Théorie de la diffusion classique
problème à deux corps

Roux Ph.

Table des matières

1 Introduction

On s'intéresse à *l'équation de Newton* $(x, \xi) \in T\mathbb{R}^d$: $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt}(t) & = & \xi(t) \\ \frac{d\xi}{dt}(t) & = & F(t, x(t)) \end{array} \right.$

avec les conditions initiales : $x(0) = y, \ \xi(0) = \eta$.

Cette équation décrit le mouvement d'une particule de masse 1 soumise à la force $F(t, x)$ .On suppose F suffisamment régulière pour avoir l'existence locale des solutions par le théorème de Cauchy-Lipschitz : $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. On définit deux cas particuliers de cette équation : lorsque F est indépendante du temps on dit que l'on est dans un cas *stationnaire* , on dit que F est *conservative* quand elle dérive d'un potentiel :

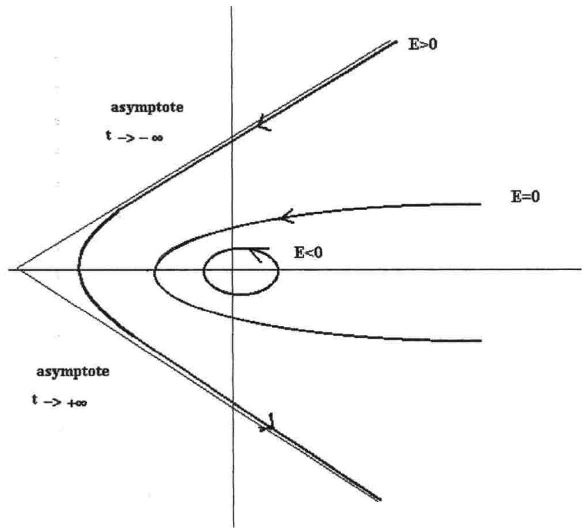
$$F(t, x) = -\nabla_x V(x),$$

Avant de décrire l'approche générale de la théorie de la diffusion, commençons par étudier les trajectoires de l'équation de Newton dans le cas particulier très important en physique du potentiel de Coulomb : $V(x) = -\frac{1}{|x|}$. Les trajectoires peuvent être obtenues de manière explicite par leur équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{L^2}{1 + e\ cos(\theta)}$$

les constantes étant données par les constantes du mouvement :

$$E = \frac{1}{2}|\xi|^2 - \frac{1}{|x|}, \quad L = r^2\frac{d\theta}{dt}, \quad e = \sqrt{1+2EL^2}$$



On peut donc classer les trajectoires en trois grandes familles :

- si $E < 0$ alors les trajectoires sont des ellipses,

- si $E = 0$ les trajectoires sont des paraboles,

- si $E > 0$ les trajectoires sont des hyperboles.

On constate que dans le dernier cas les trajectoires sont non-bornées et possèdent des asymptotes quand $t \to \pm\infty$. A l'infini les trajectoires semblent se comporter comme des trajectoires libres :

$x(t) \to x^{\pm} + t\xi^{\pm} = \tilde{x}(t)$ définie par : $\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d\tilde{x}}{dt}(t) & = & \tilde{\xi}(t) \\ \frac{d\tilde{\xi}}{dt}(t) & = & 0 \end{array} \right.$

avec les conditions initiales : $\tilde{x}(0) = x^{\pm},\ \tilde{\xi}(0) = \xi^{\pm}$.
La démarche de la théorie de la diffusion peut être formalisée ainsi :

- trouver une famille de trajectoires de diffusion $(E > 0)$

- trouver une famille de trajectoires asymptotiques $(t \to x + t\xi)$

- construire des *opérateurs d'onde* qui au conditions initiales associent les traces futures et passées $W_\pm : (y,\eta) \to (x^\pm, \xi^\pm)$

- construire l'opérateur de diffusion qui aux traces passées associe les traces futures $W_+ W_-^{-1} : (x^-, \xi^-) \to (x^+, \xi^+)$ ce qui revient donc à inverser les opérateurs d'onde, c'est le problème de la *complétude asymptotique.*

2 Diffusion à courte portée

On cherche une hypothèse sur la décroissance à l'infini de $F(t,x)$ pour pouvoir comparer l'opérateur de Newton avec une force à l'opérateur de Newton libre (existence et bijectivitée des opérateurs d'onde) . On note $< x >= (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$.

hypothèse 1

$$\|F(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = O\left(< t >^{-1-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

remarque 1 *Sous cette hypothèse on a l'existence globale des solutions de l'équation de Newton, en effet on a les estimations a priori :*
$\xi(t) = \eta + \int_0^t F(s,x(s))ds \quad => \quad \|\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq |\eta| + \int_{\mathbb{R}} \|F(s,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} ds$
$x(t) = y + \int_0^t \xi(s)ds \quad => \quad \|x\|_{L^\infty(|t|\leq T)} \leq |\eta| + T\|\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$
qui d'après le principe de majoration a priori donnent l'existence globale des solutions .

théorème 2.1 (moment asymptotique) *Sous l'hypothèse 1 on a :*

$$\forall (y,\eta) \in T\mathbb{R}^d \quad \exists \lim_{t\to\infty} \xi(t,y,\eta) = \xi^\pm(y,\eta) = \lim_{t\to\infty} \frac{x(t,y,\eta)}{t}$$

preuve
- on écrit l'équation intégrale pour ξ :

$$\xi(t) = \eta + \int_0^t F(s,x(s))ds$$

or $\exists \int_0^{\pm\infty} F(s,x(s))ds$ car on a la convergence absolue de l'intégrale par hypothèse, donc on pose :

$$\xi^\pm(y,\eta) = \eta + \int_0^{\pm\infty} F(s,x(s))ds$$

alors :

$$\begin{aligned} |\xi - \xi^\pm| &= |\int_t^{\pm\infty} F(s,x(s))ds| \\ &= O\left(\int_t^{\pm\infty} < s >^{-1-\varepsilon} ds\right) \\ &= O\left(< t >^{-\varepsilon}\right) = o(1) \end{aligned}$$

•De même pour x :
$$\frac{x(t)}{t} = \frac{y}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t \xi(s)ds \rightarrow_{t\rightarrow\pm\infty} 0 + \xi^{\pm}$$
d'après un lemme de Cesaro . □

hypothèse 2 (force à courte portée)

$$\|F(t,.)\|_{L^\infty(R^d)} = O\left(< t >^{-2-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

théorème 2.2 (position asymptotique) *Sous l'hypothèse 2 on a :*

$$\forall (y,\eta) \in T\mathbb{R}^d \quad \exists \lim_{t\rightarrow\infty} x(t,y,\eta) - t\xi^{\pm}(y,\eta) = x^{\pm}(y,\eta)$$

preuve On réécrit la formulation intégrale des équations de Newton pour x :

$$\begin{aligned} x(t) &= y + \int_0^t \xi(s)ds \\ &= y + \int_0^t \eta \int_0^s F(\sigma, x(\sigma))d\sigma ds \\ &= y + t\eta + \int_0^t \int_0^s F(\sigma, x(\sigma))d\sigma ds \end{aligned}$$

donc : $\quad x(t) - t\xi^{\pm} = y - \int_0^t \int_s^{\pm\infty} F(\sigma, x(\sigma))d\sigma ds$, or
$\exists \lim\limits_{t\rightarrow\pm\infty} \displaystyle\int_0^t \int_s^{\pm\infty} F(\sigma, x(\sigma))d\sigma ds$ par la convergence absolue de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pm\infty} \int_s^{\pm\infty} |F(\sigma, x(\sigma))| d\sigma ds &= O\left(\int_0^t \int_s^{\pm\infty} < \sigma >^{-2-\varepsilon} d\sigma ds\right) \\ &= O\left(\int_0^{\pm\infty} < s >^{-1-\varepsilon}\right) < \infty \end{aligned}$$

donc on pose : $\quad x^{\pm} = y - \int_0^{\pm\infty} \int_s^{\pm\infty} F(\sigma, x(\sigma))d\sigma ds$ et on obtient :

$$\begin{aligned} |x - x^{\pm} - t\xi^{\pm}| &= |\int_t^{\pm\infty} \int_s^{\pm\infty} F(\sigma, x(\sigma))d\sigma ds| \\ &= O\left(\int_t^{\pm\infty} < s >^{-1-\varepsilon} ds\right) \\ &= O\left(< t >^{-\varepsilon}\right) = o(1) \ \square \end{aligned}$$

On se pose maintenant la question de la complétude asymptotique :

lemme 2.1 *Soit $(y,\eta)(t)$ une solution de l'équation de Newton, on pose :*

$$z(t) = y(t) - x - t\xi \text{ et } G(z)(s) = \int_{\pm\infty}^{s} (s-\sigma)F(\sigma, y(\sigma))d\sigma$$

alors sous l'hypothèse 2 on a :

$$\lim_{t\to\pm\infty} (y(t) - x - t\xi) = 0 \quad <=> \quad G(z) = z$$

preuve On utilise la formule de Taylor :

$$y(s) = y(t) + (s-t)\eta(t) + \int_{t}^{s} (s-\sigma)F(\sigma, y(\sigma))d\sigma$$

sous l'hypothèse 2 on peut faire $t \to \pm\infty$ ce qui donne :

$$y(s) = y^{\pm} + s\eta^{\pm} + \int_{\pm\infty}^{s} (s-\sigma)F(\sigma, y(\sigma))d\sigma \ .$$

Si $\lim_{t\to\pm\infty} (y(t) - x - t\xi) = 0$ alors $y^{\pm} = x$ et $\eta^{\pm} = \xi$ donc

$$z(s) = \int_{\pm\infty}^{s} (s-\sigma)F(\sigma, y(\sigma))d\sigma = G(z)(s).$$

Réciproquement si $z(s) = G(z)(s)$ alors d'après l'hypothèse 2 on a :

$$z(s) = (y(s) - x - s\xi) = O\left(< s >^{-\varepsilon}\right) \to_{s\to\pm\infty} 0$$

et donc $y^{\pm} = x \text{ et } \eta^{\pm} = \xi$.$\square$

hypothèse 3

$$\|\nabla_x F(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = O\left(< t >^{-2-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

théorème 2.3 (complétude asymptotique)

$$\forall (x^{\pm}, \xi^{\pm}) \in T\mathbb{R}^d \ \ \exists!(y,\eta) \text{ tel que } \lim_{t\to\pm\infty} (x(t,y,\eta) - x^{\pm} - t\xi^{\pm}) = 0$$

preuve On va montrer l'existence et l'unicité grâce au Théorème de Banach-Piccard pour l'application $G : L^\infty(\pm s_0, \pm\infty) \to L^\infty(\pm s_0, \pm\infty)$. L'unicité de la trajectoire pour des temps grands donne l'unicité pour tous temps car les trajectoires ne se croisent pas. Montrons la contractance de G pour s_0 assez grand :

$$\begin{aligned}
& \|G(z_1) - G(z_2)\|_{L^\infty(\pm s \geq \pm s_0)} \\
= & \sup_{\pm s \geq \pm s_0} \left| \int_{\pm\infty}^{s} (s-\sigma)\left(F(\sigma, z_1(\sigma) + x + \sigma\xi) - F(\sigma, z_2(\sigma) + x + \sigma\xi)\right) d\sigma \right| \\
= & \sup_{\pm s \geq \pm s_0} \int_{\pm\infty}^{s} |s-\sigma| \|\nabla_x F(\sigma,.)\|_{L^\infty(R^d)} \|z_1 - z_2\|_{L^\infty(\pm s \geq \pm s_0)} d\sigma \\
= & \sup_{\pm s \geq \pm s_0} O\left(< s >^{-\varepsilon}\right) \|z_1 - z_2\|_{L^\infty(\pm s \geq \pm s_0)} = O\left(< s_0 >^{-\varepsilon}\right) \|z_1 - z_2\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

donc pour s_0 assez grand on a la contractance de G. $\square$

3 Cas conservatif

Cette fois on réécrit les équations de Newton : $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt}(t) & = & \xi(t) \\ \frac{d\xi}{dt}(t) & = & -\nabla_x V(x(t)) \end{array} \right.$

On a une intégrale première de l'équation : $E = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x) = C^{ste}$ appelée énergie de la solution . Pour pouvoir adapter les démonstrations précédentes à cette situation il faut obtenir des estimations sur la croissance de $x(t)$ en temps .

hypothèse 4

$$V(x) \to_{|x| \to \pm\infty} 0$$

proposition 3.1 *Sous l'hypothèse 4* $E < 0 \;\; => \;\; \{x(t) | t \in \mathbb{R}\}$ *est borné.*

preuve On procède par l'absurde :
$\forall r > 0 \; \exists t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|x(t_0)| > r$ or $\forall \varepsilon > 0 \; \exists r > 0$ tel que $|V(x)| < \varepsilon \quad \forall |x| > r$ alors pour $\varepsilon = -\frac{E}{2} > 0$ et $r = r(\varepsilon)$ on a : $0 \leq \frac{1}{2}\xi^2 = E - V(x(t_0)) \leq \frac{E}{2} < 0$ ce qui est absurde !□
Comme dans l'exemple du potentiel de Coulomb on voit que les trajectoires d'énergie négative ne sont pas des trajectoires de diffusion.

définition 3.1 *On suppose que* $\exists r_0 > 0$ *tel que* $\forall |x| > r_0 \;\; V(x) < 0$. *On note :*

$$G(r) = \inf_{|x|=r} (V(x) - E) \text{ pour } E \geq 0.$$

Soit $r_1 > r_0$ *on pose* $T = \int_{r_0}^{r_1} \frac{ds}{\sqrt{-2G(s)}}$ *et* $K(r) = \int_{r_1}^{r} \frac{ds}{\sqrt{-2G(s)}}$
qui est définie de : $[r_0, +\infty[\to [-T, +\infty[$

proposition 3.2 *Sous les hypothèses des définitions précédentes on a :*

$$E \geq 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} |x(t, y, \eta)| = +\infty \quad => \quad \exists t_0 \text{ tel que } \forall t \geq t_0 \;\; |x(t, y, \eta)| \leq \omega(t - t_0)$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + G(\omega) = 0 \quad t > -T \\ \omega(0) = r_1 > r_0 \quad \frac{d\omega}{dt}(0) > 0 \end{array} \right.$

preuve
- K est continue et $\pm K'(r) > 0$ donc $\exists ! \omega \in C^1(K(]r_0, +\infty[),]r_0, +\infty[)$ et

$$\omega(K(r)) = r \quad => \quad \frac{d\omega}{dt}(K(r)) = \frac{1}{K'(r)} = \sqrt{-2G(r)} = \sqrt{-2G(\omega(K(r))} > 0$$

$$=> \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + G(\omega) = 0 \\ \omega(0) = \omega(K(r_1)) = r_1 \\ \frac{d\omega}{dt}(0) = \pm\frac{d\omega}{dt}(K(r_1)) = \sqrt{-2G(r_1)} > 0 \end{array} \right.$$

• On calcule $\frac{d|x(t)|}{dt} \leq |\frac{dx(t)}{dt}| = \sqrt{2(E - V(x(t))} \leq \sqrt{-2G(|x(t)|}$
et on trouve :

$$\frac{dK\left(|x(t)\right)|}{dt} = K'(|x(t)|)\frac{d|x(t)|}{dt} \leq 1$$

$$\begin{aligned} => \quad & K(|x(t)|) - K(|x(t_0)|) \leq t \\ => \quad & |x(t)| \leq \omega(t - t_0) \end{aligned}$$

où t_0 est tel que $|x(t)| > r_0 \quad \forall t > t_0$ □

remarque 2 *Prenons l'exemple* $V(x) = -|x|^{-\alpha}$ *avec* $\alpha > 0$.
• $E > 0$ *alors d'après le lemme de Césaro on a :*

$$K(r) = \int_1^r \frac{ds}{\sqrt{2(E + |s|^{-\alpha})}} \widetilde{_{t \to +\infty}} \frac{r}{\sqrt{2E}} \quad et \quad \omega(t) \widetilde{_{t \to +\infty}} \sqrt{2E}t$$

ces trajectoires sont donc susceptibles d'admettre des asymptotes $x^+ + t\xi^+$ *quand* $t \to +\infty$.
• $E = 0$ *cette fois on trouve un résultat défavorable :*

$$K(r) = \int_1^r \frac{|s|^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}} ds \widetilde{_{t \to +\infty}} \frac{\sqrt{2}}{2 + \alpha} r^{\frac{2+\alpha}{2}} \quad et \quad \omega(t) \widetilde{_{t \to +\infty}} \frac{2 + \alpha}{\sqrt{2}} t^{\frac{2}{2+\alpha}}$$

qui n'admettent pas d'asymptotes car : $\frac{x(t)}{t} \to_{t \to +\infty} 0$ *mais* $|x(t) - t0| \to +\infty$.

On cherche maintenant des estimations de propagation pour $E > 0$.

hypothèse 5

$$< x, \nabla_x V(x) > \to_{|x| \to \infty} 0$$

proposition 3.3 (estimations de propagation) *Sous les hypothèses 4 et 5 si* $E > 0$ *et* $|x(t)| \to_{t \to \pm\infty} \infty$ *alors*

$$\exists C_0 > 0, t_0 \in R \;\; tels\ que \;\; |x(t)| \geq C_0|t - t_0| \quad \forall \pm t \geq \pm t_0.$$

Si $E = 0$ *alors* $\qquad \lim_{t \to \pm\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t \to \pm\infty} \xi(t) = 0.$

preuve
•Grace aux équations de Newton on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x) & = & E > 0 \\ \frac{d|x(t)|^2}{dt} & = & 2 < x, \xi > \\ \frac{d^2|x(t)|^2}{dt^2} & = & 2\left(|\xi|^2 + < x, \nabla_x V(x) >\right) \end{array} \right.$$

or

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall\varepsilon>0\ \ \exists r>0\ \ tel\ que\ \ |x|>r & => & |<x,\nabla_x V(x)>|<\varepsilon\ et\ |V(x)|<\varepsilon \\ \forall r>0\ \ \exists t_0\in\mathbb{R}\ \ tel\ que\ \ \pm t>\pm t_0 & => & |x(t)|>r \end{array}\right.$$

donc pour $\varepsilon=\frac{E}{2},\ r=r(\varepsilon)$ et $\forall|t|>t_0$ on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |\xi|^2 & = & 2(E-V(x))\geq E \\ \frac{d^2|x(t)|^2}{dt^2} & = & 2\left(|\xi|^2+<x,\nabla_x V(x)>\right)\geq E \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rl} => & \frac{d|x(t)|^2}{dt}\geq Et+A \\ => & |x(t)|^2\geq \frac{E}{2}t^2+At+B \\ => & |x(t)|\geq C_0|t| \end{array}$$

avec $C_0=\sqrt{\frac{E}{4}}$ pour $|t|>t_0$, t_0 plus grande racine de $\frac{E}{4}t^2+At+B=0$.
•Si maintenant $E=0$ on a :
$\forall\varepsilon>0\ \ \exists r>0\ \ tel\ que\ \ |x|>r\ \ =>\ \ |\xi|<\varepsilon$
avec $\forall r>0\ \ \exists t_0\in\mathbb{R}\ \ tel\ que\ \ \pm t>\pm t_0\ \ =>\ \ |x(t)|>r$

$$\begin{array}{rl} & \frac{d|x(t)|^2}{dt}=2<x,\xi>\leq 2|x||\xi| \\ => & \frac{d|x(t)|}{dt}\leq|\xi|<\varepsilon \\ => & |x(t)|\leq|x(t_0)|+\varepsilon|t| \\ => & \lim\limits_{t\to\pm\infty}\left|\frac{x(t)}{t}\right|\leq 0+\varepsilon \end{array}$$

Ceci $\forall\varepsilon>0$ qui permet de conclure. □

On peut maintenant formuler des hypothèses générales sur F pour démontrer les résultat mis en évidence sur les exemples.

hypothèse 6

$$|F(x)|=O\left(<x>^{-1-\varepsilon}\right),\quad \varepsilon>0$$

proposition 3.4 *Si $d>1$ et sous l'hypothèse 6 on a :* $\left\{\begin{array}{c} \exists\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty}<x,\nabla_x V(x)>=0 \end{array}\right.$

preuve
• Pour $|x|=r$ on a :

$$\int_r^{2r}\sup_{|y|\geq u}|F(y)|du\geq r\sup_{|y|\geq r}|F(y)|\geq|x||F(x)|\geq|<x,\nabla_x V(x)>|$$

$$or\ \int_r^{2r}\sup_{|y|\geq u}|F(y)|du=O\left(\int_r^{2r}<u>^{-1-\varepsilon}du\right)=O\left(<r>^{-\varepsilon}\right)\to_{r\to\infty}0$$

• soient v_0 et v_1 deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^d$, soit $v \in C^0([0,1])$ un chemin continu sur la sphère reliant v_0 à v_1. On a alors :

$$\forall v \;\; \exists \lim_{t\to\infty} V(tv)$$

car $V(tv) = V(v) + \int_1^t F(sv)ds$ et l'intégrale converge quand $t \to \infty$.
De plus on a :

$$\begin{aligned} |V(tv_0) - V(tv_1)| &\leq \sup_{\tau\in[0,1]} |F(tv(\tau))| t |v_0 - v_1| \\ &\leq C \sup_{|x|=t} |x||F(x)| \\ &\to_{t\to\infty} 0 \end{aligned}$$

donc c'est la même limite pour v_0 et v_1. $\square$

remarque 3 *Comme $F(x) = -\nabla_x V(x)$ V est définie à une constante près, on peut donc la choisir telle que $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$. L'hypothèse 6 implique les hypothèses 4 et 5, et donc l'estimation de propagation 3.3. Dans le cas $d = 1$ on a $\exists \lim_{t\to\pm\infty} V(x)$, il faut séparer les deux cas $x \to \pm\infty$ pour obtenir 3.3.*

hypothèse 7

$$|F(x)| = O\left(< x >^{-2-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

hypothèse 8

$$|\nabla_x F(x)| = O\left(< x >^{-2-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

théorème 3.1 *Soit $\Gamma = \{(y,\eta) \in T\mathbb{R}^d |\; E = \frac{1}{2}\eta^2 + V(y) \geq 0$ et $\lim_{t\to\pm\infty} |x(t,y,\eta)| = \infty\}$ et $\Gamma^* = \{(y,\eta) \in T\mathbb{R}^d |\; E = \frac{1}{2}\eta^2 + V(y) > 0$ et $\lim_{t\to\pm\infty} |x(t,y,\eta)| = \infty\}$. Sous l'hypothèse 6 on a*

$$\forall (y,\eta) \in \Gamma \;\exists \lim_{t\to\infty} \xi(t,y,\eta) = \xi^\pm(y,\eta) = \lim_{t\to\infty} \frac{x(t,y,\eta)}{t},$$

sous l'hypothèse 7 on a

$$\forall (y,\eta) \in \Gamma^* \;\xi^\pm \neq 0 \quad et \quad \exists \lim_{t\to\infty} x(t,y,\eta) - t\xi^\pm(y,\eta) = x^\pm(y,\eta)$$

sous l'hypothèse 8 on a

$$\forall (x^\pm,\xi^\pm) \in T\mathbb{R}^d \;\; tel\ que \;\; \xi^\pm \neq 0 \;\; \exists! (y,\eta) \in \Gamma^* \; tel\ que \;\; \lim_{t\to\pm\infty} (x(t,y,\eta) - x^\pm - t\xi^\pm) = 0$$

preuve
• Soit $(y,\eta) \in \Gamma$, si $E = 0$ la proposition 3.3 montre le résultat on peut donc supposer $E > 0$ i.e. $(y,\eta) \in \Gamma^*$.
• Par hypothèse on a :

$$\exists C_0 > 0, t_0 \in \mathbb{R} \;\; tels\ que \;\; |x(t)| \geq C_0 |t - t_0| \quad \forall \pm t \geq \pm t_0.$$

Soit $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+,[0,1])$ telle que $J(r) = \begin{cases} 0 & r \leq \frac{C_0}{4} \\ 1 & r \geq \frac{C_0}{2} \end{cases}$

et on pose $\widetilde{F}(t,x) = J\left(\frac{|x|}{t}\right) F(x)$

on a donc $\|\widetilde{F}(t,.)\|_{L^\infty(R^d)} \leq \sup_{|x| \geq \frac{C_0}{4t}} |F(x)| = \begin{cases} O\left(< t >^{-1-\varepsilon}\right) & \textit{hypothèse } 6 \\ O\left(< t >^{-2-\varepsilon}\right) & \textit{hypothèse } 7 \end{cases}$

la solution des équations de Newton est solution pour t assez grand de :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= \xi(t) \\ \frac{d\xi}{dt}(t) &= \widetilde{F}(t,x(t)) \end{cases}$$

qui permet grâce au théorèmes 2.1 et 2.2 de construire les opérateurs d'onde.

• Sous l'hypothèse 8 on pour t assez grand

$$\|\nabla_x \widetilde{F}(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = O\left(< t >^{-2-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

ce qui permet d'obtenir la complétude asymptotique des opérateurs d'onde par le théorème 2.3. □

4 Exemple de diffusion à longue portée

La théorie développée ne s'applique pas au cas $V(x) = -\frac{1}{|x|}$ essayons de comprendre pourquoi ? Soit $E > 0$ on a d'après les théorèmes 2.1 et 3.1 $x(t) - t\xi^\pm = o(t)$ de plus l'intégrale première d'énergie nous donne :

$$|\xi| = \sqrt{2\left(E + \frac{1}{|x|}\right)} = \sqrt{2E}\left(1 + \frac{1}{4E|x|} + O\left(|x|^{-2}\right)\right)$$

ce qui laisse supposer que : $x(t) = t\xi^\pm + O(ln(t))$ .Tout ce passe comme si le paramétrage de l'hyperbole ne correspondait pas à celui de l'asymptote . On peut par contre espérer qu'en retranchant le reste en $ln(t)$ à $x - t\xi^\pm$ on puisse de nouveau définir une position asymptotique. Soit

$$\begin{aligned} S(t,\xi) &= \tfrac{1}{2}t\xi^2 + \tfrac{1}{|\xi|}ln(\xi^2|t|)sgn(t) \\ \partial_t S(t,\xi) &= \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{|\xi|t} \\ \nabla_\xi \partial_t S(t,\xi) &= \partial_t \nabla_\xi S(t,\xi) = \xi - \tfrac{\xi}{|\xi|^3 t} \end{aligned}$$

On veut montrer l'existence d'une limite pour :

$$x - \nabla_\xi S(t,\xi^\pm) = y - \nabla_\xi S(0,\xi^\pm) + \int_0^t \xi(\sigma) - \partial_\sigma \nabla_\xi S(\sigma,\xi^\pm) d\sigma$$

ce qui revient à la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{\pm\infty} \xi(t) - \partial_t \nabla_\xi S(t,\xi^\pm)dt = \int_0^{\pm\infty} \xi(t) - \xi^\pm + \frac{\xi^\pm}{|\xi^\pm|^3 t}dt$$

or d'après les estimations du théorème 2.1 on a $x(t) - t\xi^\pm = O(ln(t))$

$$\begin{array}{rcl} \xi(t) - \xi^\pm & = & \int_{\pm\infty}^t F(\sigma, x(\sigma))d\sigma \\ & = & \int_t^{\pm\infty} \frac{x(\sigma)}{|x(\sigma)|^3} d\sigma \\ & = & \int_t^{\pm\infty} \frac{x(\sigma)/\sigma}{|x(\sigma)/\sigma|^3} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \\ & = & \int_t^{\pm\infty} \left(\frac{\xi^\pm}{|\xi^\pm|^3} + O\left(\frac{ln(|\sigma|)}{\sigma}\right)\right) \frac{d\sigma}{\sigma^2} \\ & = & -\frac{\xi^\pm}{|\xi^\pm|^3 t} + \int_t^{\pm\infty} O\left(\frac{ln(|\sigma|)}{\sigma^3}\right) d\sigma \\ & = & -\frac{\xi^\pm}{|\xi^\pm|^3 t} + O\left(\frac{ln(|t|)}{t^2}\right) \end{array}$$

on obtient que $\xi(t) - \xi^\pm + \frac{\xi^\pm}{|\xi^\pm|^3 t} = O\left(\frac{ln(|t|)}{t^2}\right)$ qui est absolument intégrable.

théorème 4.1 $\forall\ (y,\eta) \in\ TR^d$ *tels que* $E > 0$ *alors*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi^\pm(y,\eta) & = & \lim\limits_{t\to\pm\infty} \xi(t,y,\eta) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{x(t,y,\eta)}{t} \\ x^\pm(y,\eta) & = & \lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t,y,\eta) - \nabla_\xi S(t, \xi^\pm(y,\eta)) \end{array} \right.$$

$(x^\pm, \xi^\pm)$ *est appelé opérateur d'onde modifié.*

On peut généraliser cette approche en considérant une solution pour $|t_0|$ assez grand :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t S(t,\xi) & = & \frac{1}{2}\xi^2 + V(\nabla_\xi S(t,\xi)) \qquad \pm\, t \geq \pm t_0 \\ S(t_0,\xi) & = & \frac{1}{2} t_0 \xi^2 \end{array} \right.$$

alors on peut montrer que $\exists \lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t,y,\eta) - \nabla_\xi S(t,\xi^\pm(y,\eta)) = x^\pm(y,\eta)$.

Bibliographie

Jan Dérezinski & Gérard Christian *Scattering theory of classical and quantum N-body systems* , Springer (1997)