Exercice 1

Mains au poker

Un jeu de 52 est constitué de 4 enseignes ($\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$) et 13 figures (as,2,3,...10,V,D,R).
Au jeu de poker, une main est constituée de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.
Les honneurs sont les cartes de figure Valet, Dame, Roi.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Parmi ces mains :
   (a) Combien y a-t-il de mains avec un carré ? *ex.* $\boxed{1\clubsuit}$ $\boxed{1\diamondsuit}$ $\boxed{1\heartsuit}$ $\boxed{1\spadesuit}$ $\boxed{V\heartsuit}$
   (b) Combien y a-t-il de mains avec un full ? *ex.* $\boxed{R\clubsuit}$ $\boxed{R\diamondsuit}$ $\boxed{8\heartsuit}$ $\boxed{8\spadesuit}$ $\boxed{8\clubsuit}$
   (c) Combien y a-t-il de mains avec une double paire ? *ex.* $\boxed{D\clubsuit}$ $\boxed{D\diamondsuit}$ $\boxed{8\heartsuit}$ $\boxed{8\clubsuit}$ $\boxed{R\spadesuit}$
   (d) Combien y a-t-il de mains avec un brelan ? *ex.* $\boxed{V\clubsuit}$ $\boxed{V\diamondsuit}$ $\boxed{V\heartsuit}$ $\boxed{1\spadesuit}$ $\boxed{9\clubsuit}$
   (e) Combien y a-t-il de mains avec une paire ? *ex.* $\boxed{D\clubsuit}$ $\boxed{D\diamondsuit}$ $\boxed{7\heartsuit}$ $\boxed{9\spadesuit}$ $\boxed{V\clubsuit}$
   (f) Combien y a-t-il de mains avec une quinte flush ? *ex.* $\boxed{7\clubsuit}$ $\boxed{8\clubsuit}$ $\boxed{9\clubsuit}$ $\boxed{10\clubsuit}$ $\boxed{V\clubsuit}$
   (g) Combien y a-t-il de mains avec une suite ? *ex.* $\boxed{8\clubsuit}$ $\boxed{9\diamondsuit}$ $\boxed{10\heartsuit}$ $\boxed{V\spadesuit}$ $\boxed{D\diamondsuit}$
   (h) Combien y a-t-il de mains avec une couleur ? *ex.* $\boxed{1\heartsuit}$ $\boxed{7\heartsuit}$ $\boxed{10\heartsuit}$ $\boxed{D\heartsuit}$ $\boxed{R\heartsuit}$
3. (a) Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ?
   (b) Combien y a-t-il de mains avec au moins un trèfle ?
   (c) Combien y a-t-il de mains avec au moins un honneur ?
   (d) Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ou au moins un honneur ?
   (e) Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ou au moins un trèfle ?
   (f) Combien y a-t-il de mains avec au moins un as et au moins un honneur ?
   (g) Combien y a-t-il de mains avec au moins un as et au moins un trèfle ?

Correction

Exercice 1

1. nombre de mains différentes = « choisir 5 cartes parmi 52 » : $C_{52}^5 = 2598960$
2. Parmi ces mains :
   (a) nombre de mains avec un carré = « choisir 1 carré (parmi 13) et une autre carte (parmi 48) » :$C_{13}^1 \times C_{48}^1 = 624$

   (b) nombre de mains avec un full= « choisir 1 brelan et choisir une paire »mais attention :
   - choisir 1 brelan=« choisir une figure (parmi 13) et choisir 3 cartes (parmi les 4 de la figure) »
   - choisir 1 paire=« choisir une figure (parmi les 12 restantes) et choisir 2 cartes (parmi les 4 de la figure) »

   $$\underbrace{(C_{13}^1 \times C_4^3)}_{\text{un brelan}} \times \underbrace{(C_{12}^1 \times C_4^2)}_{\text{une paire}} = 3744$$

   (c) nombre de mains avec une double paire= « choisir deux paires (différente sinon c'est un carré !) et choisir une cinquième carte »

   $$\underbrace{(C_{13}^2 \times C_4^2 \times C_4^2)}_{2 \text{ paires } \neq} \times C_{44}^1 = 123552$$

   $$\underbrace{(C_{13}^1 \times C_4^2)}_{2^{\text{ière}} \text{ paire}} \times \underbrace{(C_{12}^1 \times C_4^2)}_{1^{\text{ième}} \text{ paire}} \times C_{44}^1 = 247104$$

   car on a mis un ordre sur les paires (ordre qui n'existe pas !).

   (c) nombre de mains avec un brelan=« Choisir un brelan et deux autres cartes (mais sans paire) »

   $$\underbrace{(C_{13}^1 \times C_4^3)}_{\text{choix brelan}} \times \underbrace{(C_{12}^2 \times 4^2)}_{\text{choix 2 autres cartes } \neq} = 54912$$

   ou

   $$\underbrace{(C_{13}^1 \times C_4^3)}_{\text{choix brelan}} \times \underbrace{(C_{48}^2 - C_{12}^1 \times C_4^2)}_{\substack{\text{choix 2 autres cartes} \\ \text{sans paires}}} = 54912$$

   ou encore

   $$\underbrace{(C_{13}^1 \times C_4^3)}_{\text{choix brelan}} \times \underbrace{\frac{(C_{48}^1 \times C_4^1)}{2}}_{\text{choix 1 paire}} = 54912$$

   attention la division par 2 est due à une ordre caché dans le raisonnement !

(d) nombre de mains avec une paire= « choisir une paire et choisir 3 autres cartes qui ne forment ni un brelan ni une autre paire »

$$\underbrace{(C_{13}^1 \times C_4^2)}_{\text{choix paire}} \times \underbrace{(C_{48}^3 - \underbrace{C_{12}^1 \times C_4^3}_{\text{sans brelan}} - \underbrace{C_{12}^1 \times C_4^2 \times C_{44}^1}_{\text{sans autre paire}})}_{\text{3 autres cartes}} = 1098240$$

une autre démonstration en remarquant que dans les 3 autres cartes on a 3 figures différentes (peu importe les enseignes)

$$\underbrace{(C_{13}^1 \times C_4^2)}_{\text{choix paire}} \times \underbrace{(C_{12}^3 \times 4^3)}_{\substack{\text{3 figures} \neq \\ \text{enseignes indifférente}}} = 1098240$$

(e) nombre de mains avec une quinte flush=« choisir une enseigne et choisir 5 cartes qui se suivent ». Pour choisir les 5 cartes à suivre il suffit de choisir la première. On peut choisir l'as, le 2 ,..., le 9 mais pas l'une des 4 dernières cartes. Ce qui donne : $C_4^1 \times 9 = 36$.

On peut aussi si on veut rajouter les 4 quintes flush royale (10,V,D,R,1).

(f) nombre de mains avec une suite=« choisir 5 cartes qui se suivent peu importe leur enseigne et retrancher les quintes flush »ce qui donne : $4^5 \times 9 - 36 = 9180$

(g) nombre de mains avec une couleur=« choisir une enseigne puis 5 cartes dans l'enseigne et retrancher les quintes flush »ce qui donne : $4 \times C_{13}^5 - 36 = 5112$

3. pour les au moins mieux vaut passer par l'événement contraire et soustraire le résultat au nombre total de mains :

(a) nombre de mains avec au moins un as : négation « aucun as »donc on a le choix parmi $52 - 4 = 48$ cartes

$$C_{52}^5 - C_{48}^5 = 2598960 - 1712304 = 886656$$

(b) nombre de mains avec au moins un trèfle :négation « aucun trèfle »donc on a le choix parmi $52 - 13 = 39$ cartes

$$C_{52}^5 - C_{39}^5 = 2598960 - 575757 = 2023203$$

(c) nombre de mains avec au moins un honneur :négation « aucun honneur »donc on a le choix parmi $52 - 12 = 40$ cartes

$$C_{52}^5 - C_{39}^5 = 2598960 - 850668 = 1940952$$

(d) nombre de mains avec au moins un as ou au moins un honneur : négation « aucun as et aucun honneur »donc on a le choix parmi $52-4-12 = 36$ cartes $C_{52}^5 - C_{36}^5 = 2598960 - 376992 = 2221968$

(e) nombre de mains avec au moins un as ou au moins un trèfle : négation « aucun as et aucun trèfle »donc on a le choix parmi $52 - 16 = 36$ cartes (attention à l'as de trèfle!) $C_{52}^5 - C_{36}^5 = 2598960 - 376992 = 2221968$

(f) nombre de mains avec au moins un as et au moins un honneur : négation « aucun as ou aucun honneur »$= A_0 \cup H_0$ si on note $A_0 =$« aucun as »et $H_0 =$« aucun honneur ». On a donc d'après la loi de la mesure que

$$\begin{aligned} \text{Card}(A_0 \cup H_0) &= \text{Card}(A_0) + \text{Card}(H_0) - \text{Card}(A_0 \cap H_0) \\ &= 1712304 + 850668 - 376992 = 2185980 \end{aligned}$$

le nombre de mains recherché est donc : $2598960 - 2185980 = 412980$

(g) nombre de mains avec au moins un as et au moins un trèfle : négation « aucun as ou aucun trèfle »$= A_0 \cup T_0$ si on note $A_0 =$« aucun as »et $T_0 =$« aucun trèfle ». On a donc d'après la loi de la mesure que

$$\begin{aligned} \text{Card}(A_0 \cup T_0) &= \text{Card}(A_0) + \text{Card}(T_0) - \text{Card}(A_0 \cap T_0) \\ &= 1712304 + 575757 - 376992 = 1911069 \end{aligned}$$

le nombre de mains recherché est donc : $2598960 - 1911069 = 687891$

il y a un piège dans les deux dernières questions. Si on fait le raisonnement suivant pour « mains avec au moins un as et au moins un honneur » :

$$\underbrace{C_4^1}_{\text{as}} \times \underbrace{C_{12}^1}_{\text{honneur}} \times \underbrace{C_{50}^3}_{\text{3 autres cartes}} = 940800 > 412980$$

car on a compté de nombreuses combinaisons en double ! Par exemple :

$$\underbrace{\boxed{1\clubsuit}\ \boxed{R\diamondsuit}}_{\text{as et honneur}}\ \underbrace{\boxed{7\heartsuit}\ \boxed{1\spadesuit}\ \boxed{10\clubsuit}}_{\text{le reste}} \Longleftrightarrow \underbrace{\boxed{1\spadesuit}\ \boxed{R\diamondsuit}}_{\text{as et honneur}}\ \underbrace{\boxed{7\heartsuit}\ \boxed{1\clubsuit}\ \boxed{10\clubsuit}}_{\text{le reste}}$$