Rapport d'activité

Philippe Roux, Mars 2003

Introduction

Les deux premières parties de ce rapport détaillent les activités d'enseignement et d'administration que j'ai exercées dans l'enseignement supérieur lors des cinq dernières années. La dernière partie est consacrée à mes activités et projets de recherche.

Table des matières

1 Enseignements

Durant ces cinq dernières années l'enseignement a constitué une part majeur de mon travail, en particulier depuis que j'occupe un poste de professeur agrégé au département informatique de l'IUT de Lannion. N'ayant pas pu bénéficier d'un monitorat au commencement de ma thèse, j'ai cependant acquis une solide expérience de l'enseignement face à un public varié comme le montre ce bref récapitulatif :

1999/INSA de Rennes

60 H etd de vacations pour des TD de géométrie et d'analyse en $2^{ième}$ année,

2000/UFR de mathématiques

36 H etd de vacations en complément de formation,

2000-01/UFR de mathématiques

96 H etd en tant que 1/2 ATER, cours-TD d'analyse en 1[ière] année de DEUG SM et SPTI (filières orientées vers la physique, l'automatique ...) participation à l'élaboration des sujets d'examen ainsi qu'aux corrections.

2001-02/IUT Lannion

450 Hetd en tant que PRAG, CM TD et TP en 1[ière] et 2[ième] année de DUT.

2002-03/IUT Lannion

490 Hetd en tant que PRAG, CM TD et TP en 1[ière] et 2[ième] année de DUT.

Le *complément de formation* réunit des étudiants de 1[ière] année de DEUG dont les faibles résultats à la fin du premier semestre nécessitent une remise à niveau, voir une réorientation. Dans ce contexte mon rôle était d'organiser, avec deux collègues moniteurs, un enseignement de mathématiques adapté à ce public. La grande difficulté de cette tache était d'amener ces étudiants à identifier leurs lacunes et, en même temps, les remotiver pour réussir leur réorientation. En contrepartie l'équipe pédagogique bénéficiait d'une grande liberté dans le choix des programmes. Cette seconde mission a efficacement complété ma première expérience d'enseignement, très bien balisée au sein d'une école d'ingénieur, en particulier d'un point de vue réflexion pédagogique.

Depuis la rentrée 2001 j'ai été recruté sur un poste de *PRAG au département informatique de l'IUT de Lannion* pour faire face à une situation pédagogique complexe suite aux départs consécutifs en retraite/détachement des 3 membres de l'équipe pédagogique.Étant donné cette situation, j'ai dû m'investir dans les différents enseignements aussi bien en première qu'en deuxième année (voir le tableau 1 ci-dessous). L'un des premiers problèmes à été de gérer la quantité importante d'heures complémentaires (plus de 1300 H etd à pouvoir pour seulement 960H etd statutaires dans l'équipe) en recherchant des vacataires. Parallèlement, soucieux de suivre l'évolution du Programme Pédagogique National (PPN) et de répondre aux besoins des enseignants de matières informatiques du département, un important travail pédagogique à été mené pour renouveler nos enseignement. Il a fallu, par exemple, ajouter un cours d'arithmétique et un cours d'analyse orienté vers le calcul numérique. En effet, ces connaissances étaient nécessaires aux développements de certains projets de 2[ième] année, par exemples : sur la cryptographie ou la simulation numérique.

Parallèlement à ce travail de renouvellement, une des tâches les plus difficile de mon travail a consisté en la *mise en place de Travaux Pratiques "sur machine"* adaptés au niveau des étudiants du DUT. En effet, il m'est rapidement apparu que l'enseignement des mathématiques dans le contexte particulier d'un IUT informatique nécessitait l'utilisation d'un logiciel d'appui permettant aussi bien d'illustrer certaines notions vues en cours (par exemple en analyse, calcul matriciel, statistique, théorie des graphes...) que de permettre la mise en œuvre de développements pointus utilisés par nos collègues informaticiens (par exemple en cryptographie). Cette démarche était approuvée par nos collègues informaticiens qui désiraient mettre à profit les possibilités d'interaction entre mathématiques et informatique. Après avoir choisi, en accord avec le reste de l'équipe pédagogique ainsi que le personnel technique, le logiciel Scilab [INR] comme support, j'ai réalisé un grand

Public	Contenu	Volume
$1^{ième}$ année	Applications, relations, opérations, logique, quantificateurs	3 semaines
$1^{ième}$ année	Algèbres de Boole, fonction (ϕ-) booléennes, méthode de Karnaugh	6 semaines
$1^{ière}$ année	Théorie des ensembles, ensemble des parties d'un ensemble, partitions	3 semaines
$1^{ière}$ année	Analyse : suites, intégrales propres et impropres, séries, calcul numérique sur machine	5 semaines
$1^{ière}$ année	Calcul matriciel et applications	2 semaines
$1^{ière}$ année et $2^{ième}$ année	Probabilités et statistiques : séries statistiques simples et continues, dénombrement, probabilités sur des espaces finis/infinis, probabilités conditionnelles-indépendance	6 semaines
$1^{ière}$ année	Arithmétique : égalité de Bezout, algorithme d'Euclide, nombres premiers, fonction d'Euler, système RSA	5 semaines
$2^{ième}$ année	Algèbre linéaire : espaces vectoriels, combinaisons linéaires, familles libres, liées, bases	6 semaines
$2^{ième}$ année	Applications linéaires : matrice d'une application linéaire, changement de base, inversion des matrices, résolution de systèmes d'équations linéaires	6 semaines

Tab. 1: Enseignements au département Informatique de l'IUT de Lannion en 2001/2002

nombre de fiches pédagogiques qui ont été utilisées tout au long de l'année 2002/2003. Les sujets traités sont variés, comme le montre la liste suivante :

Algèbre linéaire Résolution de systèmes d'équations, calcul matriciel, introduction à l'analyse de Fourier,

Analyse Algorithmes pour la recherche de minima ou de zéros de fonctions, intégration numérique, calcul de constantes mathématiques en précision arbitraire,

Arithmétique Algorithme d'Euclide et recherche d'identités de Bezout, Décomposition en facteurs premiers, crible quadratique, test probabiliste de primalité, cryptosystèmes DES et RSA.

Au total, les étudiants du DUT informatique de Lannion assistent à une cinquantaine d'heures de TP sur "machine" au cours de leur cursus dont j'ai conçu environ 30 heures. Dès cette année, les résultats obtenus sont très satisfaisants. Ils s'intègrent parfaitement aux objectifs de la formation, qui est orientée vers le génie logiciel. Par exemple, le cours d'arithmétique a permis de développer des projets de $2^{\text{ième}}$ année sur le thème de la cryptographie.

2 Responsabilités collectives

Outre mes activités d'enseignement, j'ai aussi participé à la vie administrative des différents établissements que j'ai fréquentés. Mes activités administratives se répartissent en trois catégories :

- participations aux organes de gestion des différentes structures où j'ai travaillé :
  - à Rennes j'ai été pendant deux ans (1999 et 2000) l'un des représentants élus, des doctorants au conseil de l'UFR de Mathématiques, cette première expérience m'a permis de me familiariser avec les différents rouages de la vie d'une structure comme l'IRMAR,
  - à l'IUT de Lannion, j'ai été élu au conseil du département informatique où je représentais mes collègues enseignants du second degré pour l'année 2001/2002.

  Grâce à ces expériences je connais maintenant les rouages de la vie administrative d'une structure universitaire comme peut l'être l'ENSSAT Lannion.

- encadrement, suivi et évaluation des étudiants dans leurs stages et projets :
  - en première année de DUT j'ai dirigé 4 groupes de 7 étudiants (sur 2 ans) dans leurs recherches de visites d'entreprises,
  - en deuxième année de DUT j'ai participé à l'encadrement puis l'évaluation de plusieurs groupes d'étudiants dans le cadre de projets plus techniques aboutissant à la réalisation d'applications (logiciel de stéganographie pour le marquage de documents numériques, logiciel de simulation de courses de motos) ,
  - j'ai aussi effectué les suivis et l'évaluation de stages en entreprise pour des étudiants de DUT 2$^{\text{ième}}$ année ou année spéciale .

- Enfin, au niveau parapédagogique, d'autres tâches plus spécifiques m'ont été confiées :
  - la recherche, la formation et l'encadrement de vacataires (en particulier formation sur le logiciel Scilab utilisé en TP à l'IUT de Lannion)
  - organisation de la procédure de recrutement d'un enseignant du secondaire sur un poste de PRAG au département Informatique (en 2001/2002) : description du profil, sélections des candidats, auditions ...
  - enfin je suis aussi responsable de l'organisation des jurys d'admission à l'entrée de l'IUT. Techniquement je m'occupe de préparer les données nécessaires à l'équipe pédagogique et d'organiser la journée d'examen des dossiers (≈ 1000). De plus, j'ai travaillé à l'amélioration des critères choisis pour effectuer le préclassement des candidats à l'IUT : meilleure prise en compte des appréciations présentes dans le dossier des candidats, ajustement du mode de calcul de la note moyenne des candidats ...

Durant ma thèse, et parallèlement à mes activités de recherche, je me suis investit dans la vie associative de mon laboratoire, principalement au travers de l'association Jacques Binet[BIN], à laquelle j'ai adhéré de 1998 à 2002. Cette association regroupe des étudiants en troisième cycle de mathématiques à l'IRMAR et a pour but de faciliter les échanges d'idées et d'informations au sein du laboratoire. Au cours de ces années, j'ai occupé les postes de secrétaire puis de trésorier (1999/2001) de l'association et je me suis occupé de la maintenance de son site web [BIN]. En plus de ces responsabilités, j'ai participé activement aux actions plus "concrètes" de l'association :

- organisation de séminaires et de groupes de travail à destination des doctorants, en particulier l'organisation des *rencontres doctorales* qui permettaient aux doctorants en mathématiques de Rennes, Nantes, Angers et Brest de se réunir chaque année sur l'un des 4 sites et d'organiser une série d'exposés à caractères scientifiques.

- participation aux débats sur la recherche scientifique (statut du doctorant, charte des thèses) et travail en coopération avec l'école doctorale MATISSE (création d'un annuaire des ancien élèves en troisième cycle de mathématiques de Rennes),

- opérations de vulgarisation scientifique à destination du grand public, par exemple à l'occasion de l'année 2000 (décrétée "année mondiale des mathématiques" par l'UNESCO) l'association Jacques Binet a organisé les journées "MATHABOR" : une série d'ateliers ouvert au public dans un parc Rennais qui a remporté un grand succès.

Mon engagement dans l'animation scientifique s'est aussi traduit dans le domaine de l'astronomie amateur au sein de la Société d'Astronomie de Rennes. J'ai participé à l'organisation et à l'animation de nombreuses soirées d'observation en public d'envergure nationale comme la "Nuit des étoiles" ou bien privée (animation de soirées pour des clients des magasins "Nature & Découverte"). Du point de vue scientifique, je participe à des groupes amateurs d'observations de comètes.

3 Rapport de recherche

Les travaux présentés dans ma thèse concernent la théorie de la diffusion quantique pour l'opérateur de Schrödinger $H = (i\nabla_x + A(x))^2 + V(x)$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ couplée, de façon minimale, à un champ électromagnétique $(A(x), V(x))$ à longue portée et stationnaire :

$$|\partial_x^\alpha V(x)| + |\partial_x^\alpha A(x)| = O((1+|x|)^{-\rho-|\alpha|}), \quad \rho \in (0,1], \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \tag{1}$$

auquel on peut éventuellement ajouter une partie courte portée peu régulière :

$$|V_S(x)| + |A_S(x)| = O((1+|x|)^{-\rho'}), \quad \rho' > 1. \tag{2}$$

Pour de telles interactions, les opérateurs d'onde ordinaires n'existent plus, en général, et doivent être remplacés par des opérateurs d'onde modifiés incorporant la distorsion asymptotique de la phase des solutions de diffusion. Le problème peut être abordé par deux méthodes principales. Dans la première les modificateurs sont des opérateurs (unitaires) dépendant du temps, la preuve de l'existence et de la complétude asymptotique des opérateurs d'onde reposant sur la méthode de Enss. Cette méthode a été abondamment développée dans le cas d'un potentiel électrique V seul. La deuxième méthode est dite stationnaire car les modificateurs y sont définis par des opérateurs indépendants du temps. Son avantage réside dans le fait qu'elle fournit des expressions explicites pour la matrice de diffusion. La méthode stationnaire a été initiée par Isozaki et Kitada [IK85, IK86] dans le cas électrique seul, puis étendue au cas électromagnétique par Robert et Nicoleau [NR91, Nic91]. Ces auteurs utilisent encore partiellement la méthode de Enss pour la preuve de l'existence et de la complétude asymptotique des opérateurs d'onde. La méthode a ensuite été reprise par Yafaev [Yaf98], dans le cas techniquement simplifié $A = 0$ et $\rho > 1/2$, sous une forme totalement stationnaire. Il a, de plus, mené l'étude qualitative de la matrice de diffusion. Le but de ma thèse était donc le traitement par une méthode universelle du cas électromagnétique complet $\rho > 0$. Ce travail fait l'objet d'un article [RY03] en collaboration avec D. Yafaev. L'approche construite dans la thèse permet de s'attaquer à des problèmes très concrets, comme l'effet Aharonov-Bohm [AB59]. Depuis la fin de ma thèse je continue mes recherches sur ce sujet. Ces développements ont conduit à la publication de 3 articles [RY02, **?**, Rou03]

3.1 Théorie de la diffusion

La méthode développée dans ma thèse repose sur la construction d'opérateurs d'onde modifié de type Isozaki et Kitada [IK85, IK86] :

$$W_\pm = W_\pm(H, H_0; J_\pm) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} J_\pm e^{-itH_0} \tag{3}$$

où les modificateurs $J_\pm$ sont des opérateurs pseudo-différentiels (OPD) dont le symbole est de la forme $\exp(i\Phi_\pm(x,\xi))\zeta_\pm(x,\xi)$. Les fonctions de troncature $\zeta_\pm$ apparaissant dans le symbole de $J_\pm$ sont localisées dans certaines zones de l'espace des phases :

- zones sortantes pour le signe "+" $\Gamma^+ = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} :\ < x, \xi > \geq \kappa|x|.|\xi|\}$
- zone entrante pour le signe "−" $\Gamma^- = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} :\ < x, \xi > \leq -\kappa|x|.|\xi|\}$

pour un $\kappa \in (0,1)$, . Les phases $\Phi_\pm(x,\xi)$ doivent vérifier, à des termes courte portée près et dans les zones de l'espace des phases précitées, l'équation eiconale suivante :

$$2 < \xi, \nabla\Phi_\pm > + |\nabla\Phi_\pm|^2 - 2 < A, \xi + \Phi_\pm > + V + |A|^2 = 0. \tag{4}$$

la preuve de l'existence des opérateurs d'onde (3) repose sur la théorie des perturbations lisses (au sens de Kato). La perturbation effective $T_\pm = HJ_\pm - J_\pm H_0$ peut être décomposée en produits d'opérateurs H et H_0-lisses via le principe d'absorption limite, pour les parties à courte portée, et l'estimation de radiation pour les parties ne décroissant qu'en $|x|^{-1}$ et dues à la présence de fonctions de troncature dans le symbole de $J_\pm$. Les opérateurs d'onde ainsi construits coïncident avec des constructions antérieures (dépendantes du temps) sont isométriques et complets et vérifient la propriété d'entrelacement $HW_\pm = W_\pm H_0$.

Les propriétés des opérateurs d'onde $W_\pm$ permettent de construire un opérateur unitaire $S = W_+^* W_-$, l'opérateur de diffusion, qui commute avec le Hamiltonien libre H_0. Dans une représentation où H_0 est diagonal (*i.e.* se ramène à la multiplication par $\lambda \in \sigma(H_0)$) l'opérateur de diffusion se ramène donc à la multiplication par la fonction à valeur opérateur $S(\lambda)$ appelée *matrice de diffusion*. Dans la pratique l'opérateur $S(\lambda)$ opère unitairement (car les $W_\pm$ sont isométriques et complets) sur l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$. La théorie des perturbations lisses nous permet d'obtenir une représentation stationnaire (*i.e.* en fonction de $R(z) = (H - z)^{-1}$) pour $S(\lambda)$. Formellement celle-ci peut s'écrire :

$$S(\lambda) = \mathcal{W}(\lambda) - 2i\pi\Gamma_0(\lambda)J_+^*T_-\Gamma_0^*(\lambda) + 2i\pi\Gamma_0(\lambda)T_+^*R(\lambda + i0)T_-\Gamma_0^*(\lambda) \tag{5}$$

où

$$\mathcal{W}(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)W_+(H_0, H_0, J_+^*J_-)\Gamma_0^*(\lambda) \tag{6}$$

et $\Gamma_0(\lambda)$ est (au coefficient près) la restriction de la transformée de Fourier à la sphère de rayon $\sqrt{\lambda}$. Cette formule nécessite une justification précise, par exemple il suffit de décomposer chaque terme en produits d'opérateurs bornés pour donner un sens à cette formule. Cette justification fait appel à des résultats abstraits :

- le terme $\Gamma_0(\lambda)J_+^*T_-\Gamma_0^*(\lambda)$ est la restriction d'un OPD à une hypersurface (en l'occurrence la sphère) dont l'existence nécessite des conditions particulières sur le symbole principal de l'OPD [LY98],
- le terme contenant $R(z)$ requiert des estimations de propagation (avec microlocalisation dans les zones $\Gamma^{\pm}$) découlant de la théorie de Mourre [Mou81, Mou83, JMP84, Jen85].

L'intérêt de la formule (5) est de permettre une étude détaillée des propriétés spectrales de la matrice de diffusion comme la détermination du spectre ou l'étude des singularités du noyau $\mathrm{s}(\omega, \omega'; \lambda)$, $\omega, \omega' \in \mathbb{S}^{d-1}$ de la matrice de diffusion.À partir de la formule (5) j'ai pu obtenir que, à des termes compacts près, la matrice de diffusion est un OPD borné sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ ayant pour amplitude

$$\mathbf{s}_0(y, \omega, \omega'; \lambda) = \exp(i\Theta(y/\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\omega, \sqrt{\lambda}\omega')), \quad \Theta(x, \xi, \xi') = \Phi_-(x, \xi') - \Phi_+(x, \xi). \tag{7}$$

À partir de l'équation eiconale (4) on peut montrer que, en général, si $\rho \in (0, 1)$ la fonction $\Theta(x, \xi, \xi') \sim |x|^{1-\rho}$ lorsque $|x| \to \infty$, au moins pour certains x, ξ, ξ'. Dès lors, l'oscillation du facteur $\exp(i\Theta)$ génère un spectre essentiel important pour l'opérateur $S(\lambda)$ qui doit recouvrir le cercle unité. C'est, par exemple, le cas pour les potentiels électromagnétiques à longue portée homogènes de degré $-\rho$. Cette situation est fondamentalement différente du cas courte portée. En effet si le champ se réduit à un potentiel électrique à courte portée $V(x)$, on peut choisir pour modificateurs $J_{\pm} = Id$. La perturbation effective devient alors $T_{\pm} = V$ et la formule (5) se réduit alors à la formule de Born :

$$S(\lambda) = Id - 2i\pi\Gamma_0(\lambda)\left(V - VR(\lambda + i0)V\right)\Gamma_0^*(\lambda). \tag{8}$$

Dans ce cas $S(\lambda)$ est une perturbation compacte de l'identité et son spectre est constitué de valeurs propres (contenues dans le cercle unité) s'accumulant au point 1.

Un cas particulier intéressant est celui d'un champ purement magnétique A (donc $V = 0$) vérifiant (1) pour un $\rho \in (1/2, 1)$ et une hypothèse supplémentaire dite de "jauge transverse"

$$< A(x), x >= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{9}$$

On savait déjà que les opérateurs d'onde ordinaires existent et sont complets [LT87]. Les opérateurs d'onde construits ici coïncident bien avec les opérateurs d'onde usuels mais ont l'avantage de conduire à la représentation (5) pour $S(\lambda)$. Dans ce cas le spectre essentiel de $S(\lambda)$ couvre effectivement le cercle unité, ce qui contredit un résultat de Nicoleau [Nic94] affirmant que $S(\lambda) - Id$ est compact dans ce cas. L'ensemble de ce travail a fait l'objet d'un article en collaboration avec D. Yafaev [RY03].

3.2 Analyse microlocale

Le calcul symbolique de Hörmander est un des principaux outils utilisés pour construire l'approche stationnaire décrite dans la section précédente. Ce calcul est bien défini pour des classes de symboles $a \in \mathcal{S}^m_{\rho,\delta}$, vérifiant pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(R)(1+|x|)^{m-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, |\xi| \leq R, \tag{10}$$

uniquement si $\varrho > \delta$. Dans le cas qui nous intéresse les fonctions $\Phi_\pm$ appartiennent à la classe $\mathcal{S}^{1-\rho}_{1,0}$ et par conséquent le symbole $\exp(i\Phi_\pm)$ de $J_\pm$ appartient à la classe $\mathcal{S}^0_{\rho,1-\rho}$. De ce fait l'étude réalisé dans la thèse nécessitait de développer des outils de calcul symbolique spécifiques pour traiter le cas $0 < \rho \leq 1/2$. A cet effet, des classes d'OPD à symbole oscillant $\mathcal{C}^m(\Phi)$ furent introduites par Yafaev [Yaf00], classes tenant compte de la structure particulière du symbole de $J_\pm$

$$\mathcal{C}^m(\Phi) = \{\exp(i\Phi(x,\xi))a(x,\xi) | \Phi \in \mathcal{S}^{1-\rho}_{1,0}, \quad a \in \mathcal{S}^m_{1,0}\} \subset \mathcal{S}^0_{\rho,1-\rho}. \tag{11}$$

Ces classes permettent de traiter l'ensemble des opérations à faire pour appliquer la théorie des perturbations lisses aux modificateurs $J_\pm$ comme la composition avec des OPD classiques ou avec l'adjoint d'un OPD à symbole oscillant :

$$A_1 \in \mathcal{C}^{m_1}(\Phi), A_2 \in \mathcal{S}^{m_2}_{1,0} \Rightarrow A_1A_2 \text{ et } A_2A_1 \in \mathcal{C}^{m_1+m_2}(\Phi), \tag{12}$$
$$A_j \in \mathcal{C}^{m_j}(\Phi), j = 1,2 \Longrightarrow A_1^*A_2 \text{ et } A_2A_1^* \in \mathcal{S}^{m_1+m_2}_{1,0}. \tag{13}$$

En particulier Pour $A \in \mathcal{C}^m(\Phi)$ on récupère, en appliquant (13) à A^*A, des critères de continuité ($m \leq 0$) et de compacité ($m < 0$).

Un second problème techniquement difficile apparaît lors de la restriction d'OPD de classe $\mathcal{S}^m_{\varrho,\delta}$ à une hypersurface (ici la sphère). Si lorsque $m < -1$ ce problème est résolu facilement grâce au théorème de trace de Sobolev, il n'en va pas de même dans le cas critique $m = -1$ nécessaire au traitement du terme $A(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)J_+^*T_-\Gamma_0^*(\lambda)$ dans la matrice de diffusion $S(\lambda)$. Dans ce cas on a besoin d'une hypothèse supplémentaire sur l'amplitude $\mathbf{a}(x,\xi,\xi') = \overline{j_+(x,\xi)}t_-(x,\xi')$ de l'opérateur $J_+^*T_-$. Dans le cas où $\varrho > 1/2 > \delta$ cette hypothèse peut être formulé simplement, comme dans [LY98], en demandant l'annulation du symbole principal $a(x,\xi) = \mathbf{a}(x,\xi,\xi)$ de $J_+^*T_-$ dans un voisinage du fibré conormal à ξ :

$$a(x+t\xi,\xi) = 0, \quad \forall |t||\xi| \geq c|x| > 0, \quad \forall (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^d, \quad |\xi| = \sqrt{\lambda}. \tag{14}$$

Dans le cas général ($\varrho \leq \delta$) on n'a plus à notre disposition de notion de symbole principal pour l'opérateur $J_+^* T_-$ et on doit se résoudre à travailler avec l'amplitude $\mathbf{a}$. Il est alors pratique d'utiliser, pour chaque portion de sphère $\mathcal{V}$, une carte locale adaptée au problème : la projection orthogonale sur l'hyperplan Λ_{ω_0} orthogonal à la direction $\omega_0 \in \mathcal{V}$. En travaillant dans ce système de cartes locales de la sphère on arrive à définir explicitement l'amplitude de la restriction $A(\lambda)$ à partir de l'amplitude $\mathbf{a}$ par la formule :

$$\mathbf{a}^{\varkappa}(y,\zeta,\zeta';\lambda) = \frac{1}{4\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(z(\omega+\omega')/2 + y/k, k\omega, k\omega')dz \in \mathcal{S}^0_{\varrho,\delta,\delta} \tag{15}$$

où ζ et ζ' sont les projections de ω et ω' sur l'hyperplan Λ_{ω_0}.

Une extension de ces outils de calcul symbolique à des classes de symboles plus oscillantes permettraient de développer une théorie de la diffusion stationnaire pour des potentiels électriques oscillants comme par exemple

$$H = -\Delta + V(x), \quad V(x) = \lambda\frac{\sin(\mu|x|^\alpha)}{|x|^\beta}, \quad |x| \geq R > 0, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

pour des plages d'indices $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Le potentiel (16) ne rentre pas dans les cas étudiés dans la thèse puisque le gain de décroissance sur chaque dérivée de V n'est plus que de $1-\alpha \in (0,1)$ contrairement à l'hypothèse (1). Ce cas modèle a été étudié par de nombreux auteurs [DF78, Dev80, MU82] mais pour des plages d'indices qui ne recouvrent que très partiellement celle proposée ci-dessus. Formellement toute la méthode décrite dans la thèse s'applique de la même manière à condition de développer un calcul symbolique adéquat pour de nouvelles classes de symboles oscillants d'un type plus général que (11)

$$\mathcal{C}^m(\Phi) = \{\exp(i\Phi(x,\xi))a(x,\xi) | \Phi \in \mathcal{S}^{1-\beta}_{1-\alpha,\alpha}, \quad a \in \mathcal{S}^m_{1-\alpha,\alpha}\} \subset \mathcal{S}^m_{\beta-\alpha,1-(\beta-\alpha)}. \tag{17}$$

3.3 Effet Aharonov-Bohm

Le cas critique $\rho = 1$ dans (1) recèle de nombreux exemples de comportements spectraux intermédiaires entre les cas courte et longue portée. Parmi ces cas on trouve celui des champs magnétiques à support compact dont l'étude fut introduite par les physiciens Aharonov et Bohm [AB59]. Ce cas apparaît comme un modèle en physique, car du point de vue de la mécanique classique le problème est à courte portée alors que pour la mécanique quantique il est à longue portée (cf. [AB61, AB63]).

Je me suis d'abord intéressé au cas de la dimension $d = 2$ où la forme générale du potentiel magnétique associé à un champ à support compact est :

$$A(x) = a(\hat{x})\frac{(-x_2,x_1)}{|x|^2}, \quad \hat{x} = x/|x|, \quad \forall |x| \geq R > 0. \tag{18}$$

Ici a est une fonction supposée régulière sur le cercle unité, on identifie d'ailleurs fréquemment $\hat{x}$ à l'angle polaire θ_x de x. Des calculs explicites menés à partir de l'étude précédente ont permis de montrer que la partie principale de la matrice de diffusion est indépendante de l'énergie λ et s'exprime comme un OPD $S_0(\lambda)$ dont le symbole principal (une fonction $C^\infty(T^*\mathbb{S}^{d-1})$)

$$s_0^\flat(y,\omega) = \exp\left(i\frac{\omega_2 y_1 - \omega_1 y_2}{|y|} f(\theta_\omega)\right), \quad f(\theta_\omega) = \int_{\theta_\omega - \pi}^{\theta_\omega} a(\vartheta)d\vartheta. \tag{19}$$

Dans ce cas le spectre essentiel de $S(\lambda)$ correspond donc à la réunion de deux arcs du cercle qui sont les images de l'intervalle $f(\mathbb{R})$ par les fonctions $\nu \mapsto \exp(\pm i\nu)$. Selon les cas on peut obtenir toutes les situations possibles entre un spectre essentiel concentré en 1 point, ou un spectre recouvrant le cercle unité. J'ai pu aussi calculer explicitement le terme dominant dans la singularité diagonale de la section différentielle efficace

$$\forall \omega \neq \omega_0 \quad \Sigma_{diff}(\omega,\omega_0;\lambda) = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}|\mathrm{s}(\omega,\omega_0;\lambda)|^2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2(\phi/2)}{\sin^2(\theta/2)} + O\left(\frac{\ln(|\theta|)}{|\theta|}\right) \tag{20}$$

où $\theta = \theta_\omega - \theta_{\omega_0}$ et $\phi = (f(\theta_\omega) + f(\pi + \theta_\omega))$ est le flux du champ magnétique au travers de la section du solénoïde. Ceci généralise les résultats connus dans la littérature physique (cf. Henneberger [Hen80] et Ruisjsenaars [Rui83]) dans le cas d'un solénoïde circulaire $a(\hat{x}) = \phi/(2\pi)$, i.e. un champ radial, où la formule (20) est valide avec un terme de reste nul. Concernant le spectre de $S(\lambda)$ on obtient par notre méthode le résultat suivant :

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \left\{e^{i\phi/2}, e^{-i\phi/2}\right\}. \tag{21}$$

ce qui est compatible avec le résultat déjà connu dans le cas radial, à savoir que ce spectre est compsé de 2 valeurs propres de multiplicité infinie $e^{\pm i\phi/2}$. Contrairement aux travaux plus anciens où le caractère radial du potentiel est primordial ici, grâce à la méthode utilisée, le résultat est indépendant de toute perturbation à courte portée ajoutée au potentiel de départ ou encore de la présence d'un obstacle opaque autour du solénoïde. Ce travail, en collaboration avec D. Yafaev, a été publié dans *Journal of Physics A* [RY02].

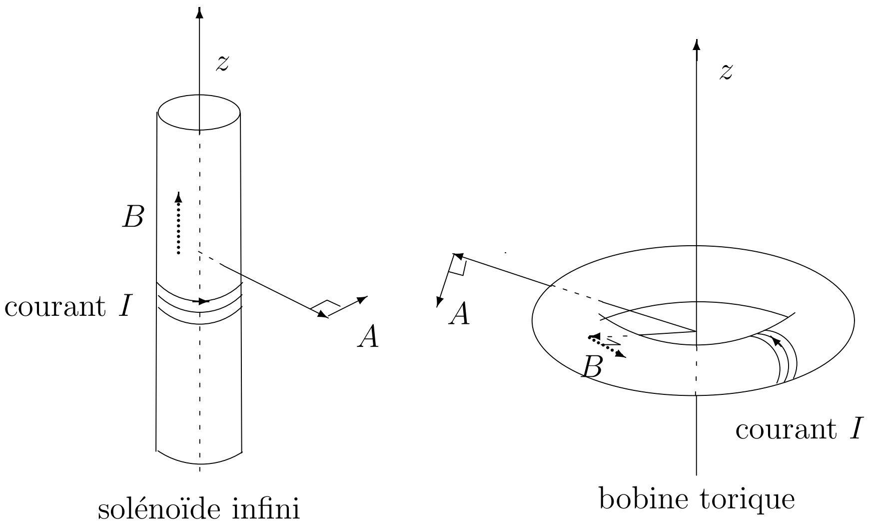

Fig. 1: Exemples de champs magnétiques à support compact

A l'heure actuelle je m'intéresse aux champs magnétiques à support compact en dimension $d = 3$. Contrairement à la dimension 2, le potentiel $A(x)$ associé à un tel champ ne peut pas dépendre uniquement de $|x|$, de ce fait l'équation de Schrödinger stationnaire $(H - \lambda)u = 0$ ne peut être résolue explicitement ce qui explique le peu de résultats existant dans la littérature pour $d = 3$. Dans ma thèse j'avais introduit l'exemple d'une bobine torique (cf. Figure 1), pour lequel le potentiel magnétique est donné, en coordonnées sphériques, par une expression assez simple

$$A_L(x) = \frac{a(\varphi_x)}{|x|}\mathbf{e}_{\varphi_x} \tag{22}$$

où φ_x est la colatitude associée à x et $\mathbf{e}_{\varphi_x}$ le vecteur orthoradial associé à φ_x. ici a est une fonction C^∞ et supposée positive. Sur cet exemple j'avais démontré que la partie principale de la matrice de diffusion se réduit à l'opérateur de multiplication, dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^2)$, par la fonction

$$s_0^\flat(\omega) = \exp\left(i\int_{\pi-\varphi_\omega}^{\varphi_\omega} a(\varphi)d\varphi\right) \tag{23}$$

ce qui correspond dans le noyau de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ à la présence d'une masse de Dirac (multipliée par la fonction (23)). Depuis, j'ai pu démontrer que, mis à part cette masse de Dirac, il n'existe pas d'autre singularité dans le noyau de la matrice de diffusion, ce qui, du point de vue physique, signifie que la section efficace d'une telle bobine est finie quelque soit la direction d'incidence. J'ai pu démontrer aussi que cette situation n'est pas exceptionnelle mais bien caractéristique des propriétés d'un champ magnétique à support compact en dimension strictement supérieur à 2. Ce travail fait l'objet d'un article publié dans *Journal of Physics A* [Rou03].

De nombreuses questions restent encore en suspend dans ce domaine de recherche. Une question d'intérêt serait de savoir s'il est possible d'étendre l'étude faite pour l'effet Aharonov-Bohm au cas plus général de l'effet Sagnac[†]. Cette voie de travail repose sur le fait que le phénomène de Aharonov-Bohm peut être vu comme une contribution du champ électromagnétique à l'effet Sagnac (cf. [Ana77]). Cet effet Sagnac se manifeste dans les référentiels animés d'une rotation par rapport à un référentiel inertiel. La difficulté dans ce cas provient de la structure du Hamiltonien décrivant l'évolution dans le référentiel tournant $H_\omega = -\Delta + i\omega(x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1})$ qui n'est plus à coefficients constants. De récents résultats de Enss [EKS02] ouvrent la voie à une étude de ce phénomène par la méthode stationnaire développée dans ma thèse.

3.4 Optique non-linéaire et modélisation

Étant actuellement PRAG à l'IUT de Lannion, je tente de valoriser au mieux mes compétences acquises dans le domaine de la recherche tout au long de ma formation doctorale. Malgré l'importance de la charge d'enseignement que j'assume, je poursuis

[†]Cet effet est utilisé en optronique pour la fabrication de gyroscopes lasers en fibre optique (appelés "gyrolasers").

mes activités recherches, principalement sur des sujets découlant directement de ma thèse mais je reste ouvert à toute possibilité d'évolution vers de nouvelles thématiques. Au cours des 4 années passées au sein de l'équipe *Équations aux Dérivées Partielles* (EDP) à Rennes, bien que cela n'apparaisse pas explicitement dans ma thèse, j'ai pu acquérir certaines compétences dans les domaines de *propagation d'onde pour des interactions non-linéaires*. Cette partie de mon activité est constituée d'échanges avec chercheurs (membres de l'équipe ou invités) travaillant directement sur ces sujets et en la participation à différents groupes de travail organisés au sein de l'IRMAR sur ce type de sujet ("théorie de la diffusion linéaire et non-linéaire" en 98/99 conduit par R. Carles, T. Jecko et F. Castella, et "mathématiques pour la physique des plasmas" initiée par F. Castella et E. Frenod en 00/01). Les problèmes liés à la propagation d'ondes lasers dans des fibres optiques tiennent une place de première importance dans le développement du pôle technologique Lannionnais et donc dans les thématiques développées par le laboratoire d'optronique de lannion (laboratoire qui regroupe à la fois des membres des départements mesures-physiques, génie-électrique de l'IUT de Lannion et des membres de l'ENSSAT Lannion). Dans le même soucis d'élargir mon champ de compétences au domaine de la simulation numérique, je travaille depuis cette année en collaboration avec A. Rahmouni (Maître de conférence à l'IUT de Lannion) sur des problèmes de PML (Perfectly Matched Layers) pour des équations hyperboliques .

Références

[AB59] Y. Aharonov et D. Bohm. *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory.* Phys. Rev. (2), **115**, 1959, pp. 485–491.

[AB61] Y. Aharonov et D. Bohm. *Further considerations on electromagnetic potentials in the quantum theory.* Phys. Rev. (2), **123**, 1961, pp. 1511–1524.

[AB63] Y. Aharonov et D. Bohm. *Further discussion of the role of electromagnetic potentials in the quantum theory.* Phys. Rev. (2), **130**, 1963, pp. 1625–1632.

[Ana77] J. Ananda. *Gravitationnal and rotationnal effects in quantum interference.* Phys. Rev. D, **15**, n° 6, 1977, pp. 1448–1457.

[BIN] *http ://www.maths.univ-rennes1.fr/~binet.*

[Dev80] A. Devinatz. *The existence of wave operators for oscillating potentials.* J. Math. Phys., **21(9)**, 1980, pp. 2406–2411.

[DF78] J. D. Dollard et C. N. Friedman. *Existence of the Moller Wave Operators for* $V(r) = \lambda \sin(\mu r^\alpha)/r^\beta$. Annals of Physics, **111**, 1978, pp. 251–266.

[EKS02] V. Enss, V. Kostrykin et R. Schrader. *Energy Transfer in Scattering by Rotating Potentials.* Preprint, 2002. disponible l'adresse :
http ://mpej.unige.ch/mp_arc/index-02.html.

[Hen80] Walter C. Henneberger. *Some aspects of the Aharonov-Bohm effect.* Phys. Rev. A (3), **22**, n° 4, 1980, pp. 1383–1388.

[IK85] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *Modified wave operators with time-independent modifiers.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **32**, n° 1, 1985, pp. 77–104.

[IK86] Hiroshi Isozaki et Hitoshi Kitada. *Scattering matrices for two-body Schrödinger operators.* Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo, **35**, n° 2, 1986, pp. 81–107.

[INR] *http ://www-rocq.inria.fr/scilab/.*

[Jen85] Arne Jensen. *Propagation estimates for Schrödinger-type operators.* Trans. Amer. Math. Soc., **291**, n° 1, 1985, pp. 129–144.

[JMP84] Arne Jensen, Éric Mourre et Peter Perry. *Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **41**, n° 2, 1984, pp. 207–225.

[LT87] Michael Loss et Bernd Thaller. *Scattering of particles by long-range magnetic fields.* Ann. Physics, **176**, n° 1, 1987, pp. 159–180.

[LY98] N. Lerner et D. R. Yafaev. *Trace theorems for pseudo-differential operators.* J. Anal. Math., **74**, 1998, pp. 113–164.

[Mou83] E. Mourre. *Operateurs conjugués et propriétés de propagation.* Comm. Math. Phys., **91**, n° 2, 1983, pp. 279–300.

[Mou81] E. Mourre. *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators.* Comm. Math. Phys., **78**, n° 3, 1980/81, pp. 391–408.

[MU82] K. Mochizuki et J. Uchiyama. *Time Dependant Representation of the Stationary Wave operators for "Oscillating" Long-range potentials.* Publ. RIMS, Kyoto univ., **18**, 1982, pp. 947–972.

[Nic91] François Nicoleau. *Théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence de champ magnétique.* Thèse, 1991.

[Nic94] François Nicoleau. *Matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **61**, n° 3, 1994, pp. 329–346.

[NR91] François Nicoleau et Didier Robert. *Théorie de la diffusion quantique pour des perturbations à longue et courte portée du champ magnétique.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5), **12**, n° 2, 1991, pp. 185–194.

[Rou03] Ph. Roux. *Scattering by a toroidal coil.* J. Phys. A, **36**, 2003, pp. 5293–5304.

[Rui83] S. N. M. Ruijsenaars. *The Aharonov-Bohm effect and scattering theory.* Ann. Physics, **146**, n° 1, 1983, pp. 1–34.

[RY02] Ph. Roux et D. R. Yafaev. *On the mathematical theory of the Aharonov-Bohm effect*. J. Phys. A, **35**, 2002, pp. 7481–7492.

[RY03] Ph. Roux et D. R. Yafaev. *The scattering matrix for the Schrödinger operator with a long-range electromagnetic potential*. J. Math. Phys., **44**, n° 7, 2003, pp. 2762–2786.

[Yaf98] D. R. Yafaev. *The scattering amplitude for the Schrödinger equation with a long-range potential*. Comm. Math. Phys., **191**, n° 1, 1998, pp. 183–218.

[Yaf00] D. R. Yafaev. *A class of pseudodifferential operators with oscillating symbols*. St. Petersburg Math. J., **11**, n° 2, 2000, pp. 375–403.