

Le théorème de la phase stationnaire

Roux Ph.

rouxph@maths.univ-rennes1.fr

Table des matières

1	Le théorème de la phase stationnaire	1
2	Optique géométrique	5
3	Théorie de la diffusion	8

Introduction

le théorème de la phase stationnaire est un outils essentiel en analyse asymptotique, par exemple dans l'étude du devenir en grands temps de solutions d'une équations aux dérivées partielles d'évolution. Ces équations se rencontrent fréquemment en physique mathématique et produisent des exemples de phénomènes non-triviaux décrits par la méthode de la phase stationnaire.

1 Le théorème de la phase stationnaire

On se propose d'étudier des intégrales de la forme :

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi(x)} a(x) dx \quad (1)$$

sous les hypothèses :

$$a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \quad (2)$$

pour $t \rightarrow +\infty$. L'exemple de base de ce type d'intégrales est donné par la transformation de Fourier :

$$I(t) = \widehat{a}(t\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\langle\omega, x\rangle} a(x) dx \quad \omega \in \mathbb{S}^{d-1} \quad (3)$$

dans ce cas on sait que $\widehat{a}$ appartient à la classe de Schwarz, en d'autre termes on a :

$$I(t) = \widehat{a}(t\omega) = O(t^{-n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Un autre exemple important est donné par les intégrales de Frenel :

$$I_{\pm}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\pm it \frac{x^2}{2}} a(x) dx \quad (4)$$

Une simple transformation de cette intégrale permet de la mettre sous la forme :

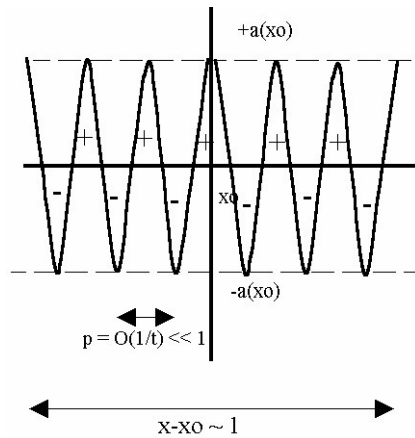
$$I_{\pm}(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mp i \frac{\xi^2}{2t}} \widehat{a}(-\xi) d\xi$$

en particulier quand $t \rightarrow \pm\infty$ on obtient :

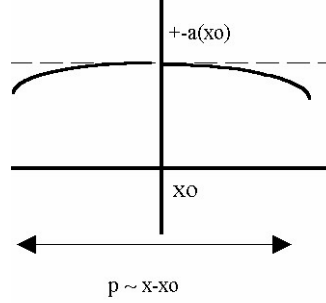
$$I_{\pm}(t) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} a(0).$$

Si l'on considère le développement de Taylor de φ dans (1) les deux exemples se distinguent de manière très simple : pour la transformation de Fourier $\varphi'(x) = \omega \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ alors que pour les intégrales de Frenel il existe un unique point ($x = 0$) pour lequel la phase φ "stationne". On peut de manière intuitive généraliser le résultat en supposant que le support de a est localisé autour du point x_0 :

- **1^{er} cas** : $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$, dans ce cas le terme $it\varphi(x) \approx it\varphi(x_0) + it \langle \nabla\varphi(x_0), (x - x_0) \rangle$ génère une oscillation de période spatiale $p \approx \frac{2\pi}{t\|\nabla\varphi(x_0)\|} \ll (x - x_0)$ quand $t \rightarrow \infty$, de sorte que $I(t) \sim 0$.



- **2nd cas :** $\nabla\varphi(x) = 0$ a une **unique solution** x_0 , cette fois-ci les oscillations générées par $it\varphi(x) \approx it\varphi(x_0) + it\text{Hess}\varphi(x_0)(x - x_0, x - x_0)$ garde une période spatiale assez grande pour engendrer un terme faiblement décroissant du même type que celui des intégrales de Frenel.



On peut donc écrire les théorèmes :

Théorème 1.1 Si $\nabla\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{supp}(a)$ alors $I(t) = O(t^{-n})$ quand $t \rightarrow +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.2 Si sur le support de a φ possède un unique point stationnaire qui est non-dégénéré :

$$\exists !x_0 \in \text{supp}(a) \text{ tel que } \nabla\varphi(x_0) = 0, \text{ il vérifie } \det(\text{Hess}\varphi(x_0)) \neq 0 \quad (5)$$

alors l'asymptotique de I est donnée par :

$$I(t) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{d/2} \frac{e^{it\varphi(x_0)}}{\sqrt{|\det(\text{Hess}\varphi(x_0))|}} e^{i\sigma\pi/4} a(x_0) + O(t^{-d/2-1}). \quad (6)$$

où σ est la signature de $\text{Hess}\varphi(x_0)$.

preuve

Dans le théorème 1.1 cas on peut considérer que $|\partial_j\varphi(x)| \geq c > 0$ sur le support de a quitte à découper celui-ci avec une identité approchée. La première estimation résulte alors d'une simple intégration par partie :

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{it\partial_j\varphi(x)}{it\partial_j\varphi(x)} e^{it\varphi(x)} a(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi(x)} i\partial_j \frac{a(x)}{t\partial_j\varphi(x)} dx = O(t^{-1}) \\ &= \dots = O(t^{-n}) \end{aligned}$$

en réitérant n fois l'intégration par parties. Grâce à ce résultat il ne reste plus pour prouver le théorème 1.2 qu'à considérer le cas où a est supporté au voisinage du point

stationnaire x_0 . L'hypothèse (5) permet d'affirmer l'existence d'un difféomorphisme qui ramène l'équation (1) au cas des intégrales de Frenel :

$$\exists \Theta : V(x_0) \longrightarrow V(0) \text{ tel que } \varphi(\Theta(x)) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2} \text{Hess} \varphi(x_0)(x, x)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{V(x_0)} e^{it\varphi(x)} a(x) dx + O(t^{-n}) \\ &= e^{it\varphi(x_0)} \int_{V(0)} e^{it\frac{1}{2} \text{Hess} \varphi(x_0)(x, x)} \tilde{a}(x) dx + O(t^{-n}) \end{aligned}$$

où $\tilde{a}(x) = a(\Theta(x))J\Theta(x)$, en particulier $\tilde{a}(0) = a(0)$. Quitte à effectuer un nouveau changement de variable (linéaire) pour diagonaliser $\text{Hess} \varphi(x_0)$ On est ramené au calcul des intégrales de Frenel, en notant $(\lambda_j)_{j=1\dots d}$ les valeurs propres du Hessian on a :

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{it\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \lambda_j |x_j|^2} \tilde{a}(x) dx + O(t^{-n}) \\ &= e^{it\varphi(x_0)} \prod_{j=1}^d \left(\sqrt{\frac{2\pi}{t|\lambda_j|}} e^{i \text{sgn}(\lambda_j) \frac{\pi}{4}} \right) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \sum_{j=1}^d \frac{1}{2t\lambda_j} |\xi_j|^2} \widehat{\tilde{a}}(\xi) d\xi + O(t^{-n}) \\ &= e^{it\varphi(x_0)} \left(\frac{2\pi}{t} \right)^{d/2} \frac{e^{i\sigma\pi/4}}{\sqrt{|\det(\text{Hess} \varphi(x_0))|}} \tilde{a}(0) + O(t^{-1}) \end{aligned}$$

□

remarque :

- i) si on a plusieurs points isolé non dégénérés pour φ alors l'asymptotique de I est par la somme des contributions de chaque point stationnaire de φ .
- ii) Dans le reste $O(t^{-d/2-1}) \leq Ct^{-d/2-1}$ la constante dépend uniquement de la valeur de a au point stationnaire x_0 : $C \leq C' \|a\|_{\mathbb{L}^\infty(V)}$ ou V est un voisinage de x_0 .
- iii) Si a ou ses dérivées s'annulent au point stationnaire x_0 on obtient une asymptotique meilleure : $a^{(\alpha)}(x_0) \quad \forall |\alpha| < 2k$ alors $I(t) = O(t^{-d/2-k})$.
- iv) Si $\varphi(x) = \varphi(x, \alpha)$ et que l'on a des estimations uniformes en le paramètre α (par exemple s'il varie dans un compact) de $\varphi(x, \alpha)$ et $a(x_0(\alpha))$ alors on a encore l'asymptotique (6) uniforme en α . En particulier on peut considérer le cas $\alpha = T^{-\varepsilon} \quad \varepsilon > 0$.

2 Optique géométrique

On va désormais s'intéresser à l'équation des Ondes avec des données oscillantes :

$$\begin{cases} (\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta) u = 0 \\ u(t, x)|_{t=0} = u_0(x) = v(x)e^{i\varphi(x)/\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \partial_t u(t, x)|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

et l'on cherche à décrire la solution pour de hautes fréquence des oscillations soit $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour cela on va écrire la solution de (7) sous forme intégrale en appliquant une transformation de Fourier spatiale à l'équation :

$$\begin{cases} (\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - |\xi|^2) \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(t, \xi)|_{t=0} = \hat{u}_0(\xi) \quad \partial_t \hat{u}(t, \xi)|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire (à ξ fixé) est :

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(ct|\xi|)\hat{u}_0(\xi)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2i} \sum_{\pm} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(<\xi, x-y> \pm ct|\xi| + \varphi(y)/\varepsilon)} v(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi)^d} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{\pm} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(<\xi, x-y> \pm ct|\xi| + \varphi(y))/\varepsilon} v(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi\varepsilon)^d}. \end{aligned} \quad (9)$$

L'asymptotique de la solution peut donc être décrit par la méthode de la phase stationnaire, en particulier on est amené à étudier les points stationnaires de la phase :

$$\psi_{\pm}(t, x, y, \xi) = <\xi, x-y> \pm ct|\xi| + \varphi(y) \quad (10)$$

définis par :

$$\nabla \psi_{\pm}(t, x, y, \xi) = \begin{pmatrix} \nabla \varphi(y) - \xi \\ x - y \pm ct\hat{\xi} \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

Il est facile de voir que aux points stationnaires on a :

$$\psi_{\pm}(t, x, y_0, \xi_0) = \varphi(y_0)$$

de sorte que l'équation (7) "transporte" la donnée initiale le long de trajectoires définies par l'équation (11) $y_0 = y(t, x) = x \mp ct\hat{\xi}$ à une vitesse bien déterminée : c . Le cas le plus simple décrit par cette équation est celui de la propagation de la lumière. Par analogie les trajectoires $y_0 = y(t, x)$ sont appelées rayons. D'autre part on trouve pour la Hessienne :

$$Hess\psi_{\pm}(t, x, y_0, \xi_0) = \begin{pmatrix} Hess\varphi(y) & -Id \\ -Id & \pm \frac{ct}{|\xi|} (Id - \hat{\xi} \otimes \hat{\xi}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

où $\eta \otimes \eta$ est la matrice d'éléments $\eta_j \eta_i$. Quitte à changer de base on peut toujours supposer que $\xi = (|\xi|, 0, \dots, 0)$ et dans ce cas :

$$Id - \widehat{\xi} \otimes \widehat{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $t = 0$ on a : $\det(Hess\psi_{\pm}(0, x, y_0, \xi_0)) = -1$, pour t petit ce déterminant reste de signe constant, donc aucune valeur propre ne change de signe et la signature reste constante. On va sur deux exemple examiner les principaux phénomènes décrits par la méthode de la phase stationnaire.

exemple 1 : $\varphi(y) = \langle k, y \rangle$ où $k \in \mathbb{R}^d$. On obtient directement en examinant (11) que

$$\nabla\varphi(y_0) = \xi_0 = C^{ste} = k \quad y_0 = x \pm ct\widehat{k}$$

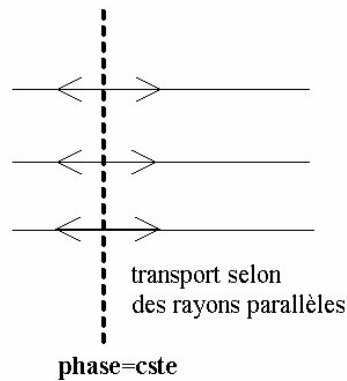
de plus $Hess\varphi(y) = 0$ donc $\det(Hess\psi_{\pm}(t, x, y_0, \xi_0)) = -1$ et $\sigma = 0$ signature de $Hess\psi_{\pm}(0, x, y_0, \xi_0)$ qui reste constante. On peut donc écrire :

$$u(t, x) = \frac{1}{2i} \sum_{\pm} e^{i\varphi(x \pm ct\widehat{k})/\varepsilon} v(x \pm ct\widehat{k}) + O(\varepsilon) \quad (13)$$

qui exprime bien le transport de la donnée initiale le long de droites parallèles. De tels résultats peuvent être obtenus en cherchant la solution u de (7) sous la forme d'une série formelle en ε :

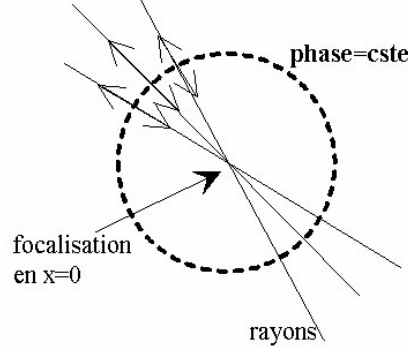
$$u(t, x) = e^{iS(t, x)/\varepsilon} \sum_{n \geq 0} u_n \varepsilon^n \quad (14)$$

que l'on injecte dans l'équation (7). Les solutions ainsi obtenues sont appelées solutions BKW.



cas d'une phase plane

exemple 2 : $\varphi(y) = \frac{y^2}{2}$, dans ce cas $\nabla\varphi(y) = y$ et $Hess\varphi(y) = Id$ ce qui permet de trouver que $y_0 = x \pm ct\hat{x}$ les rayons se propagent donc toujours selon des droites mais la direction de celles-ci dépend du point de départ du rayon. Dès lors il est bien évident que les rayons peuvent être amené à se croiser, comme le montre la figure. Ceci génère de nouveaux phénomènes : on parle de focalisation.



cas d'une phase courbe

Pour plus de simplicité on se place en dimension $d = 2$ alors on a pour la Hessienne :

$$\det(Hess\psi_{\pm}(t, x, y_0, \xi_0)) = \frac{|x|}{|\xi_0|} = 1 \mp \frac{ct}{|\xi_0|} = \frac{2|x|}{|x| \pm \sqrt{|x|^2 \pm 4ct}}$$

et tant que le déterminant ne s'annule pas $\sigma = 0$. Au voisinage du point de focalisation $x = 0$ la partie “+” de la solution se focalise, la solution admet alors l'asymptotique

$$u(t, x) = \frac{1}{2i} e^{i\varphi(x+ct\hat{x})/\varepsilon} \frac{v(x+ct\hat{x})}{\sqrt{2|x|}} + O(\varepsilon) + O(|x|^0) \quad (15)$$

de telle sorte que la solution explose . Après la focalisation la solution peut encore être définie par l'intégrale (9) et on peut encore y appliquer le théorème de la phase stationnaire cependant comme le déterminant du Hessien s'est annulé on peut supposer que l'une des valeurs propres de cette matrice a changé de signe et que par conséquent la signature est passé de 0 à ± 2 . En effet une analyse plus précise montre que après la focalisation :

$$u(t, x) = \frac{1}{2i} e^{i\varphi(x+ct\hat{x})/\varepsilon + i\pi/2} \frac{v(x+ct\hat{x})}{\sqrt{2|x|}} + O(\varepsilon) + O(|x|^0) \quad (16)$$

Contrairement au premier exemple ce genre de résultats ne peut être obtenu avec un développement BKW, l'explosion de la solution en $x = 0$ interdisant la prolongation des rayons dans cette méthode.

3 Théorie de la diffusion

On s'intéresse à la comparaison de deux équations d'évolution

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi = H\Psi & \Psi|_{t=0} = \Psi_0 \\ i\partial_t \psi = H_0\psi & \psi|_{t=0} = \psi_0 \end{cases} \quad (17)$$

où h et H_0 sont deux opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, dépendant éventuellement du temps. La solution d'un tel problème est unique et définie pour tout temps car

$$\frac{d}{dt}|\Psi|^2 = \langle \partial_t \Psi, \Psi \rangle + \langle \Psi, \partial_t \Psi \rangle = \langle (H - H^*)\Psi, \Psi \rangle = 0$$

On définit donc l'opérateur d'évolution $U(t)$ associé à H , tel que $\Psi(t) = U(t)\Psi_0$, et de même celui associé à H_0 que l'on note $U_0(t)$. On espère que si la différence entre H et H_0 est "petite" en un certain sens alors pour de grand temps l'évolution sous l'action de $U(t)$ et celle sous l'action de $U_0(t)$ soient proches. En termes plus précis on cherche des conditions suffisantes sur la perturbation $V = H - H_0$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall \Psi_0 \in \mathcal{H} \quad \exists \psi_0 \in \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad & \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U(t)\Psi_0 - U_0(t)\psi_0\| = 0 \\ \iff & \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\Psi_0 - U(-t)U_0(t)\psi_0\| = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Dans ce cas on peut définir les opérateurs d'onde :

$$W_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)U_0(t)$$

Si λ est une valeur propre de H alors la solution de (17) est $\Psi(t) = e^{-i\lambda t}\Psi_0$ et si λ n'est pas valeur propre de H_0 on ne pourra pas comparer cette solution à une obtenue de l'opérateur H_0 . On ne considère donc que des opérateurs sans valeurs propres ou mieux on restreint H à un sous espace $\mathcal{H}$: l'espace de départ privé des sous-espaces propres de H et de même pour H_0 . Examinons le cas général des opérateurs dépendant du temps :

Théorème 3.1 (cas courte portée)

Si $\|V(t)\| = O(< t >^{-\rho})$ $\rho > 1$ alors $\exists W_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)U_0(t)$.

preuve

La démonstration repose sur l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \exists s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)U_0(t) &\iff \forall \psi \in \mathcal{H} \quad \exists s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)U_0(t)\psi \\ &\iff \forall \psi \in \mathcal{H} \quad \frac{d}{dt}U(-t)U_0(t)\psi \text{ est absolument intégrable.} \end{aligned}$$

car $\frac{d}{dt}U(-t)U_0(t)\psi = iU(-t)(H - H_0)U_0(t)\psi = iU(-t)VU_0(t)\psi$ en passant aux normes :

$$\left\| \frac{d}{dt}U(-t)U_0(t)\psi \right\| = \|U(-t)VU_0(t)\psi\| \leq \|V(t)\| \|\psi\|$$

qui est bien absolument intégrable sous l'hypothèse $\rho > 1$. $\square$

Si l'on veut regarder le cas de potentiels indépendant du temps On doit utiliser le théorème de la phase stationnaire pour conclure.

Théorème 3.2 (théorème de Cook)

Soient $H_0 = -\Delta$ et $H = H_0 + V$ où V est l'opérateur de multiplication par la fonction $V(x) \in \mathbb{R}$.

Si $V(x) = O(< x >^{-\rho})$ $\rho > 1$ alors $\exists W_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)U_0(t)$.

preuve

D'après la démonstration pour le cas courte portée il suffit de montrer que $\|V(x)U_0(t)f(x)\| \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}_t)$, et ceci pour une classe de fonctions $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dense. En utilisant la transformation de Fourier on obtient une formulation intégrale pour $U_0(t)$ sur la classe des fonctions de Schwarz :

$$(U_0(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(<x,\xi>-t\xi^2)} \widehat{f}(\xi) d\xi = e^{-ix^2/4t} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it(\xi-x/2t)^2} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad (19)$$

On peut chercher les points stationnaires de la phase $\phi(t, x, \xi) = (\xi - x/2t)^2$. On trouve facilement que $\nabla_{\xi}\phi(t, x, \xi) = 2(\xi - x/2t) = 0$ dont le seul point stationnaire est $\xi_0 = x/2t$. ξ_0 est bien non-dégénéré puisque la Hessienne est $Hess\phi(t, x, \xi) = 2Id$. On obtient alors que quand $t \rightarrow \pm\infty$:

$$V(x)U_0(t)f(x) = \frac{e^{-ix^2/4t \pm id\pi/4}}{(2t)^{d/2}} V(x)\widehat{f}(x/2t) + r_{\pm}(t, x) \quad (20)$$

On choisit de prendre $f \in \{\widehat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) : supp \widehat{f} \subset [0 < \lambda_1 \leq |\xi| \leq \lambda_2 < \infty]\}$ de sorte que le terme dominant dans (20) soit supporté dans une couronne de rayon proportionnel à t . Cette classe est bien dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. A première vue on peut croire que $\|r_{\pm}(t, .)\| = O(t^{-1})$ mais en tenant compte de ce que le reste ne dépend de V que sur un voisinage de du point stationnaire $x = 2t\xi$ on trouve $\|r_{\pm}(t, .)\| = O(t^{-1-\rho})$ qui est bien absolument intégrable . Pour le term principal on trouve que :

$$\left\| \frac{e^{-ix^2/4t \pm id\pi/4}}{(2t)^{d/2}} V(x)\widehat{f}(x/2t) \right\| = \|V(2ty)\widehat{f}(y)\| \leq \|V\|_{\infty, supp \widehat{f}} \|f\| = O(t^{-\rho})$$

qui est bien absolument intégrable sous l'hypothèse $\rho > 1$. $\square$

Dans le cas ou $\rho \leq 1$ c'est encore le théorème de la phase stationnaire qui permet de trouver de nouvelles solutions. En effet si $V(x) \sim ct^{-1}$ alors $\nexists W_{\pm}$ car dans (20) le terme dominant est justement en t^{-1} il faut donc remplacer l'opérateur $U_0(t)$ par un autre tel que la limite précédente existe mais qui reste assez proche de $U_0(t)$. Pour cela on cherche $U_0(t)$ sous la forme :

$$(U_0(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\langle x, \xi \rangle - S(\xi, t))} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad (21)$$

avec $S(\xi, t)$ "proche" de $t\xi^2$. Pour qu'avec cette nouvelle définition les opérateurs d'onde (modifiés) existent on regarde ce que donne la méthode de la phase stationnaire dans (21) :

$$\frac{d}{dt} U(-t) U_0(t) f(x) = i U(-t) (H - \partial_t S(-i\nabla, t)) U_0(t) f(x)$$

On est amené à regarder l'intégrabilité de

$$(H - \partial_t S(-i\nabla, t)) U_0(t) f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\langle x, \xi \rangle - S(\xi, t))} (\xi^2 + V(x) - \partial_t S(\xi, t)) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

La phase $\phi(t, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle - S(\xi, t)$ va stationner au point $\nabla_{\xi} \phi(t, x, \xi_0) = x - \nabla_{\xi} S(\xi_0, t) = 0$ Le terme dominant de l'intégrale aura alors l'amplitude $\xi_0^2 + V(x) - \partial_t S(\xi_0, t)$. Pour améliorer la convergence par rapport au cas $S(\xi, t) = t\xi^2$ il faut annuler l'amplitude de ce premier terme, cela amène à considérer les solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} x = \nabla_{\xi} S(\xi, t) \\ \xi^2 + V(x) - \partial_t S(\xi, t) = 0 \\ S(\xi, t_0) = t_0 \xi^2 \end{cases} \quad (22)$$

Sous une hypothèse de régularité de V ($V(t, \cdot)$ Lipschitzien ou $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^d)$), il existe bien des solution de cette équation définie pour tout temps ($t \geq t_0$) et avec un tel choix les opérateurs d'onde modifiés existent.