

Formule sommatoire de Poisson et application aux séries de Fourier

Référence : [Gou08] p.272-273.

Théorème 0.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

quand $|x| \rightarrow +\infty$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$$

où $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$$

Corollaire 0.1.1 (Application) $\forall s > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi k^2}{s}}$$

Démonstration

du théorème

\rightsquigarrow La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de \mathbb{R} car par hypothèse il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour $|x| \geq 1$, donc on a :

$$\forall K > 0, \forall x \in [-K, K], \forall n \in \mathbb{Z}, |n| > K+1, |f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

et on reconnaît le terme général d'une série convergente (série de Riemann).

En particulier cette série converge simplement sur \mathbb{R} . Notons alors F sa limite.

\rightsquigarrow De la même façon, on montre que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} .

\rightsquigarrow On peut donc appliquer le théorème de dérivation sur les suites de fonctions, car on a :

- la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement vers F ;
- la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge uniformément ;
- les fonctions $f_n = f(\cdot + n)$ sont de classe C^1 ;

Ainsi on en déduit que F est de classe C^1 sur tout segment de \mathbb{R} (donc sur \mathbb{R} par continuité).

\rightsquigarrow De plus, F est 1-périodique car si on fixe $x \in \mathbb{R}$, on a $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=-N}^N f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

Donc en faisant $N \rightarrow +\infty$, on en déduit que $F(x+1) = F(x)$.

\rightsquigarrow Les coefficients de Fourier de F sont donnés par $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
 c_n(F) &= \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi nt} dt \quad \text{par 1-périodicité;} \\
 &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)e^{-2i\pi nt} dt \quad \text{par définition de } F; \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi nt} dt \quad \text{par théorème d'interversion;} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)e^{-2i\pi n(t-n)} dt \quad \text{via le changement de variable } t \mapsto t-n; \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)e^{-2i\pi nt} e^{2i\pi n^2} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi nt} dt = \widehat{f}(n)
 \end{aligned}$$

(l'interversion est justifiée car la série de fonctions définissant F converge uniformément sur $[0, 1]$ et que l'intégrale converge absolument au vu des conditions satisfaites par f).

\rightsquigarrow Comme F est de classe C^1 , sa série de Fourier converge uniformément vers F , d'où le résultat.

de l'application

Soit $\alpha > 0$, appliquons la formule sommatoire de Poisson à la fonction $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$.

On a $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(n) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi nt} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-2i\pi n \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} dt \quad \text{via le changement de variable } t \mapsto \frac{t}{\sqrt{\alpha}}; \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2 + 2i\pi n \frac{t}{\sqrt{\alpha}})} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t + \frac{i\pi n}{\sqrt{\alpha}})^2} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}} dt \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

On applique maintenant la formule de Poisson en $x = 0$, ce qui nous donne :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$$

Cette relation est vraie $\forall \alpha > 0$, donc en faisant $\alpha = \pi s$, on obtient le résultat voulu.

Lemmes utilisés ou pas Attention les conventions diffèrent de celles utilisées dans le développement.

Théorème 0.2 (de Jordan-Dirichlet) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique, continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction :

$$h \mapsto \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$$

soit bornée au voisinage de 0.

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int_0}$ converge et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int_0} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

Démonstration \rightsquigarrow Quitte à effectuer la translation $t \mapsto t+t_0$, on peut supposer que $t_0 = 0$.

\rightsquigarrow Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=-n}^n c_k(f)$ et $u_n = s_n - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$.

Montrons que $u_n \rightarrow 0$.

\rightsquigarrow On a :

$$2\pi s_n = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt$$

où $\forall t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$ est le noyau de Dirichlet (ici le théorème d'inversion s'applique bien comme dans la démonstration de la formule sommatoire de Poisson).

On peut montrer que D_n vérifie la relation $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

\rightsquigarrow Comme D_n est paire (car quotient de deux sinus), on a :

$$\int_{-\pi}^0 f(t) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} f(-t) D_n(t) dt$$

Donc :

$$2\pi s_n = \int_0^{\pi} (f(t) + f(-t)) D_n(t) dt$$

D'où :

$$\begin{aligned} 2\pi u_n &= 2\pi s_n - \pi(f(0^+) + f(0^-)) \\ &= \int_0^{\pi} (f(t) + f(-t)) D_n(t) dt - \int_0^{\pi} (f(0^+) + f(0^-)) D_n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} (f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)) D_n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} g(t) \sin((2n+1)\frac{t}{2}) dt \end{aligned}$$

où

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

est une fonction continue par morceaux sur $]0, \pi]$ et bornée sur un voisinage de 0 d'après les hypothèses du théorème.

Ainsi la fonction g est donc intégrable sur $]0, \pi]$ et le lemme de Riemann-Lebesgue entraîne que $2\pi u_n \rightarrow 0$. D'où le résultat.

Corollaire 0.2.1 Si f est 2π -périodique et C^1 par morceaux, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en ce point x vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

En particulier, si f est continue en x , la série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$.

Lemme 0.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique, continue et C^1 par morceaux. On définit la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\phi(t) = f'(t)$ si f est dérivable en t et $\phi(t) = \frac{f'(t^+) + f'(t^-)}{2}$ sinon.

Alors les coefficients de Fourier de ϕ vérifient la relation : $c_n(\phi) = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration Soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ telle que f soit C^1 sur $[x_{k-1}, x_k]$ pour tout k . En intégrant par parties, on obtient pour tout k :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi(t) e^{-int} dt = [f(t) e^{-int}]_{x_{k-1}}^{x_k} + in \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) e^{-int} dt$$

Puisque la fonction f est continue, on obtient en sommant sur k :

$$c_n(\phi) = \int_0^{2\pi} \phi(t) e^{-int} dt = [f(t) e^{-int}]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = inc_n(f)$$

D'où le résultat.

Théorème 0.3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique, continue et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} .

Démonstration D'après le lemme précédent, on a $c_n(\phi) = inc_n(f)$, ie ici $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$|c_n(f)| = \left| \frac{c_n(\phi)}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|c_n(\phi)|^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Et comme la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)|^2$ converge, on en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge, d'où le résultat d'après l'égalité de Parseval.

Théorème 0.4 (Égalité de Parseval) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique, continue par morceaux. Alors les séries $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(f)|^2$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n(f)|^2$ convergent et on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Théorème 0.5 (de dérivation sous le signe somme) On considère une série de fonctions $\sum g_n$ (où les fonctions $g_n : [a, b] \rightarrow E$, où E est un espace de Banach) telle que :

- les fonctions g_n sont de classe C^1 ;
- la série $\sum_n g'_n$ converge normalement sur $[a, b]$;
- il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $\sum_n g_n(x_0)$ converge ;

Alors la série $\sum_n g_n$ converge normalement sur $[a, b]$ vers une fonction C^1 sur $[a, b]$ et on a :

$$\sum_n g'_n = \left(\sum_n g_n \right)'$$

Théorème 0.6 (Interversion somme intégrale) Soit $\sum_n g_n$ une série de fonctions continues d'un segment $[a, b]$ dans un espace de Banach E , qui converge normalement sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b g_n(t) dt \right)$$

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2008.