Exercice 1
En utilisant les définitions :

$$\boxed{n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1, \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1), \quad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

1. simplifier et calculer A_{10}^1, $\dfrac{A_{10}^{10}}{9!}$, $\dfrac{A_{22}^3}{21}$, C_{10}^0, C_{10}^1, C_{10}^{10}, C_{17}^{16}, C_{19}^{17}
2. exprimer avec un seul factoriel $A = \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!}$
3. exprimer sous forme d'arrangement A_m^p : $B = \frac{(2n)!}{n!}$, $C = n(n+1)(n+2)$
4. simplifier $\dfrac{A_{12}^7 \times A_6^3}{10!}$, $\dfrac{C_{14}^8 \times A_9^6}{13 \times C_{12}^8 \times 9!}$

Exercice 2
Démontrer les formules suivantes en utilisant que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

1. $\forall n \geq p \geq 0, \quad C_n^p = C_n^{n-p}$
2. $\forall n \geq p \geq 0, \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
3. $\forall n \geq p \geq 1, \quad C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$
4. $\forall n \geq p \geq 2, \quad C_n^p = \dfrac{n(n-1)}{p(p-1)} C_{n-2}^{p-2}$

Exercice 3
Utilisation de la formule du binôme de Newton :$(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

1. Développer $(x+1)^5$, $(2-x)^6$
2. Calculer (en fonction de n) $S_n = \sum_{k=0}^n C_n^k$
   Indication : *Choisir des valeurs pour a et b dans la formule du binôme*
3. Calculer (en fonction de n) $T_n = \sum_{k=0}^n k C_n^k$
   Indication : *utiliser que* $C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ *pour* $k \geq 1$, *et la valeur de* S_{n-1}
4. Calculer (en fonction de n) $U_n = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k$
   Indication : *utiliser* $k^2 = k(k-1) + k$, $C_n^k = \dfrac{n(n-1)}{k(k-1)} C_{n-2}^{k-2}$ *pour* $k \geq 2$, T_n

Exercice 4
Démonstration par récurrence de : $\forall p, n \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 \leq p \leq n, \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$

1. Pour $p = 2$ et $n = 5$ mettre en évidence dans le tableau de Pascal les coefficients de la somme $\sum_{k=p}^n C_k^p$ et le coefficient C_{n+1}^{p+1}, et vérifier la formule
2. Pour n fixé, vérifier l'hypothèse de départ $\mathcal{P}_0$ où on a pris comme hypothèse de récurrence : $\mathcal{P}_n : \left[\forall n \geq p \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1} \right]$
3. Démontrer que $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

<u>Exercice</u> 5

Soit $q \in [0,1[$

1. Redémontrer la formule pour la somme d'une série géométrique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

   Indication : *Développer les sommes* $S_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n$ *puis* qS_n *et* $(1-q)S_n$

2. De même démontrer que

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{S_n - 1 - nq^{n+1}}{1-q} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

   Indication : *Développer les sommes* $T_n = q + 2q^2 + 3q^3 \cdots + nq^n$ *puis* qT_n *et* $(1-q)T_n$

3. De même démontrer que

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 q^k = \frac{2T_n - S_n + 1 - n^2 q^{n+1}}{1-q} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}$$

   Indication : *Développer* $U_n = q + 4q^2 + 9q^3 \cdots + n^2 q^n$ *puis* qU_n *et* $(1-q)U_n$

<u>Exercice</u> 6

série exponentielle

On rappelle que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge et $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

1. Calculer $\displaystyle T = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{x^k}{k!}$

   Indication : *Développer la somme et mettre en facteur* x

2. Calculer $\displaystyle U = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\frac{x^k}{k!}$

   Indication : *Utiliser que* $k^2 = k(k-1) + k$ *et puis la même méthode que pour* T.