{1-2\rho-|\alpha|},$$

pour $|\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle| \leq \kappa$, $\kappa \in (0, 1)$. Si $x = \tau x_0$, $\xi = k\omega_0$ et $\langle x_0, \omega_0 \rangle = 0$, pour $\tau \rightarrow +\infty$ on arrive à

$$|\Theta(\tau x_0, k\omega_0, k\omega_0)| \geq C\tau^{1-\rho}, \quad |\nabla \Theta(\tau x_0, k\omega_0, k\omega_0)| \geq C\tau^{-\rho}. \quad (2.3.3)$$

Si maintenant on choisit la fonction de troncature χ_0 dans le théorème 2.2.15 telle que $\chi_0(\omega_0) = 1$, on peut appliquer la proposition 1.2.20 à l'opérateur $S_0^\alpha(\lambda)$ et obtenir que son spectre essentiel recouvre le cercle unité[†]. Soit u_n une suite de Weyl pour $S_0^\alpha(\lambda)$ associée à $\mu \in \mathbb{T}$, alors $f_n = \mathcal{U}^* u_n$ est une suite de Weyl pour $\chi_0 S(\lambda) \chi_0$. Comme d'après la proposition 1.2.20 le support de f_n "s'écrase" au point ω_0 , donc on peut choisir la fonction de troncature $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ supportée sur l'ensemble où χ_0 vaut 1 de telle sorte que $\chi_0 f_n = \chi_1 f_n = f_n$ pour n grand. Ce choix conduit à l'estimation

$$\|S(\lambda) f_n - \mu f_n\| \leq \|\chi_0 S(\lambda) \chi_0 f_n - \mu f_n\| + \|(1 - \chi_0) S(\lambda) \chi_1 f_n\|. \quad (2.3.4)$$

[†]On remarquera ici que par rapport à l'énoncé de la proposition 1.2.20 la dimension d'espace est $d-1$

Comme $\text{supp}(1 - \chi_0) \cap \text{supp} \chi_1 = \emptyset$, d'après le théorème 2.2.15, l'opérateur $(1 - \chi_0)S(\lambda)\chi_1$ est compact le membre de droite de (2.3.4) tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En conséquence, le spectre de la matrice de diffusion recouvre le cercle unité. Comme $S(\lambda)$ est unitaire son spectre coïncide avec \mathbb{T} . \square

Remarque 2.3.2 Le théorème 2.3.1 ne donne aucune information sur la nature du spectre de $S(\lambda)$. Si les potentiels A et V sont radiaux, ce spectre est constitué de valeurs propres qui par le théorème 2.3.1 sont denses sur le cercle unité [Yaf98]. Dans le cas du potentiel de Coulomb, le calcul des valeurs propres de $S(\lambda)$ peut être trouvé dans [Yaf97].

Remarque 2.3.3 Lorsque $\rho > 1/2$ on peut définir le symbole principal de l'opd $S_0(\lambda)$ défini par (2.2.15). D'après le théorème 2.2.15, et surtout (2.2.47), ce symbole, défini sur $T^*\mathbb{S}^{d-1}$ modulo $\mathcal{S}^{-1}(T^*\mathbb{S})$, vaut

$$s_0^b(b, \omega; \lambda) = \exp(i\Theta(b/k, k\omega, k\omega)) = \exp(i\mathbf{V}(b/k, k\omega)), \quad \omega \in \mathbb{S}^{d-1}, \langle b, \omega \rangle = 0, \quad k = \lambda^{1/2}. \quad (2.3.5)$$

Dans ce cas il suffit de montrer que $|\Theta(b/k, k\omega, k\omega)| \rightarrow \infty$ quand $|b| \rightarrow \infty$ pour obtenir que le spectre essentiel de $S(\lambda)$ recouvre \mathbb{T} . Dans l'hypothèse (2.3.2) la seconde inégalité est une condition purement technique due à l'utilisation des classes de symboles oscillants (cf. [Yaf00a]).

Remarque 2.3.4 Si $A_L(x)$ et $V_L(x)$ sont des fonctions asymptotiquement homogènes d'ordre $-\rho$ alors les fonctions

$$\begin{aligned} 2^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (V_L(t\xi) - V_L(x + t\xi)) dt &= C_V(\hat{x}, \hat{\xi}) |\xi|^{-1} |x|^{1-\rho}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A_L(x + t\xi) - A_L(t\xi), \xi \rangle dt &= C_A(\hat{x}, \hat{\xi}) |x|^{1-\rho}, \end{aligned}$$

sont homogènes en x de degré $1 - \rho$. Si on arrive à vérifier que $C_V(\hat{x}, \hat{\xi}) \neq 0$ ou $C_A(\hat{x}, \hat{\xi}) \neq 0$ pour un certain couple de points x, ξ alors la fonction (2.3.1) vérifie la condition (2.3.2).

Sous les hypothèses de la proposition 2.1.19 les conclusions du théorème 2.2.15 restent encore vraies pour la matrice de diffusion définie en terme des opérateurs d'onde usuels.

Proposition 2.3.5 *Supposons que les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) soient vérifiées avec $V_L = 0$ et $\rho > 1/2$ et qu'en plus A_L vérifie la condition de jauge transverse (19). Si de plus la fonction (2.3.1) vérifie l'estimation (2.3.2) pour un point (x_0, ω_0) , $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\langle x_0, \omega_0 \rangle = 0$. Alors le spectre de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité \mathbb{T} pour tout $\lambda > 0$.*

On peut donner un exemple explicite de potentiel vérifiant les hypothèses de la proposition 2.3.5. En dimension $d = 2$, pour le potentiel $A(x) = |x|^{-1-\rho}(-x_2, x_1)$, $\rho \in (1/2, 1)$ la fonction (2.3.1) s'exprime pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$ par

$$\mathbf{V}(x, \xi) = \pm v_0 |x|^{1-\rho}, \quad v_0 = \int_{\mathbb{R}} \langle s \rangle^{-1-\rho} ds > 0, \quad \langle x, \xi \rangle = 0,$$

selon que $\hat{\xi}$ est obtenu à partir de \hat{x} par rotation d'angle $\pm\pi/2$. En conséquence, la condition (2.3.2) est bien vérifiée. Cet exemple peut se généraliser facilement aux dimensions supérieures.

Remarque 2.3.6 La proposition 2.3.5 contredit un résultat de Nicoleau. Le théorème 2 dans [Nic94] affirme que $S(\lambda) - Id$ est compact sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.3.5. Ce résultat est incompatible avec le fait que le spectre essentiel de $S(\lambda)$ recouvre cercle unité. Outre le contre-exemple cité plus haut il faut bien garder à l'esprit que le résultat de la proposition 2.3.5 est assez général pour les potentiels vérifiant (1.3.4) puisque d'après la remarque 2.3.4 elle doit être vérifiée pour la plupart des potentiels homogènes.

2.3.2 Le cas $\rho = 1$

Désormais on considère le cas $\rho = 1$ pour lequel le théorème 2.3.1 ne s'applique pas. D'après la remarque 2.3.3 il suffit de trouver le spectre essentiel de l'opd $S_0(\lambda)$, de symbole principal (2.3.5), pour identifier, via le théorème de Weyl, celui de $S(\lambda; H, H_0)$. Ceci revient en fait à trouver l'ensemble de valeurs prises par la fonction $\mathbf{V}(x, \xi)$ pour $\langle x, \xi \rangle = 0$ (cf. proposition 1.2.28). Contrairement au cas $\rho = 1$ on va voir qu'on peut obtenir ici des situations très variées pour le spectre de $S(\lambda; H, H_0)$.

On commence par le cas où $A_L = 0$. La fonction (2.3.1) s'écrit alors

$$\mathbf{V}(x, \xi) = \frac{1}{2|\xi|} \int_{-\infty}^{+\infty} (V_L(t\hat{\xi}) - V_L(x + t\hat{\xi})) dt.$$

Pour des potentiels V_L asymptotiquement homogènes de degré -1 $V_L(x) = v(\hat{x})/|x|$, $|x| \geq R > 0$ il a été montré dans [Yaf98] que la fonction $\mathbf{V}(x, \xi)$ admet, pour $\langle x, \xi \rangle = 0$, l'asymptotique

$$\mathbf{V}(x, \xi) = (2|\xi|)^{-1} \left(\mathbf{v}(\hat{\xi}) \ln |x| + \nu(\hat{\xi}, \hat{x}) + \nu_1(\hat{\xi}) \right), \quad |x| \geq R > 0 \quad (2.3.6)$$

où

$$\nu(\hat{\xi}, \hat{x}) = \int_{|t| \geq 1} \left(\frac{v(\hat{\xi})}{|t\hat{\xi}|} - \frac{v(\widehat{x + t\hat{\xi}})}{|x + t\hat{\xi}|} \right) dt - \int_{|t| \leq 1} \frac{v(\widehat{x + t\hat{\xi}})}{|x + t\hat{\xi}|} dt, \quad (2.3.7)$$

$$\nu_1(\hat{\xi}) = \int_{-R}^R V_L(t\hat{\xi}) dt - \mathbf{v}(\hat{\xi}) \ln R, \quad \mathbf{v}(\hat{\xi}) = v(\hat{\xi}) + v(-\hat{\xi}). \quad (2.3.8)$$

En particulier, la fonction $\mathbf{V}(x, \xi)$ a une croissance logarithmique quand $|x| \rightarrow +\infty$ si il existe $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\mathbf{v}(\omega) \neq 0$. D'après la remarque 2.3.3 ceci suffit à montrer que dans ce cas le spectre de $S(\lambda; H, H_0)$ recouvre le cercle unité \mathbb{T} . Pour le potentiel de Coulomb $V(x) = c/|x|$, $|x| \geq R > 0$, on a bien $\mathbf{v}(\omega) \neq 0 \forall \omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ et les conclusions du théorème 1.2.20 restent vraies [Yaf98].

Pour que $\mathbf{v}(\omega) = 0$, $\forall \omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ il faut que $V_L(-x) = -V_L(x)$ pour $|x|$ assez grand, c'est ce qu'on appelle un potentiel de type dipolaire[†]. Dans ce cas la fonction $\mathbf{V}(x, \xi)$ ne tend pas vers l'infini quand $|x| \rightarrow \infty$ d'après (2.3.6) et est déterminée par les deux coefficients ν, ν_1 définis par (2.3.7) et (2.3.8). La proposition suivante décrit, sur un exemple type, les résultats qu'on obtient dans cette situation.

Proposition 2.3.7 *Soit $H = (D - A)^2 + V$ vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.5) avec $A_L = 0$, et*

$$V_L(x) = \gamma \langle x, n \rangle / |x|^2, \quad |x| \geq R > 0, \quad n \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \gamma > 0. \quad (2.3.9)$$

Si on note $[m, M]$ l'intervalle de valeurs prises par la fonction ν_1 donnée par (2.3.8) alors le spectre essentiel de la matrice de diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ est donné par

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \left\{ e^{i\nu} \in \mathbb{C} : \nu \in \left[\frac{m - \gamma\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{M - \gamma\pi}{2\sqrt{\lambda}} \right] \cup \left[\frac{m + \gamma\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{M + \gamma\pi}{2\sqrt{\lambda}} \right] \right\}. \quad (2.3.10)$$

En particulier le spectre de $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité si $\lambda \leq ((M - m)/4\pi)^2$.

Preuve Pour démontrer ce résultat il suffit d'identifier l'intervalle de valeurs prises à "l'infini" par la fonction \mathbf{V} , d'après (2.3.6) on doit donc calculer les coefficients \mathbf{v}, ν, ν_1 de ce développement asymptotique. Comme d'après (2.3.9) on a $V_L(-x) = -V_L(x)$ pour $|x| \geq R$ ce qui impose que $\mathbf{v}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$. La fonction $\nu_1(\omega) = \int_{-R}^R V_L(t\omega) dt$ est une fonction continue de $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$, l'image de \mathbb{S}^{d-1} par cette fonction est donc un certain intervalle compact $[m, M] \subset \mathbb{R}$. Il reste à calculer la fonction $\nu(\omega, \hat{x})$ ce qui est assez simple vu la forme explicite du potentiel (2.3.9) :

[†]Nommément le terme dipolaire désigne les potentiels de la forme $V(x) = |x - a|^{-1} - |x + a|^{-1} = O(|x|^{-2})$ qui sont donc à courte portée.

$$\begin{aligned}
\nu(\omega, \hat{x}) &= \int_{|t| \geq 1} \frac{\gamma t \langle \omega, n \rangle}{|t|^2} - \frac{\gamma \langle x + t\omega, n \rangle}{|x|^2 + t^2} dt - \int_{|t| \leq 1} \frac{\gamma \langle x + t\omega, n \rangle}{|x|^2 + t^2} dt \\
&= \gamma \langle \omega, n \rangle \left(\int_{|t| \geq 1} \frac{|x|^2}{|t|(t^2 + |x|^2)} dt - \int_{|t| \leq 1} \frac{t}{t^2 + |x|^2} dt \right) - \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma \langle x, n \rangle}{t^2 + |x|^2} dt \\
&= -\gamma\pi \langle \hat{x}, n \rangle + 2 \langle \hat{x}, n \rangle \arctan(|x|^{-1}) + \gamma \frac{\langle \omega, n \rangle}{|x|^2} \int_{|t| \geq |x|} (|t| \langle t \rangle^2)^{-1} dt.
\end{aligned}$$

En particulier modulo des termes compacts $S(\lambda)$ est un opd sur \mathbb{S}^{d-1} de symbole principal

$$s_0(b, \omega; \lambda) = \exp \left(i(\nu_1(\omega) - \gamma\pi \langle \hat{b}, n \rangle) / 2\sqrt{\lambda} \right). \quad (2.3.11)$$

En utilisant la proposition 1.2.24 et le théorème de Weyl on obtient que le spectre essentiel de $S(\lambda)$ coïncide avec l'intervalle (2.3.10). Si la longueur des intervalles qui composent le spectre (2.3.10) est supérieure à 2π , i.e. $(M - m)/2\sqrt{\lambda} \geq 2\pi$ alors le spectre de $S(\lambda)$ recouvre \mathbb{T} . \square

Remarque 2.3.8 Dans le cas des potentiels de type dipolaire, comme la fonction $\mathbf{V}(x, \xi)$ est homogène de degré -1 en ξ , il existe forcément un seuil critique pour l'énergie λ au dessous duquel le spectre de $S(\lambda)$ recouvre \mathbb{T} . La valeur $\lambda \leq ((M - m)/4\pi)^2$ donnée dans la proposition 2.3.7 n'est pas optimale. Si $V_L(-x) = -V_L(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ alors $\nu_1 \equiv 0$ et le spectre essentiel de $S(\lambda)$ est constitué de seulement deux points $\exp(\pm i\gamma\pi/2\sqrt{\lambda})$ qui peuvent être confondus si $\gamma \in 2\sqrt{\lambda}\mathbb{Z}$ et valent 1 si $\gamma \in 4\sqrt{\lambda}\mathbb{Z}$.

On passe maintenant au cas magnétique $V_L = 0$. La fonction (2.3.1) se réduit dans ce cas à

$$\mathbf{V}(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} \langle A_L(x + t\hat{\xi}) - A_L(t\hat{\xi}), \hat{\xi} \rangle dt. \quad (2.3.12)$$

Contrairement au cas électrique cette fonction est homogène de degré 0 en ξ et le spectre essentiel de la matrice de diffusion ne dépendra pas de l'énergie. Pour commencer on va se concentrer sur le cas de la dimension $d = 2$ avec des potentiels de type (40) introduit par Aharonov et Bohm [AB59]. D'après la proposition 2.1.19 les opérateurs d'onde usuels $W_{\pm}(H, H_0)$ existent et sont complets. En particulier la matrice de diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ pour le couple H_0, H est définie en terme de ces opérateurs d'onde usuels. Le spectre essentiel de $S(\lambda)$ est alors décrit par la proposition suivante.

Théorème 2.3.9 Soit $H = (D - A)^2 + V$ vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.5) avec $V_L = 0$ et

$$A_L(x) = f(\vartheta)(-x_2, x_1)/|x|^2, \quad |x| \geq R > 0, \quad (2.3.13)$$

où ϑ est l'angle polaire associé à x et $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction 2π -périodique. Posons

$$g(u) = \int_{u-\pi}^u f(v) dv \quad (2.3.14)$$

(qui est aussi 2π -périodique), alors, pour tout $\lambda > 0$, la partie principale de la matrice de diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ est un opd sur \mathbb{S} de symbole principal

$$\exp\left(i\frac{\omega_2 x_1 - \omega_1 x_2}{|x|}g(\theta)\right), \quad |x| \geq R > 0, \quad (2.3.15)$$

et le spectre essentiel de $S(\lambda)$ est donné par

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \{e^{i\nu} \in \mathbb{C} : \pm \nu \in g(\mathbb{R})\}. \quad (2.3.16)$$

Preuve Comme le potentiel (2.3.13) vérifie la condition de jauge transverse on obtient que

$$\mathbf{V}(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} \langle A_L(x + t\hat{\xi}), \hat{\xi} \rangle dt. \quad (2.3.17)$$

On va donc calculer explicitement la fonction $\mathbf{V}(x, \omega)$ pour $\langle x, \omega \rangle = 0$ et identifier l'ensemble des valeurs prises par cette fonction. Comme $\mathbf{V}(x, -\omega) = -\mathbf{V}(x, \omega)$ il suffit de calculer la fonction \mathbf{V} pour (x, ω) vérifiant $x_1\omega_2 - x_2\omega_1 = |x| \geq 0$. Si on appelle θ l'angle polaire associé à ω en injectant (2.3.13) dans (2.3.17) on obtient

$$\mathbf{V}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\vartheta_t) \frac{|x|}{|x|^2 + t^2} dt,$$

où

$$\vartheta_t = \theta - \pi/2 + \arctan(t/|x|),$$

est l'angle polaire associé au point $x + t\omega$ (voir Figure 2.2). Si on fait le changement de variables $t \rightarrow \vartheta_t$ comme $d\vartheta/dt = |x|/(|x|^2 + t^2)$ et en tenant compte de (2.3.14) on arrive à

$$\mathbf{V}(x, \omega) = \int_{\theta-\pi}^{\theta} f(\vartheta) d\vartheta = g(\theta), \quad |x| \geq R > 0.$$

Maintenant pour une orientation relative quelconque de x et ω on trouve que $\exp(i\mathbf{V}(x, \omega))$ est bien donné par (2.3.15). L'intervalle de valeurs prises par la fonction $\mathbf{V}(x, \omega) = \pm g(\vartheta)$ coïncide avec l'ensemble

$$I = \{\nu \in \mathbb{R} : \nu \in g(\mathbb{R})\} \cup \{\nu \in \mathbb{R} : -\nu \in g(\mathbb{R})\}.$$

La proposition 2.3.9 découle donc directement de la proposition 1.2.28 puisque d'après la remarque 2.3.3 la partie principale de $S(\lambda)$ est un opd de symbole principal asymptotiquement homogène de degré 0 égal à $\exp(i\mathbf{V}(b/k, k\omega))$. \square

Pour un choix particulier de la fonction f dans (2.3.13) on peut calculer explicitement la fonction (2.3.14) et donner des exemples où le spectre essentiel de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ est un sous ensemble strict du cercle unité \mathbb{T} .

Corollaire 2.3.10 Soit $H = (D - A)^2 + V$ vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.5) avec $V_L = 0$ et A_L vérifiant (2.3.13) où

$$f(\vartheta) = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{\varphi}{2} \cos \vartheta. \quad (2.3.18)$$

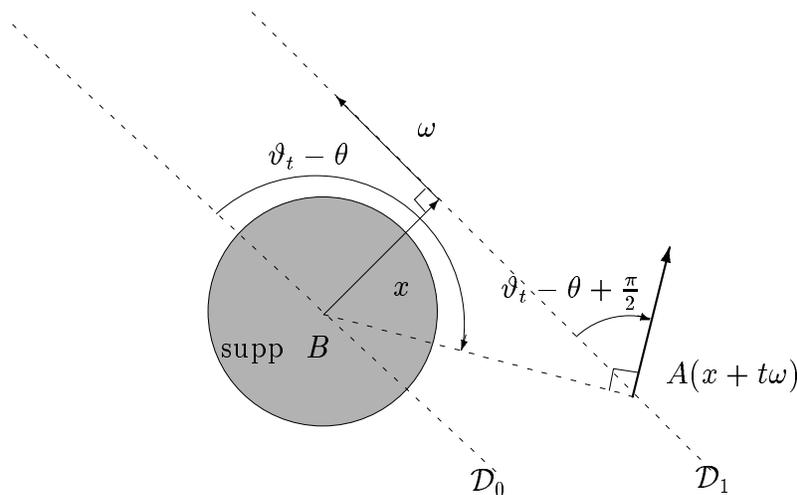


FIG. 2.2: Calcul de \mathbf{V} pour le potentiel de Aharonov-Bohm en dimension 2

Alors, pour tout $\lambda > 0$, le spectre essentiel de la matrice de diffusion $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ est donné par

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \{e^{i\nu} \in \mathbb{C} : \nu \in [-\phi/2 - \varphi, -\phi/2 + \varphi] \cup [\phi/2 - \varphi, \phi/2 + \varphi]\}. \quad (2.3.19)$$

En particulier si $f(\vartheta) = \phi/2\pi$ alors pour tout $\lambda > 0$

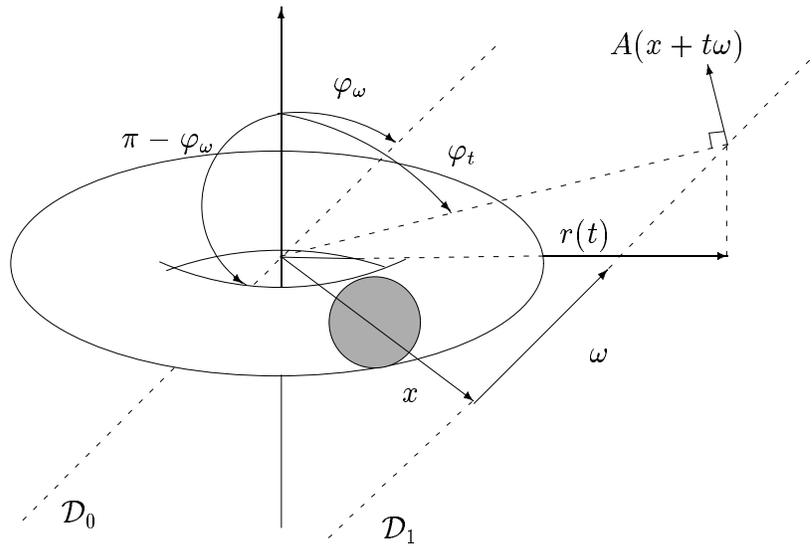
$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \{\exp(i\phi/2), \exp(-i\phi/2)\}.$$

Preuve Pour la fonction (2.3.18) on obtient d'après (2.3.14) que $g(u) = \phi/2 + \varphi \sin u$ donc les valeurs prises par g coïncident avec l'intervalle $[\phi/2 - \varphi, \phi/2 + \varphi]$ (où $\{\phi/2\}$ dans le cas $\varphi = 0$). Une application directe de la proposition 2.3.9 conduit à (2.3.19). \square

Remarque 2.3.11 Si $\varphi \in (0, \pi/2)$ alors (2.3.19) est un sous ensemble strict de \mathbb{T} . Si $\varphi = 0$ le corollaire 2.3.10 généralise le résultat connu dans le cas où $V = 0$ et A est le potentiel de Aharonov-Bohm (40) que le spectre de $S(\lambda)$ est constitué de deux valeurs propres $\exp(\pm i\phi/2)$ de multiplicité infinie [Hen80, Rui83] qui sont confondues si $\phi \in 2\pi\mathbb{Z}$ et valent 1 si de plus $\phi \in 4\pi\mathbb{Z}$.

Le type de comportement spectral de $S(\lambda)$ exhibé dans la proposition 2.3.10 n'est en rien spécifique à la dimension $d = 2$ comme le montre l'exemple suivant[†] en dimension $d = 3$.

[†]On pourra trouver une analyse très récente de l'effet Aharonov-Bohm, étudié du point de la formule de Van-Vleck, par Bily et Robert dans [BR01].


 FIG. 2.3: Calcul de \mathbf{V} pour le potentiel (2.3.20) en dimension 3

Proposition 2.3.12 Soit $H = (D - A)^2 + V$ vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.5) avec $V_L = 0$ et A_L vérifiant

$$A_L(x) = \frac{f(\varphi)}{|x|^2} \left(-\frac{x_1 x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, -\frac{x_2 x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), \quad |x| \geq R > 0, \quad (2.3.20)$$

où φ est la colatitude associée à x et $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ est une fonction π -périodique positive. Si on note \tilde{S} l'opérateur de multiplication par la fonction

$$\exp \left(i \int_{\varphi_\omega}^{\pi - \varphi_\omega} f(\varphi) d\varphi \right), \quad (2.3.21)$$

φ_ω étant la colatitude associée à ω , alors l'opérateur $S(\lambda; H, H_0) - \tilde{S}$ est compact. En particulier si on appelle

$$\phi = \int_0^\pi f(\varphi) d\varphi, \quad (2.3.22)$$

alors pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\sigma_{ess}(S(\lambda; H, H_0)) = \{e^{i\nu} \in \mathbb{C} : \nu \in [-\phi, \phi]\}. \quad (2.3.23)$$

Preuve Calculons la fonction (2.3.17) pour $x \in \mathbb{R}^3$, $\omega \in \mathbb{S}^2$ et $\langle x, \omega \rangle = 0$. Dans la suite on note φ_t la colatitude associée au point $x(t) = x + t\omega$, φ_ω celle associée à ω et

$r(t) = ((x_1 + t\omega_1)^2 + (x_2 + t\omega_2)^2)^{1/2}$ (cf. Figure 2.3). D'après (2.3.20) un premier calcul nous donne

$$\begin{aligned}
\langle A_L(x + t\omega), \omega \rangle &= \frac{f(\varphi_t)}{|x + t\omega|^2 r(t)} \langle (-x_1(t)x_3(t), -x_2(t)x_3(t), r^2(t)), \omega \rangle \\
&= \frac{f(\varphi_t)}{|x + t\omega|^2 r(t)} \langle -x_3(t)(x + t\omega) + (0, 0, |x + t\omega|^2), \omega \rangle \\
&= \frac{f(\varphi_t)}{r(t)} \left(\omega_3 - \frac{(x_3 + t\omega_3)t}{|x + t\omega|^2} \right) \\
&= \frac{f(\varphi_t)}{r(t)} \frac{\omega_3|x|^2 - tx_3}{|x + t\omega|^2}.
\end{aligned}$$

D'un autre coté on a

$$\sin \varphi_t = r(t)/|x + t\omega|, \quad \cos \varphi_t = (x_3 + t\omega_3)/|x + t\omega|,$$

d'où l'on tire que

$$-\sin \varphi_t \frac{d\varphi_t}{dt} = \frac{\omega_3}{|x + t\omega|} - \frac{t(x_3 + t\omega_3)}{|x + t\omega|^3},$$

puis

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = \frac{1}{r(t)} \frac{tx_3 - \omega_3|x|^2}{|x + t\omega|^2}.$$

Ce qui permet de faire le changement de variable $t \rightarrow \varphi_t$ dans (2.3.17) et d'obtenir

$$\mathbf{V}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \langle A_L(x + t\omega), \omega \rangle dt = \int_{\varphi_\omega}^{\pi - \varphi_\omega} f(\varphi) d\varphi.$$

La fonction \mathbf{V} ne dépend donc pas de x et la partie principale de $S(\lambda)$, qui d'après la remarque 2.3.3 est l'opd de symbole principal $\exp(i\mathbf{V}(b/k, k\omega))$, se réduit à l'opérateur de multiplication par (2.3.21). Comme la fonction f est positive et en tenant compte de (2.3.22) on obtient que l'image de $T^*\mathbb{S}^2$ par \mathbf{V} coïncide avec l'intervalle $[-\phi, \phi]$. La proposition 1.2.28 conduit alors à (2.3.23). \square

2.3.3 La section efficace

Dans cette dernière section on va déterminer le terme principal de la singularité diagonale du noyau $s(\omega, \omega'; \lambda)$ de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ quand $|\omega - \omega'| \rightarrow 0$, pour la famille de potentiels magnétiques (2.3.13). Nous en déduirons des résultats sur la section efficace différentielle

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega'; \lambda) = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} |s(\omega, \omega'; \lambda)|^2, \quad \omega \neq \omega', \quad (2.3.24)$$

et la section efficace totale (3). Dans le cas particulier de la dimension $d = 2$ la matrice de diffusion agissant dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S})$ il est naturel de représenter cet opérateur comme agissant sur les fonctions 2π -périodiques (i.e. d'exprimer son noyau en fonction des angles polaires ϑ et ϑ' de ω et ω') plutôt que dans le système de coordonnées locales défini par (1.2.32) (cf. Figure 1.1). Soit ω_0 une direction d'angle polaire ϑ_0 , le lien entre les angles polaires ϑ, ϑ' et les variables ζ, ζ' est donné par les formules

$$\zeta = \sin(\vartheta - \vartheta_0), \quad \zeta' = \sin(\vartheta' - \vartheta_0),$$

Soient maintenant $u, v \in C^\infty(\mathbb{S})$ supportées dans un petit voisinage de ω_0 le lien entre ces deux représentations peut être exprimé de la manière suivante

$$\begin{aligned} (S(\lambda)u, v)_{\mathfrak{H}} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s^\varkappa(\zeta, \zeta'; \lambda) \mathcal{U}u(\zeta') \overline{\mathcal{U}v(\zeta)} d\zeta d\zeta' \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\vartheta, \vartheta'; \lambda) u(\vartheta') \overline{v(\vartheta)} d\vartheta d\vartheta' \end{aligned}$$

d'où

$$s(\vartheta, \vartheta'; \lambda) = s^\varkappa(\zeta, \zeta'; \lambda) (1 - |\zeta|^2)^{-1/4} (1 - |\zeta'|^2)^{-1/4}. \quad (2.3.25)$$

Les résultats sont formulés avec ces conventions dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.3.13 *Soient $H = (D - A_L)^2$ avec A_L vérifiant (2.3.13), $S(\lambda)$ la matrice de diffusion pour le couple H_0, H et S_{AB} un opérateur sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S})$ ayant pour noyau*

$$s_{AB}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{e^{ig(\vartheta)} + e^{-ig(-\vartheta)}}{2} \delta(\theta) - \frac{e^{ig(\vartheta)} - e^{-ig(-\vartheta)}}{2i\pi} \text{P.V.} \frac{1}{\sin \theta} \quad (2.3.26)$$

où $\theta = \vartheta - \vartheta_0$, δ est la masse de Dirac et P.V. désigne la valeur principale. Alors l'opérateur $S(\lambda) - S_{AB}$ est Hilbert-Schmidt pour tout $\lambda > 0$, et on a pour $\vartheta \neq \vartheta_0$, $\vartheta \rightarrow \vartheta_0$ l'estimation uniforme en ϑ_0

$$|s(\vartheta, \vartheta_0; \lambda) - s_{AB}(\vartheta, \vartheta_0)| = O(|\ln |\theta||). \quad (2.3.27)$$

Preuve On décompose $\tilde{S}(\lambda) = \tilde{S}_1(\lambda) + S_2(\lambda)$ avec

$$\tilde{S}_1(\lambda) = -2i\pi \Gamma_0(\lambda) J_+^* T_- \Gamma_0^*(\lambda), \quad (2.3.28)$$

et $S_2(\lambda)$ donné par (2.2.17). D'après le lemme 2.2.7 le noyau de $S_2(\lambda)$ ne contribue pas à la singularité diagonale du noyau $s(\vartheta, \vartheta'; \lambda)$ de la matrice de diffusion (quitte à résoudre l'équation de transport (2.1.24) avec un nombre suffisant d'étapes N_t). En particulier $S_2(\lambda)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Intéressons nous maintenant à $\tilde{S}_1(\lambda)$. D'après la proposition 1.2.24 cet opérateur possède un noyau C^∞ en dehors de la diagonale, il suffit donc d'étudier ce qui se passe au voisinage de cette dernière. Si χ_0 est une fonction de troncature supportée dans un petit

voisinage de $\omega_0 \in \mathbb{S}$, $\chi(\omega) = 1$ pour $|\omega - \omega_0|$ assez petit, \varkappa et \mathcal{U} sont définis par (1.2.32) et (1.2.33), alors on peut, grâce à (2.3.25), relier le noyau p_1^\varkappa de $\mathcal{U}\chi_0\tilde{S}_1(\lambda)\chi_0\mathcal{U}^*$ à celui p_1 de $\tilde{S}_1(\lambda)$ par

$$p_1(\vartheta, \vartheta_0; \lambda) = (1 - |\zeta|^2)^{-1/4} p_1^\varkappa(\zeta, 0),$$

où ϑ et ϑ_0 sont les angles polaires associés à $\varkappa(\zeta)$ et ω_0 . Il est facile d'extraire la partie principale de p_1^\varkappa en considérant l'opérateur $\mathcal{U}\chi_0\tilde{S}_1(\lambda)\chi_0\mathcal{U}^*$ comme un opd de type (1.2.14) sur \mathbb{R} . D'après le théorème 2.2.15, la remarque 2.3.3 et l'équation (2.3.15), on peut calculer explicitement son "symbole" principal, modulo des termes asymptotiquement homogènes de degré -1. En tenant compte de ce que $\mathbf{V}(y, \omega) = g(\vartheta)$ et $\mathbf{V}(-y, \omega) = -\mathbf{V}(-y, -\omega) = -g(-\vartheta)$ on obtient que

$$\tilde{s}_0(y, \zeta; \lambda) = e^{ig(\vartheta)} h(y) + e^{-ig(-\vartheta)} h(-y),$$

où ϑ est l'angle polaire associé à $\omega = \varkappa(\zeta)$, g est la fonction définie par (2.3.14) et h est la fonction de Heaviside. Il suffit donc de calculer la transformée de Fourier de $\tilde{s}_0(y, \zeta; \lambda)$ en variable y prise au point ζ . Puisque la transformée de Fourier de h est

$$\widehat{h}(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(\zeta) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \text{P.V.} \frac{1}{\zeta}, \quad (2.3.29)$$

que

$$|\vartheta - \vartheta_0| = O(|\zeta|), \quad (1 - |\zeta|^2)^{-1/4} = 1 + O(|\vartheta - \vartheta_0|^2)$$

et que d'après le lemme 1.2.29 les termes asymptotiquement homogènes de degré -1 dans le symbole de $\tilde{S}_1(\lambda)$ contribuent à la singularité diagonale du noyau au plus comme un $O(|\ln |\theta||)$. On peut affirmer grâce à l'équation (2.3.25)

$$|p_1(\vartheta, \vartheta_0; \lambda) - s_{AB}(\vartheta, \vartheta_0)| = O(|\ln |\theta||). \quad (2.3.30)$$

On obtient la même estimation pour s puisque la contribution de $S_2(\lambda)$ est bornée. \square

Théorème 2.3.14 Soient $H = (D - A_L)^2$ avec A_L vérifiant (2.3.13), $S(\lambda)$ la matrice de diffusion pour le couple H_0, H . Alors pour $\omega \neq \omega_0$, $\omega \rightarrow \omega_0$ et tout $\lambda > 0$ on a l'estimation uniforme en ω_0

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2\left(\left(g(\vartheta) + g(-\vartheta)\right)/2\right)}{\sin^2(\theta/2)} + O\left(\frac{|\ln |\theta||}{|\theta|}\right), \quad (2.3.31)$$

où ϑ est l'angle polaire associé à ω , $2 \sin(\theta/2) = |\omega - \omega_0| \neq 0$. En particulier la section efficace totale

$$\Sigma_{tot}(\omega; \lambda) = \int_{\mathbb{S}} \Sigma_{diff}(\omega, \omega'; \lambda) d\omega' \quad (2.3.32)$$

diverge sauf si $g(\vartheta) + g(-\vartheta)$ est un multiple de 2π auquel cas

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = O(|\ln |\theta||^2). \quad (2.3.33)$$

Preuve D'après la définition de la section efficace différentielle (2.3.24) au premier ordre d'approximation celle-ci est déterminé par le carré de (2.3.26) où l'on a négligé la masse de Dirac (supportée sur la diagonale). En tenant compte du reste on obtient

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \frac{2 \sin^2 \left(\left(g(\vartheta) + g(-\vartheta) \right) / 2 \right)}{\sin^2(\theta)} + O \left(\frac{|\ln |\theta||}{|\theta|} \right).$$

Comme

$$\frac{2}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{2 \sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{2 \sin^2(\theta/2)} + O(1),$$

on a bien obtenu (2.3.31). Si $\sin((g(\vartheta) + g(-\vartheta))/2) = 0$ alors pour $\omega \neq \omega_0$ on a en repartant de (2.3.26) et (2.3.27) $\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = O(|\ln |\theta||^2)$. Cette quantité étant intégrable la section totale (2.3.32) est finie. Si par contre $\sin((g(\vartheta) + g(-\vartheta))/2) \neq 0$ la singularité dominante $O(|\theta|^{-2})$ sur la diagonale n'est pas intégrable et la quantité (2.3.32) diverge. \square

En particulier pour le potentiel (40) on a $g(\vartheta) = \phi/2$ ce qui permet de retrouver les résultats connus pour la section efficace [AB59, Hen80, Rui83].

Corollaire 2.3.15 Soient $H = (D - A_L)^2$, A_L vérifiant (40), et $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$. Alors pour $\omega \neq \omega_0$, $\omega \rightarrow \omega_0$ et tout $\lambda > 0$ on a l'estimation uniforme en ω_0

$$\Sigma_{diff}(\omega, \omega_0; \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2(\phi/2)}{\sin^2(\theta/2)} + O \left(\frac{|\ln |\theta||}{|\theta|} \right), \quad (2.3.34)$$

où ϑ est l'angle polaire associé à ω , $2 \sin(\theta/2) = |\omega - \omega_0| \neq 0$. En particulier la section efficace totale diverge sauf si ϕ est un multiple de 2π .

Remarque 2.3.16 Les asymptotiques (2.3.2) et (2.3.34) sont conservées si on ajoute au hamiltonien H un terme électrique à courte portée V_S vérifiant (1.3.5) avec un $\rho_0 > 2$.

Remarque 2.3.17 Lorsque $\rho \in (0, 1)$ on peut obtenir une asymptotique de la singularité diagonale de $s(\omega, \omega'; \lambda)$ par une méthode de phase stationnaire comme dans [Yaf98, Yaf00b].

APPENDICE : Le principe d'absorption limite pour H .

Comme on l'a signalé dans la remarque 1.3.9, le Principe d'absorption limite pour H ne peut pas être obtenu de la même manière que pour H_1 si on n'a pas $\rho_0 \geq 2$ dans l'hypothèse (1.3.5). Cependant la méthode de Mourre permet quand même d'établir le principe d'absorption limite pour H à condition de remplacer l'hypothèse iv) de la définition 1.1.13 par une condition un peu plus faible[†], précisément on demande que $\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) B_2 f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2}$ soit borné pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On procède ici de la même manière que dans [Yaf85] (où il était supposé que $A = 0$) et [GY00] (où c'est l'opérateur de Dirac qui était considéré). La difficulté supplémentaire par rapport à ces deux travaux vient de la structure plus complexe de la partie courte portée (non différentiable) de la perturbation $-DA_S - A_S D + 2 \langle A_S, A_L \rangle + |A_S|^2 + V_S$ qui n'est plus un opérateur de multiplication. Ces difficultés sont cependant facilement surmontées dans la proposition A.3.

Commençons par fixer quelques notations pour la suite. On se donne deux intervalles

$$\Lambda_{2\delta} \subset \Lambda_\delta = (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset (0, \infty), \quad (\text{A.1})$$

avec $\lambda > 2\delta > 0$, et une fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$

$$\text{supp } f \subset \Lambda_{2\delta}, \quad f|_{\Lambda_\delta} = 1. \quad (\text{A.2})$$

On supposera que les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7) sont vérifiées avec $1 + \rho \leq \rho_0 < 2$. Si $\rho_0 \geq 2$ le principe d'absorption limite découle de toute façon directement de (1.1.24) et du lemme 1.3.24 d'après la remarque 1.3.9. Si éventuellement $\rho > \rho_0 - 1$ cela ne pose aucun problème de remplacer ρ par $\rho_0 - 1$ dans l'hypothèse (1.3.4). On rappelle que sous ces hypothèses

$$B_1 = i[H, \mathcal{A}] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}), \quad M = f(H) B_1 f(H) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}), \quad (\text{A.3})$$

[†]Cette condition peut être rapprochée des conditions de régularité fractionnaire de la fonction $t \mapsto \exp(-itA)H \exp(itA)$, en $t = 0$, énoncées dans [ABdMG96].

et que de plus si on choisit δ assez petit on a d'après la proposition 1.3.4 (et en particulier l'inégalité (1.3.20)) que

$$M = f(H)B_1f(H) \geq cf(H)^2. \quad (\text{A.4})$$

Notre objectif est d'appliquer le lemme 1.1.18 à la famille d'opérateurs

$$F_\varepsilon(z) = K_\varepsilon G_\varepsilon(z) K_\varepsilon, \quad (\text{A.5})$$

où

$$K_\varepsilon = \langle x \rangle^{-\sigma-1/2} / \langle \varepsilon x \rangle^{1/2-\sigma}, \quad \sigma = r - 1/2 \in (0, 1/2), \quad (\text{A.6})$$

$$G_\varepsilon(z) = (H - i\varepsilon M - z)^{-1}, \quad \pm \operatorname{sgn} \varepsilon = \pm \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z > 0. \quad (\text{A.7})$$

On doit donc récolter plusieurs estimations a priori pour établir (1.1.28). On commence par les plus classiques qui peuvent être tirées de [PSS81, Mou81, JMP84].

Lemme A.1 *Pour tout $\operatorname{Im} z, \varepsilon \in (0, 1]$ l'opérateur $H - i\varepsilon M - z$ est inversible et $G_\varepsilon(z)$ est continûment différentiable en ε et continu pour $\varepsilon \in [0, 1]$. De plus pour tout $\operatorname{Re} z \in \Lambda_{\delta/2}, \operatorname{Im} z, \varepsilon \in (0, 1]$ on a les estimations*

$$\|G_\varepsilon(z)(f(H) - Id)(H + i)\| \leq c, \quad \|G_\varepsilon(z)f(H)\| \leq c\varepsilon^{-1}, \quad (\text{A.8})$$

$$\|(H + i)G_\varepsilon(z)\| + \|G_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon^{-1}. \quad (\text{A.9})$$

Pour tout opérateur Q borné sur \mathcal{H} et $\varepsilon \in (0, 1]$ on a

$$\|QG_\varepsilon(z)f(H)\| \leq c\varepsilon^{-1/2}\|QG_\varepsilon(z)Q\|^{1/2} \quad (\text{A.10})$$

Les suivantes sont tirées de [Yaf85, GY00].

Lemme A.2 *Pour tout $\operatorname{Re} z \in \Lambda_{\delta/2}, \operatorname{Im} z, \varepsilon \in (0, 1]$ on a*

$$\|K_\varepsilon\| \leq 1, \quad \|K_\varepsilon \langle x \rangle\| \leq c\varepsilon^{\sigma-1/2}, \quad \left\| \frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon} \right\| \leq c\varepsilon^{\sigma-1/2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H + i) \langle x \rangle^s\| \leq c\varepsilon^{-1/2-s}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|)^{1/2}, \quad s \in [0, 1]. \quad (\text{A.12})$$

Preuve La première inégalité de (A.11) découle de $\langle \varepsilon x \rangle^{1/2-\sigma} \geq 1$. Pour la seconde il suffit d'écrire que

$$K_\varepsilon \langle x \rangle = \frac{\langle x \rangle^{1/2-\sigma}}{\langle \varepsilon x \rangle^{1/2-\sigma}} \leq C \frac{1 + |x|^{1/2-\sigma}}{\langle \varepsilon x \rangle^{1/2-\sigma}} \leq C + C \frac{|x|^{1/2-\sigma}}{|\varepsilon x|^{1/2-\sigma}} \leq c\varepsilon^{1/2-\sigma}.$$

Pour la troisième les mêmes arguments fonctionnent après un calcul explicite de la dérivé

$$\frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon} = (1 - 2\sigma)\varepsilon|x|^2 \frac{\langle x \rangle^{-1/2-\sigma}}{\langle \varepsilon x \rangle^{3/2-\sigma}} \leq (1 - 2\sigma)\varepsilon \frac{\langle x \rangle^{3/2-\sigma}}{\langle \varepsilon x \rangle^{3/2-\sigma}} \leq c\varepsilon\varepsilon^{\sigma-3/2} = c\varepsilon^{\sigma-1/2}.$$

Pour l'égalité (A.12) un argument d'interpolation permet de restreindre la preuve aux cas $s = 0$ et $s = 1$. Pour le cas $s = 0$ l'estimation

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z) f(H)(H + i)\| \leq C\varepsilon^{-1/2} \|F_\varepsilon(z)\|^{1/2},$$

découle de (A.10) avec $Q = K_\varepsilon$ et l'estimation

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(Id - f(H))(H + i)\| \leq C,$$

découle de (A.8) et (A.11). La somme de ces deux estimations donne l'inégalité recherchée pour $s = 0$.

Pour le cas $s = 1$ on cherche à montrer que

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H + i)\langle x \rangle\| \leq c\varepsilon^{-3/2}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|)^{1/2}. \quad (\text{A.13})$$

On commence par commuter $\langle x \rangle$ et $(H + i)$

$$K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H + i)\langle x \rangle = K_\varepsilon G_\varepsilon(z)\langle x \rangle(H + i) + K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[H, \langle x \rangle].$$

Comme l'opérateur $[H, \langle x \rangle] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{-1})$ (cf. l'équation (1.3.26)) le second terme s'estime par (A.9) et (A.11)

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[H, \langle x \rangle]\| \leq \|G_\varepsilon(z)(H + i)\| \|(H + i)^{-1}[H, \langle x \rangle]\| \leq C\varepsilon^{-1}.$$

Maintenant on commute $\langle x \rangle$ et $G_\varepsilon(z)$

$$K_\varepsilon G_\varepsilon(z)\langle x \rangle(H + i) = K_\varepsilon \langle x \rangle G_\varepsilon(z)(H + i) + K_\varepsilon [G_\varepsilon(z), \langle x \rangle](H + i).$$

Le premier terme s'estime facilement par (A.9) et (A.11)

$$\|K_\varepsilon \langle x \rangle G_\varepsilon(z)(H + i)\| \leq \|K_\varepsilon \langle x \rangle\| \|G_\varepsilon(z)(H + i)\| \leq C\varepsilon^{\sigma+1/2}.$$

Le second terme se réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} K_\varepsilon [G_\varepsilon(z), \langle x \rangle](H + i) &= K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x \rangle, H - i\varepsilon M - z]G_\varepsilon(z)(H + i) \\ &= K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x \rangle, H]G_\varepsilon(z)(H + i) \\ &\quad - i\varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x \rangle, M]G_\varepsilon(z)(H + i). \end{aligned}$$

L'estimation du premier terme repose encore sur (1.3.26), (A.9), (A.11) et (A.12) pour $s = 0$ (qui vient d'être démontrée)

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x \rangle, H]G_\varepsilon(z)(H + i)\| &\leq \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H + i)\| \|(H + i)^{-1}[\langle x \rangle, H]\| \\ &\quad \|G_\varepsilon(z)(H + i)\| \\ &\leq C\varepsilon^{-3/2} \|F_\varepsilon(z)\|^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour le second terme on va utiliser que

$$\begin{aligned} \varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x \rangle, M]G_\varepsilon(z)(H+i) &= \varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x \rangle, f(H)]B_1 f(H)G_\varepsilon(z)(H+i) \\ &\quad + \varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)f(H)B_1[\langle x \rangle, f(H)]G_\varepsilon(z)(H+i) \\ &\quad + \varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)f(H)[\langle x \rangle, B_1]f(H)G_\varepsilon(z)(H+i). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes s'estiment à partir de (A.3), (A.9), (A.12) pour $s = 0$ et du lemme A.5

$$\begin{aligned} \varepsilon \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[\langle x \rangle, f(H)]B_1 f(H)G_\varepsilon(z)(H+i)\| \\ \leq \varepsilon \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)\| \| (H+i)^{-1}[\langle x \rangle, f(H)] \| \|B_1 f(H)\| \|G_\varepsilon(z)(H+i)\| \\ \leq C\varepsilon^{-3/2}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il reste donc un ultime terme à estimer

$$\varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon(z)f(H)[\langle x \rangle, B_1]f(H)G_\varepsilon(z)(H+i).$$

Pour ce faire nous allons d'abord calculer le commutateur $[\langle x \rangle, B_1]$. L'expression de B_1 est donnée par (1.3.15), ce qui conduit à

$$[\langle x \rangle, B_1] = 2[\langle x \rangle, H] + \sum_{k=1}^d [\langle x \rangle, a_k(x)D_k] - [\langle x \rangle, [DA_S + A_S D - 2A_L A_S - |A_S|^2 - V_S, x \cdot \nabla]].$$

Le premier terme s'estime toujours grâce à (1.3.26). Pour le second il est clair, d'après (1.3.12), que $[\langle x \rangle, a_k(x)D_k] = -ia_k(x)(\partial_k \langle x \rangle)$ est borné sur \mathcal{H} . Le troisième terme est un opérateur borné de \mathcal{H}_1 dans \mathcal{H}_{-1} car d'une part pour les termes sans dérivées $[\langle x \rangle, [V_S, x \cdot \nabla]] = 0$ et d'autre part pour ceux contenant des dérivées

$$\begin{aligned} [\langle x \rangle, [\nabla A_S, x \cdot \nabla]] &= A_S(x) \cdot \nabla(x \cdot \nabla \langle x \rangle) + d(A_S(x) \cdot \nabla \langle x \rangle) \\ &\quad + \nabla \cdot (A_S(x)(x \cdot \nabla \langle x \rangle) + x(A_S(x) \cdot \nabla \langle x \rangle)) \\ &= u(x) + \nabla w(x), \end{aligned}$$

avec $u(x) = O(\langle x \rangle^{-\rho_0})$, $w(x) = O(\langle x \rangle^{-(\rho_0-1)})$, d'après l'hypothèse (1.3.5). Au final d'après (A.9) et (A.12) (pour $s = 0$) on obtient que

$$\begin{aligned} \varepsilon \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)f(H)[\langle x \rangle, B_1]f(H)G_\varepsilon(z)(H+i)\| \\ \leq \varepsilon \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)\| \|f(H)[\langle x \rangle, B_1]f(H)\| \|G_\varepsilon(z)(H+i)\| \\ \leq C\varepsilon^{-1/2}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|)^{1/2}. \end{aligned}$$

Toutes ces estimations réunies conduisent à (A.13) ce qui prouve (A.12). \square

Comme on l'a signalé dans la remarque 1.3.9 la condition iv) dans la définition 1.1.13 doit être légèrement affaiblie pour permettre l'obtention du principe d'absorption limite pour H . Le lemme suivant donne une hypothèse admissible qui remplacera celle sur le double commutateur B_2 .

Proposition A.3 Soit H défini par (1.3.1) avec A et V vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7). Alors pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} (H+i)^{-1} [M, \mathcal{A}] (H+i)^{-1} \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}), \quad (\text{A.14})$$

ce qui entraîne que

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z) [M, \mathcal{A}] G_\varepsilon(z) K_\varepsilon\| \leq c\varepsilon^{-2+\rho} (1 + \|F_\varepsilon(z)\|). \quad (\text{A.15})$$

Preuve Comme $\langle x \rangle^{\mp(1-\rho)/2} (H+i)^{-1} \langle x \rangle^{\pm(1-\rho)/2}$ est borné de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H}_2 (voir le lemme A.5) il suffit de montrer que $\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} [M, \mathcal{A}] \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2}$ est borné de \mathcal{H}_1 dans \mathcal{H}_{-1} . Si on décompose le commutateur de la manière suivante

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} [M, \mathcal{A}] \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} &= \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} (f(H)B_1[\mathcal{A}, f(H)] \\ &\quad + [\mathcal{A}, f(H)]B_1f(H) + f(H)[\mathcal{A}, B_1]f(H)) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \end{aligned}$$

comme $[\mathcal{A}, f(H)]$ est borné sur \mathcal{H} dans \mathcal{H}_2 , d'après le lemme A.6, il reste à montrer que

$$\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)[\mathcal{A}, B_1]f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \quad (\text{A.16})$$

est borné de \mathcal{H}_1 dans \mathcal{H}_{-1} . On utilise la décomposition $H = H_0 + \tilde{V}_L + \tilde{V}_S$, avec

$$\tilde{V}_L = 2iA_L(x)\nabla + i\operatorname{div}A_L(x) + |A_L(x)|^2 + V_L(x), \quad (\text{A.17})$$

$$\tilde{V}_S = -DA_S(x) - A_S(x)D + |A_S(x)|^2 + 2A_S(x)A_L(x) + V_S(x), \quad (\text{A.18})$$

de telle sorte que

$$i[[H, \mathcal{A}], \mathcal{A}] = 4H_0 + i[[\tilde{V}_L, \mathcal{A}], \mathcal{A}] + i[[\tilde{V}_S, \mathcal{A}], \mathcal{A}].$$

D'après (A.17) l'opérateur $i[[\tilde{V}_L, \mathcal{A}], \mathcal{A}] = \sum_{k=1}^d \tilde{a}_k(x)\partial_k + \tilde{v}(x)$ est un opérateur différentiel à coefficients réguliers vérifiant

$$|\partial^\alpha \tilde{a}_k(x)| + |\partial^\alpha \tilde{v}(x)| = O(\langle x \rangle^{-\rho-|\alpha|}).$$

En particulier l'opd $i[[\tilde{V}_L, \mathcal{A}], \mathcal{A}]$ est borné de \mathcal{H}_2 dans \mathcal{H}_1 , l'opérateur

$$\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)(4H_0 + i[[\tilde{V}_L, \mathcal{A}], \mathcal{A}])f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2}$$

est borné de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H}_2 . Il reste à estimer les termes à courte portée

$$\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H)[[\tilde{V}_S, \mathcal{A}], \mathcal{A}]f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2}. \quad (\text{A.19})$$

Pour ce terme on ne commute pas vraiment les opérateurs \mathcal{A} et \tilde{V}_S mais on décompose comme suit

$$[[\tilde{V}_S, \mathcal{A}], \mathcal{A}] = \tilde{V}_S \mathcal{A}^2 - 2\mathcal{A}\tilde{V}_S \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \tilde{V}_S. \quad (\text{A.20})$$

Comme d'après (A.18) l'opérateur $\langle x \rangle^a \tilde{V}_S \langle x \rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})$, $a + b - \rho_0 \leq 0$, pour montrer que (A.19) est borné de \mathcal{H} dans \mathcal{H}_{-1} il faut "sandwicher" \tilde{V}_S par des opérateurs bornés de \mathcal{H} dans \mathcal{H}_1 , à droite, et \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H} , à gauche. Pour cela on utilise les lemmes A.5 et A.7. Le terme symétrique est dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_1)$ si $1 + \rho \leq \rho_0$

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) \mathcal{A} \tilde{V}_S \mathcal{A} f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \\ &= \left(\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) \mathcal{A} \langle x \rangle^{-\rho_0/2} \right) \left(\langle x \rangle^{\rho_0/2} \tilde{V}_S \langle x \rangle^{\rho_0/2} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\langle x \rangle^{-\rho_0/2} \mathcal{A} f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \right) \end{aligned}$$

puisque les deux termes qui "sandwichent" $\langle x \rangle^{\rho_0/2} \tilde{V}_S \langle x \rangle^{\rho_0/2}$ sont alors dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_1)$. Pour les termes non-symétriques on écrit on décompose $\tilde{V}_S = -A_S D + Q$ et on remarque que $\langle x \rangle^a Q \langle x \rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{-1})$ si $a + b - \rho_0 \leq 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) Q \mathcal{A}^2 f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \\ &= \left(\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) \langle x \rangle^{(1-\rho)/2} \right) \left(\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} Q \langle x \rangle^{1+\rho_0/2} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\langle x \rangle^{-1-\rho_0/2} \mathcal{A}^2 f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \right) \end{aligned}$$

est bien borné de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H}_1 si $1 + \rho \leq \rho_0$. Le dernier terme est lui aussi borné de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H}_1 si $1 + \rho \leq \rho_0$, mais on doit pour l'estimer utiliser une décomposition plus astucieuse

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) A_S(x) D \mathcal{A}^2 f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \\ &= \left(\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) \langle x \rangle^{(1-\rho)/2} \right) \left(\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} A_S(x) \langle x \rangle^{1+\rho_0/2} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\langle x \rangle^{-1-\rho_0/2} D \mathcal{A} \langle x \rangle^{\rho_0/2} \right) \left(\langle x \rangle^{-\rho_0/2} \mathcal{A} f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \right). \end{aligned}$$

En effet ci-dessus l'opd $\langle x \rangle^{-1-\rho_0/2} D \mathcal{A} \langle x \rangle^{\rho_0/2}$ est bien borné de \mathcal{H}_2 dans \mathcal{H} et le terme contenant A_S est lui borné dans \mathcal{H} . De la même manière en posant $\tilde{V}_S = -D A_S + \tilde{Q}$ et en remarquant que $\langle x \rangle^a \tilde{Q} \langle x \rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ si $a + b - \rho_0 \leq 0$, $\langle x \rangle^{1+\rho/2} D \langle x \rangle^{-1-\rho/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{-1})$ et $\langle x \rangle^{1+\rho/2} A_S(x) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, on obtient que les termes

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) \mathcal{A}^2 \tilde{Q} f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \\ &= \left(\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) \mathcal{A}^2 \langle x \rangle^{-1-\rho_0/2} \right) \left(\langle x \rangle^{1+\rho_0/2} \tilde{Q} \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\langle x \rangle^{(1-\rho)/2} f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) \mathcal{A}^2 D A_S(x) f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \\ &= \left(\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} f(H) \mathcal{A}^2 \langle x \rangle^{-1-\rho_0/2} \right) \left(\langle x \rangle^{1+\rho/2} D \langle x \rangle^{-1-\rho/2} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\langle x \rangle^{1+\rho/2} A_S(x) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \right) \left(\langle x \rangle^{(1-\rho)/2} f(H) \langle x \rangle^{-(1-\rho)/2} \right). \end{aligned}$$

sont bornés de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H}_1 si $1 + \rho \leq \rho_0$. Au final l'opérateur (A.16) est bien borné de \mathcal{H} dans \mathcal{H} si $1 + \rho \leq \rho_0$ et (A.14) est bien vérifiée sous les hypothèses de la section 1.3.1. Maintenant d'après (A.12) et (A.14) on a

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)[M, \mathcal{A}]G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| &\leq \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H+i)^{-1}\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2}\| \\ &\quad \|\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2}(H+i)^{-1}[M, \mathcal{A}](H+i)^{-1}\langle x \rangle^{-(1-\rho)/2}\| \\ &\quad \|\langle x \rangle^{(1-\rho)/2}(H+i)G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| \\ &\leq c\varepsilon^{-2+\rho}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|), \end{aligned}$$

ce qui prouve (A.15). \square

On peut maintenant démontrer le principe d'absorption limite sous des hypothèses minimales.

Théorème A.4 *Soit H défini par (1.3.1) avec A et V vérifiant les hypothèses (1.3.2) à (1.3.7). Alors pour tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0 on a l'estimation*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in \Lambda \\ 1 \geq |\operatorname{Im} z| > 0}} \|\langle x \rangle^{-p} R(z) \langle x \rangle^{-p}\| \leq c, \quad p > 1/2. \quad (\text{A.21})$$

En particulier l'opérateur $\langle x \rangle^{-p}$, $p > 1/2$, est H -lisse sur tout intervalle $\Lambda \subset (0, \infty)$ disjoint de 0.

Preuve D'après le lemme 1.1.18 il suffit de vérifier l'hypothèse (1.1.28) pour $F_\varepsilon(z)$ définie par (A.5). L'estimation a priori $\|F_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon^{-1}$ découle directement de (A.9). Il faut maintenant vérifier l'estimation sur la dérivée $dF_\varepsilon(z)/d\varepsilon$. Pour cela on calcule cette dérivée

$$\frac{dF_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} = \frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon} G_\varepsilon(z) K_\varepsilon + K_\varepsilon G_\varepsilon(z) \frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon} + K_\varepsilon \frac{dG_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} K_\varepsilon.$$

les deux premiers termes s'estiment directement par (A.11) et (A.12)

$$\left\| \frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon} \right\| (\|G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| + \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)\|) \leq c\varepsilon^{\sigma-1}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|).$$

Pour le troisième terme il faut d'abord calculer $dG_\varepsilon(z)/d\varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{dG_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} &= iG_\varepsilon(z)MG_\varepsilon(z) \\ &= iG_\varepsilon(z)(f(H) - Id)B_1f(H)G_\varepsilon(z) + iG_\varepsilon(z)B_1(f(H) - Id)G_\varepsilon(z) \\ &\quad - [\mathcal{A}, G_\varepsilon(z)] - i\varepsilon G_\varepsilon(z)[M, \mathcal{A}]G_\varepsilon(z). \end{aligned}$$

D'après (A.3), (A.8), (A.11) et (A.12) on a que

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(f(H) - Id)B_1f(H)G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| &\leq \|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(f(H) - Id)\| \|B_1(H+i)^{-1}\| \\ &\quad \|(H+i)G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| \\ &\leq c\varepsilon^{-1/2}(1 + \|F_\varepsilon(z)\|), \end{aligned}$$

et de même pour $\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z) B_1(f(H) - Id) G_\varepsilon(z) K_\varepsilon\|$. D'après (A.11), (A.12) et (1.3.9)

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon[\mathcal{A}, G_\varepsilon(z)] K_\varepsilon\| &\leq 2\|K_\varepsilon \langle x \rangle\| \| \langle x \rangle^{-1} \mathcal{A}(H+i)^{-1} \| \| (H+i) G_\varepsilon(z) K_\varepsilon \| \\ &\leq c\varepsilon^{\sigma-1} (1 + \|F_\varepsilon(z)\|). \end{aligned}$$

Enfin en tenant compte de la proposition A.3 et de toutes les estimations précédentes on obtient que

$$\left\| K_\varepsilon \frac{dG_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} K_\varepsilon \right\| \leq c\varepsilon^{-a} (1 + \|F_\varepsilon(z)\|),$$

et en conséquence

$$\left\| \frac{dF_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} \right\| \leq c\varepsilon^{-a} (1 + \|F_\varepsilon(z)\|),$$

pour un $a = \max\{1/2, 1 - \sigma, 1 - \rho\} \in (0, 1)$. Le lemme 1.1.18 conduit donc à l'estimation $\|F_\varepsilon(z)\| \leq C$ uniforme en z et en ε . En particulier pour $\varepsilon = 0$ on récupère (A.21). \square

On termine par la démonstration de quelques lemmes utilisés dans certaines preuves. Ces lemmes reposent sur le théorème de Stone-Weierstrass selon une méthode bien connue (cf. [CFKS87]).

Lemme A.5 *Soient $f \in C^0(\mathbb{R})$, telle que $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} f(\tau) = 0$, et $g \in C^2(\mathbb{R}^d)$ telle que ses dérivées soient uniformément bornées sur \mathbb{R}^d jusqu'à l'ordre 2. Alors on a que $[g(x), f(H)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_2)$. En particulier $\langle x \rangle^r f(H) \langle x \rangle^{-r} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_2)$, pour tout $r \in [-1, 1]$.*

Preuve D'après (1.3.26) on a

$$[g(x), H] = [g(x), (D - A)^2] = -2\nabla g(x)\nabla - \Delta g(x) + iA(x)\nabla g(x), \quad (\text{A.22})$$

qui montre que $[g(x), H] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$. Pour $f(H) = R(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on en déduit que $[g(x), R(z)] = R(z)[H, g(x)]R(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_2)$. Maintenant on désigne par \mathcal{E} l'algèbre de fonctions engendrée par

$$\{f(\tau) = (\tau - z)^{-1} \in C^0(\mathbb{R}_+) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}.$$

Une simple modification du théorème de Stone-Weierstrass montre que cette algèbre est dense dans l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini, ce qui conclue la preuve.

La fonction $\langle x \rangle^r$, $r \in [0, 1]$, satisfait aux hypothèses de la première partie du lemme ce qui permet d'écrire que

$$\langle x \rangle^r f(H) \langle x \rangle^{-r} = f(H) + [\langle x \rangle^r, f(H)] \langle x \rangle^{-r}$$

qui est bien une somme d'opérateurs bornés. Pour $\langle x \rangle^{-r} f(H) \langle x \rangle^r$ on procède de la même manière. \square

Lemme A.6 Soit \mathcal{A} le générateur des dilatations défini par (1.3.9). Alors pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} f(\tau) = 0$ on a $[\mathcal{A}, f(H)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2)$.

Preuve D'après la proposition 1.3.4 l'opérateur $[\mathcal{A}, H] = iB_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H})$ ce qui conduit à $[\mathcal{A}, R(z)] = R(z)[H, \mathcal{A}]R(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2)$. On conclut par densité comme dans le lemme A.5. \square

Lemme A.7 Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} f(\tau) = 0$, alors pour $a \in [-1, 0]$ on a

$$\langle x \rangle^b \mathcal{A} f(H) \langle x \rangle^a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_1), \quad \langle x \rangle^a f(H) \mathcal{A} \langle x \rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_1),$$

si $a + b + 1 \leq 0$ et

$$\langle x \rangle^b \mathcal{A}^2 f(H) \langle x \rangle^a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}), \quad \langle x \rangle^a f(H) \mathcal{A}^2 \langle x \rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1),$$

$$\langle x \rangle^a f(H) \mathcal{A}^2 \langle x \rangle^b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H})$$

si $a + b + 2 \leq 0$.

Preuve D'après le lemme A.5 l'opérateur $\langle x \rangle^{-a} f(H) \langle x \rangle^a$ est borné de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H}_2 . L'opd $\langle x \rangle^a \mathcal{A}^k \langle x \rangle^b$ est borné de \mathcal{H}_j dans \mathcal{H}_{j-k} pour tout $j \in \mathbb{N}$ si $a + b + k \leq 0$. Au final l'opérateur

$$\langle x \rangle^b \mathcal{A}^k f(H) \langle x \rangle^a = \langle x \rangle^b \mathcal{A} \langle x \rangle^a \langle x \rangle^{-a} f(H) \langle x \rangle^a,$$

est borné de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H}_{2-k} . Par dualité on récupère la continuité des deux autres opérateurs. La dernière égalité demande encore un peu de travail. On décompose de la manière suivante

$$\langle x \rangle^a f(H) \mathcal{A}^2 \langle x \rangle^b = \langle x \rangle^a \mathcal{A} f(H) \mathcal{A} \langle x \rangle^b + \langle x \rangle^a [f(H), \mathcal{A}] \mathcal{A} \langle x \rangle^b.$$

En remarquant que l'opd $\langle x \rangle^r \mathcal{A} \langle x \rangle^{r'}$ est borné de \mathcal{H}_j dans $\mathcal{H}_{j-1} \forall j \in \mathbb{Z}$ si $r + r' + 1 \leq 0$, le premier terme s'estime grâce au lemme A.5

$$\langle x \rangle^a \mathcal{A} f(H) \mathcal{A} \langle x \rangle^b = (\langle x \rangle^a \mathcal{A} \langle x \rangle^{-1-a}) (\langle x \rangle^{1+a} f(H) \langle x \rangle^{-1-a}) (\langle x \rangle^{1+a} \mathcal{A} \langle x \rangle^b)$$

et est borné de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H} dès que $a + b + 2 \leq 0$ et $|1 + a| \leq 1$. Il reste à estimer le terme

$$\langle x \rangle^a [f(H), \mathcal{A}] \mathcal{A} \langle x \rangle^b = \langle x \rangle^a [f(H), \mathcal{A}] \langle x \rangle^{-a-1} (\langle x \rangle^{a+1} \mathcal{A} \langle x \rangle^b)$$

qui est borné de \mathcal{H}_{-1} dans \mathcal{H} dès que $a + b + 2 \leq 0$ et $1 + a \geq 0$ et $a \leq 0$ grâce au lemme A.6. \square

Lemme A.8 Si $H - H_0$ est H_0 -compact alors pour toute fonction $f \in C_0^0(\mathbb{R}_+)$ l'opérateur $f(H) - f(H_0)$ est compact.

Preuve Comme pour le lemme A.5 on vérifie que pour des fonctions de la forme $f(\tau) = (\tau - z)^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on a

$$f(H) - f(H_0) = R(z) - R_0(z) = -R(z)(H - H_0)R_0(z),$$

qui est bien compact. Cette propriété est donc vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ et par densité pour tout $f \in C_0^0(\mathbb{R}_+)$. \square

Notations

- $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$, $\hat{x} = x/|x|$ pour $|x| \neq 0$
- $D = -i\nabla_x$, $D_k = -i\partial_{x_k} = -i\partial/\partial x_k$
- \mathbb{S}^{d-1} sphère unité de l'espace \mathbb{R}^d , \mathbb{S}_k^{d-1} sphère de rayon k
- \mathbb{T} ensemble des nombres complexes de module 1
- $\Gamma_{\pm}(\theta, a) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d} : \pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \geq \theta, |x| \geq a, |\xi| \geq a\}$ (cf. Figure 1.2)
- $\mathcal{F}f = \hat{f}$ transformée de Fourier de f , cf.(1.2.1)
- $\mathcal{M}f = f^{\sharp}$ transformée de Mellin de f , cf. (1.3.45)
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ classe de Schwartz des fonction $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à décroissance rapide
- $C_0^\infty(\Omega)$ classe des fonction C^∞ à support compact dans l'ouvert Ω
- $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$: espace de Banach des opérateurs bornés de \mathcal{H} dans \mathcal{H}'
- $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_p$, $p \in [1, \infty]$, classes de Schatten d'opérateurs compact sur \mathcal{H}
- $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ classe des fonctions essentiellement bornées sur \mathbb{R}^d
- $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ classe des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R}^d
- $\|\cdot\|$ norme hilbertienne sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ou norme uniforme sur $\mathcal{B}(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d), \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d))$
- $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$: espace de Sobolev
- $\tilde{\mathbf{A}}$ opérateur pseudodifférentiel défini par une amplitude en représentation de moment, cf. (1.2.14)
- $A(\lambda) : \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ valeur diagonales, dans la représentation spectrale associé à $-\Delta$, de l'opérateur A ou aussi restriction de l'opérateur $\tilde{\mathbf{A}} = \mathcal{F}A\mathcal{F}^*$ à la sphère de rayon $\lambda^{1/2}$, cf. section 1.2.3
- $A^\varkappa(\lambda) : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{d-1})$ représentation de l'opérateur $A(\lambda)$ dans la carte locale décrite par le difféomorphisme $\varkappa : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$, cf. Proposition 1.2.26 et Figure 1.1
- a^b symbole principal de l'opd A de la classe $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^m(T^*\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \geq \varrho > \delta \geq 0$ définit modulo $\mathcal{S}_{\varrho, \delta}^{m-\varrho+\delta}(T^*\mathbb{S}^{d-1})$

Bibliographie

- [AB59] Y. Aharonov et D. Bohm. *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*. Phys. Rev. (2), **115**, 1959, pp. 485–491.
- [AB61] Y. Aharonov et D. Bohm. *Further considerations on electromagnetic potentials in the quantum theory*. Phys. Rev. (2), **123**, 1961, pp. 1511–1524.
- [AB63] Y. Aharonov et D. Bohm. *Further discussion of the role of electromagnetic potentials in the quantum theory*. Phys. Rev. (2), **130**, 1963, pp. 1625–1632.
- [ABdMG96] Werner O. Amrein, Anne Boutet de Monvel et Vladimir Georgescu. *C_0 -groups, commutator methods and spectral theory of N -body Hamiltonians*. Basel, Birkhäuser Verlag, 1996, xiv+460p.
- [AT98] R. Adami et A. Teta. *On the Aharonov-Bohm Hamiltonian*. Lett. Math. Phys., **43**, n° 1, 1998, pp. 43–53.
- [BM70] V. S. Buslaev et V. B. Matveev. *Wave operators for the Schrödinger equation with slowly decreasing potential*. Teoret. Mat. Fiz., **2**, n° 3, 1970, pp. 367–376.
- [BR01] J. M. Bily et D. Robert. *The Semi-classical Van-Vleck Formula. Application to the Aharonov-Bohm effect*. Preprint, 2001. Disponible à l'adresse http://mpej.unige.ch/mp_arc/index.html.
- [CFKS87] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch et B. Simon. *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Berlin, Springer-Verlag, 1987, study édition, x+319p.
- [Cha60] R.G. Chambers. Phys. Rev. (2), **115**, 1960, pp. 3–5.
- [Coo57] J. M. Cook. *Convergence to the Møller wave-matrix*. J. Math. Phys., **36**, 1957, pp. 82–87.
- [CV71] Alberto-P. Calderón et Rémi Vaillancourt. *On the boundedness of pseudo-differential operators*. J. Math. Soc. Japan, **23**, 1971, pp. 374–378.
- [CV72] Alberto-P. Calderón et Rémi Vaillancourt. *A class of bounded pseudo-differential operators*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **69**, 1972, pp. 1185–1187.

- [DG97] Jan Dereziński et Christian Gérard. *Scattering theory of classical and quantum N -particle systems*. Berlin, Springer-Verlag, 1997, xii+444p.
- [Dol64] John D. Dollard. *Asymptotic convergence and the Coulomb interaction*. J. Mathematical Phys., **5**, 1964, pp. 729–738.
- [DŠ98] L. Dąbrowski et P. Šťovíček. *Aharonov-Bohm effect with δ -type interaction*. J. Math. Phys., **39**, n° 1, 1998, pp. 47–62.
- [Ens89] V. Enss. *Long-range scattering of two and three body systems*. Actes des journées équations aux dérivées partielles, Saint-Jean de Mont, **21**, 1989, pp. 1–31.
- [ES49] W. Ehrenberg et R. W. Siday. PROC. PHYS. SOC. London B, **62**, 1949, pp. 8–21.
- [GG99] V. Georgescu et C. Gérard. *On the virial theorem in quantum mechanics*. Comm. Math. Phys., **208**, n° 2, 1999, pp. 275–281.
- [GY00] Y. Gâtel et D. R. Yafaev. *Scattering theory for the Dirac operator with a long-range electromagnetic potential*. Preprint, 2000. Disponible à l'adresse http://mpej.unige.ch/mp_arc/index.html.
- [Hen80] Walter C. Henneberger. *Some aspects of the Aharonov-Bohm effect*. Phys. Rev. A (3), **22**, n° 4, 1980, pp. 1383–1388.
- [Hör76] Lars Hörmander. *The existence of wave operators in scattering theory*. Math. Z., **146**, n° 1, 1976, pp. 69–91.
- [Hör83] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*. Berlin, Springer-Verlag, 1983, viii+391p. Distribution and Fourier analysis.
- [Hör85] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III*. Berlin, Springer-Verlag, 1985, viii+525p. Pseudodifferential operators.
- [IK84] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *Microlocal resolvent estimates for 2-body Schrödinger operators*. J. Funct. Anal., **57**, n° 3, 1984, pp. 270–300.
- [IK85a] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *Modified wave operators with time-independent modifiers*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **32**, n° 1, 1985, pp. 77–104.
- [IK85b] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *A remark on the microlocal resolvent estimates for two body Schrödinger operators*. Publ. Res. Inst. Math. Sci., **21**, n° 5, 1985, pp. 889–910.
- [IK86] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *Scattering matrices for two-body Schrödinger operators*. Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo, **35**, n° 2, 1986, pp. 81–107.

- [IU71] Teruo Ikebe et Jun Uchiyama. *On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operators*. J. Math. Kyoto Univ., **11**, 1971, pp. 425–448.
- [Jen85] Arne Jensen. *Propagation estimates for Schrödinger-type operators*. Trans. Amer. Math. Soc., **291**, n° 1, 1985, pp. 129–144.
- [JMP84] Arne Jensen, Éric Mourre et Peter Perry. *Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **41**, n° 2, 1984, pp. 207–225.
- [JP85] Arne Jensen et Peter Perry. *Commutator methods and Besov space estimates for Schrödinger operators*. J. Operator Theory, **14**, n° 1, 1985, pp. 181–188.
- [Kat59] Tosio Kato. *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient*. Comm. Pure Appl. Math., **12**, 1959, pp. 403–425.
- [KI66] Tosio Kato et Teruo Ikebe. *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators*. Sûgaku, **18**, 1966, pp. 33–39.
- [Lav71] Richard B. Lavine. *Commutators and scattering theory. I. Repulsive interactions*. Comm. Math. Phys., **20**, 1971, pp. 301–323.
- [Lav72] Richard B. Lavine. *Commutators and scattering theory. II. A class of one body problems*. Indiana Univ. Math. J., **21**, 1971/72, pp. 643–656.
- [LL64] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Physique théorique, Tome 1 Mécanique*. 1964, quatrième édition, 242p. Traduit du Russe par C. Ligny (1982), Éditions Mir, Moscou.
- [LL66] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Physique théorique, Tome 3 Mécanique Quantique*. 1966, troisième édition, 766p. Traduit du Russe par E. Gloukhian (1975), Éditions Mir, Moscou.
- [LT87] Michael Loss et Bernd Thaller. *Scattering of particles by long-range magnetic fields*. Ann. Physics, **176**, n° 1, 1987, pp. 159–180.
- [LY98] N. Lerner et D. R. Yafaev. *Trace theorems for pseudo-differential operators*. J. Anal. Math., **74**, 1998, pp. 113–164.
- [Mou83] E. Mourre. *Opérateurs conjugués et propriétés de propagation*. Comm. Math. Phys., **91**, n° 2, 1983, pp. 279–300.
- [Mou81] E. Mourre. *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*. Comm. Math. Phys., **78**, n° 3, 1980/81, pp. 391–408.
- [Nic91] François Nicoleau. *Théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence de champ magnétique*. Thèse, 1991.

- [Nic94] François Nicoleau. *Matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **61**, n° 3, 1994, pp. 329–346.
- [NR91] François Nicoleau et Didier Robert. *Théorie de la diffusion quantique pour des perturbations à longue et courte portée du champ magnétique.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5), **12**, n° 2, 1991, pp. 185–194.
- [Per80] Peter A. Perry. *Mellin transforms and scattering theory. I. Short range potentials.* Duke Math. J., **47**, n° 1, 1980, pp. 187–193.
- [Per81] Peter A. Perry. *Propagation of states in dilation analytic potentials and asymptotic completeness.* Comm. Math. Phys., **81**, n° 2, 1981, pp. 243–259.
- [PSS81] P. Perry, I. M. Sigal et B. Simon. *Spectral analysis of N -body Schrödinger operators.* Ann. of Math. (2), **114**, n° 3, 1981, pp. 519–567.
- [Rui83] S. N. M. Ruijsenaars. *The Aharonov-Bohm effect and scattering theory.* Ann. Physics, **146**, n° 1, 1983, pp. 1–34.
- [Shu87] M. A. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory.* Berlin, Springer-Verlag, 1987, x+278p. Traduit du Russe par Stig I. Andersson.
- [Tay81] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential operators.* Princeton, N.J., Princeton University Press, 1981, xi+452p.
- [Uch87] Jun Uchiyama. *Polynomial growth or decay of eigenfunctions of second-order elliptic operators.* Publ. Res. Inst. Math. Sci., **23**, n° 6, 1987, pp. 975–1006.
- [Uhl82] Karen K. Uhlenbeck. *Removable singularities in Yang-Mills fields.* Comm. Math. Phys., **83**, n° 1, 1982, pp. 11–29.
- [Yaf80] D. R. Yafaev. *Wave operators for the Schrödinger equation.* Teoret. Mat. Fiz., **45**, n° 2, 1980, pp. 224–234.
- [Yaf85] D. R. Yafaev. *Remarks on the spectral theory for the multiparticle-type Schroedinger operator.* J. Sov. Math., **31**, 1985, pp. 3445–3459. Traductions de Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova (Russe).
- [Yaf92] D. R. Yafaev. *Mathematical scattering theory.* Providence, RI, American Mathematical Society, 1992, x+341p. General theory, Traduit du Russe par J. R. Schulenberger.
- [Yaf93] D. R. Yafaev. *Radiation conditions and scattering theory for N -particle Hamiltonians.* Comm. Math. Phys., **154**, n° 3, 1993, pp. 523–554.
- [Yaf95] D. R. Yafaev. *Resolvent estimates and scattering matrix for N -particle Hamiltonians.* Integral Equations Operator Theory, **21**, n° 1, 1995, pp. 93–126.

- [Yaf97] D. R. Yafaev. *On the classical and quantum Coulomb scattering*. J. Phys. A, **30**, n° 19, 1997, pp. 6981–6992.
- [Yaf98] D. R. Yafaev. *The scattering amplitude for the Schrödinger equation with a long-range potential*. Comm. Math. Phys., **191**, n° 1, 1998, pp. 183–218.
- [Yaf00a] D. R. Yafaev. *A class of pseudodifferential operators with oscillating symbols*. St. Petersburg Math. J., **11**, n° 2, 2000, pp. 375–403.
- [Yaf00b] Dmitri Yafaev. *Scattering theory : some old and new problems*. Berlin, Springer-Verlag, 2000, xvi+169p.

Résumé. La théorie de la diffusion admet différentes formulations qui se répartissent en deux familles : l'une dépendante du temps l'autre stationnaire. La première approche, reposant sur l'existence de limites en grand temps de certaines observables, et la seconde, qui s'appuie sur des estimations de résolvantes, sont essentiellement équivalentes cependant l'approche stationnaire permet d'obtenir une formule de représentation pour l'objet principal de la théorie : la matrice de diffusion.

Dans cette thèse on développe la théorie des perturbations lisses pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel électromagnétique à longue portée. Après avoir obtenues certaines estimations pour la résolvante (principe d'absorption limite, estimation de radiation et estimations de propagation microlocales) on construit des opérateurs d'onde modifiés de type Isozaki-Kitada et l'on obtient une formule de représentation stationnaire pour la matrice de diffusion. On rencontre de nombreux problèmes liés aux opérateurs pseudo-différentiel utilisés que l'on résout en utilisant des classes de symboles oscillants pour lesquelles un calcul pseudo-différentiel non-standard a été développé.

Au final on obtient sans hypothèses de jauge sur le potentiel magnétique la complétude des opérateurs d'onde modifiés et leur coïncidence avec d'autres constructions dépendant du temps. Pour la matrice de diffusion on montre que en général son spectre recouvre le cercle unité. Parmi les exceptions à cette règle on trouve le cas des champs magnétiques à support compact. L'approche développée dans cette thèse permet de généraliser les propriétés spécifiques de la matrice de diffusion, connues sous le nom d'effet Aharonov-Bohm, à une large classe de tels potentiels.

Mots clés. théorie de la diffusion, opérateur de Schrödinger, potentiels à longue portée, matrice de diffusion, effet Aharonov-Bohm.

Abstract. Scattering theory admits different formulations divided in two families : one time dependent and the other stationary. The first approach, based on the existence of large time limits of certain observables, and the second, supported by some resolvent estimates, are essentially equivalent however the stationary approach gives a stationary representation formula for the most important object of the theory : the scattering matrix.

In this thesis we show that the Schrödinger operator with a long-range electromagnetic potential fits into the scheme of smooth scattering . After having proved some resolvent estimates (limiting absorption principle, radiation estimates, microlocal propagations estimates) we construct modified wave operators of the Isozaki-Kitada type and get a stationary representation formula for the scattering matrix. Some difficulties arise with the pseudodifferential calculus which are solved by using non-standard classes of pseudodifferential operators with oscillating symbols.

Finally we obtain the asymptotic completeness, without any gauge assumptions on the magnetic potential, of the wave operators and their coincidence with others time-dependent constructions. For the scattering matrix we prove that, in general, its spectrum covers the unit circle. Among the exceptions to this rule the case of compactly supported magnetic fields is studied. The approach developed allows us to generalize some special properties of the scattering matrix, known as the Aharonov-Bohm effect, to a large class of such potentials.

Key words. scattering theory, Schrödinger operator, long-range potentials, scattering matrix, Aharonov-Bohm effect.

MSC : 35P25, 35S99, 81U05, 81U20

PACS : 03.65.N, 11.55, 72.15.R