

Traitement Numérique du Signal (Partie 2)

Support de cours

Olivier SENTIEYS

sentieys@enssat.fr

<http://r2d2.enssat.fr/enseignements/Tns/Tns.php>



Plan du cours Partie II

IV. Analyse des filtres numériques

1. Spécification, classification, représentation
2. Analyse fréquentielle
3. Structures des filtres RII et RIF

V. Transformées en TNS

1. TFD, convolution linéaire
2. TFR : Transformée de Fourier Rapide

VI. Quantification - évaluation de la précision

1. Quantification
2. Effets de la quantification en TNS

2

Plan du cours Partie II (suite)

VII. Synthèse des filtres numériques RII

1. Invariance Impulsionnelle
2. Transformation Bilinéaire

VIII. Synthèse des filtres numériques RIF

1. Introduction
2. Filtres à Phase Linéaire
3. Méthode du Fenêtrage
4. Échantillonnage en Fréquence

3

Plan du cours (fin)

IX. Analyse spectrale

1. Effets de la troncature
2. Caractéristiques des fenêtres
3. Influence sur l'analyse

X. Systèmes multi-cadences

1. Définition
2. Décimation
3. Interpolation

4

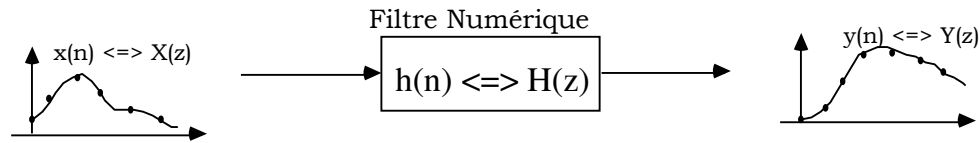
IV. Analyse des filtres numériques

1. Spécification, classification, représentation
2. Analyse fréquentielle
3. Structures des filtres RII et RIF

5

Définition

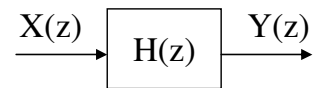
- Système Linéaire Discret (SLD) modifiant la représentation temporelle et fréquentielle de signaux



1. Introduction

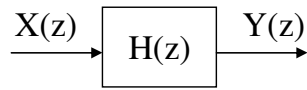
Un filtre numérique peut être représenté par :

- une fonction de transfert en z : $H(z) = Y(z) / X(z)$

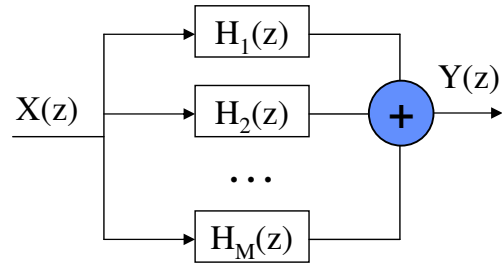


Notes :

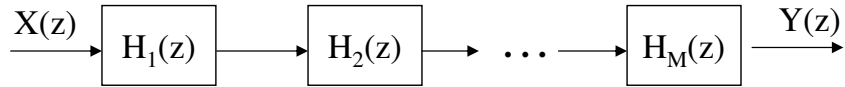
1 Introduction



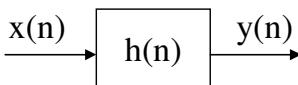
a) Forme directe



b) Forme parallèle



c) Forme cascade

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)h[(n-k)T]$$
$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$$


Notes :

si $x(n) = \delta(n)$ alors $y(n) = h(n)$

– une équation aux différences (récursive ou non récursive)

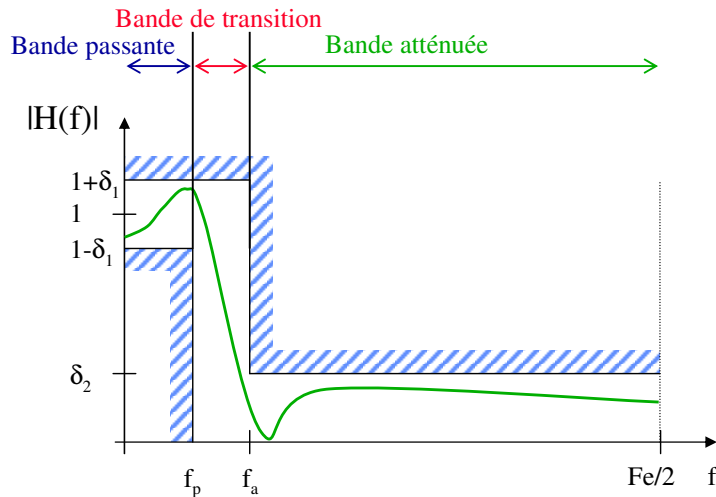
$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i \cdot x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i \cdot y(n-i)$$

Notes :

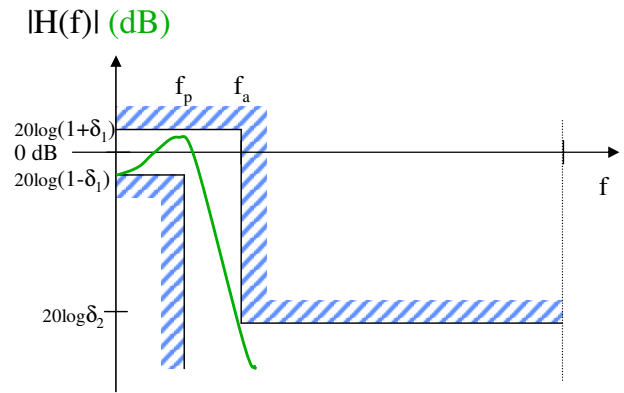
2. Spécification d'un filtre numérique

– Gabarit fréquentiel

Passé-Bas (ou Passé-Haut) défini par sa sélectivité, son ondulation en BP et son atténuation en BA



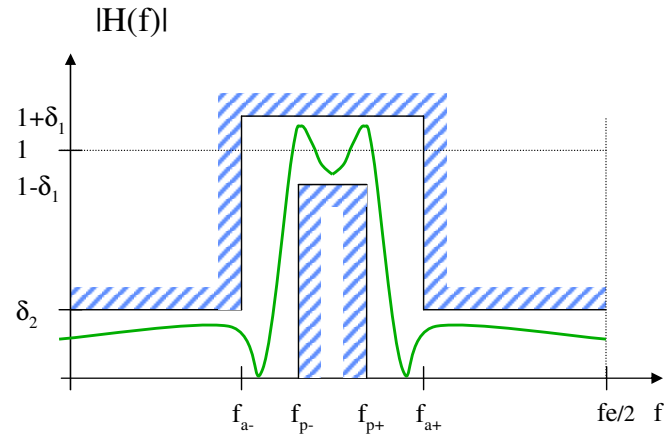
a) Gabarit fréquentiel linéaire



b) Gabarit fréquentiel en dB

Notes :

Passe-Bande (ou Réjecteur de Bande) défini par sa fréquence centrale, sa sélectivité, son ondulation en BP et son atténuation en BA



Notes :

3 Classification des filtres numériques

Un filtre numérique peut être classé selon :

– la durée de sa réponse impulsionnelle

finie : les filtres **RIF** ont leur réponse impulsionnelle à support fini

i.e. $h(n) = 0$ pour $n < 0$ et $n > N$

infinie : les filtres **RII** ont leur réponse impulsionnelle à support infini

i.e. $h(n) \neq 0 \forall n$

– le type de représentation temporelle

récurifs : la sortie $y(n)$ dépend de l'entrée courante, des entrées précédentes et des sorties précédentes

non récurifs : la sortie $y(n)$ ne dépend que de l'entrée courante et des entrées précédentes

Notes :

3.1 Filtres numériques non récursifs (ou transversaux)

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} = \sum_{n=0}^M h(n) z^{-n}$$

$$\Rightarrow h(n) = \sum_{i=0}^M b_i \delta(n-i)$$

Les coefficients b_n du filtre sont les valeurs de la RI ($h(n) = b_n$). Ceci montre qu'un filtre non récursif est à **Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)**.

M est appelée la longueur du filtre.

Notes :

• Principales propriétés

- Les RIF sont toujours stables (pas de pôles)
- Les RIF peuvent avoir une caractéristique de phase linéaire
 - Retard constant en fréquence (temps de propagation de groupe)
 - Pas de distorsion harmonique
 - Symétrie de la RI
- A sélectivité équivalente, ils sont toujours plus coûteux (en temps de calcul) que leur équivalent RII

Notes :

3.2 Filtres numériques récurrents

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$
$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

En pratique on a $N=M$, N est appelée l'ordre du filtre.

Notes :

- Si $N(z)$ n'est pas divisible par $D(z)$ (cas général), on a un nombre infini de termes dans la division polynomiale.

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{-i} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

Les coefficients c_n sont les valeurs de la RI ($h(n) = c_n$). Ceci montre qu'un filtre récurrent est, dans le cas général, à **Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)**.

- Si $N(z)$ est divisible par $D(z)$ (cas particulier), on a un nombre fini de termes dans la division polynomiale. Dans ce cas, le filtre est RIF.

- **Exemple : filtre moyenneur**

Notes :

- Si $N(z)=1$: filtre tout-pôle
- Si $D(z)=1$: filtre RIF

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

• Principales propriétés

- Les RII peuvent être instables : structure à base de pôles et de zéros

$$H(z) = b_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$

- Bande de transition faible
- Synthèse par réutilisation des méthodes analogiques
- Instabilité numérique due au rebouclage : forme cascade plus stable

Notes :

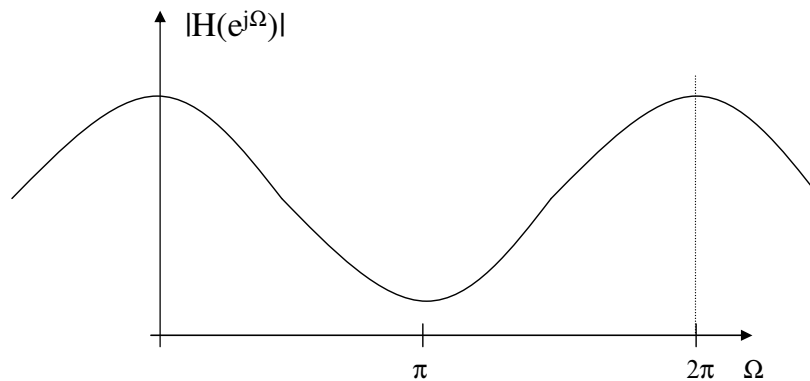
4. Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle est l'étude du module, de la phase et du temps de propagation de groupe du filtre H.

$$H(e^{j\Omega}) = H(z) \Big|_{z = e^{j\Omega}}$$

Ω est la pulsation relative : $\Omega = \omega T = 2\pi f T$

La fonction de transfert en fréquence $H(e^{j\Omega})$ est périodique de période 2π .

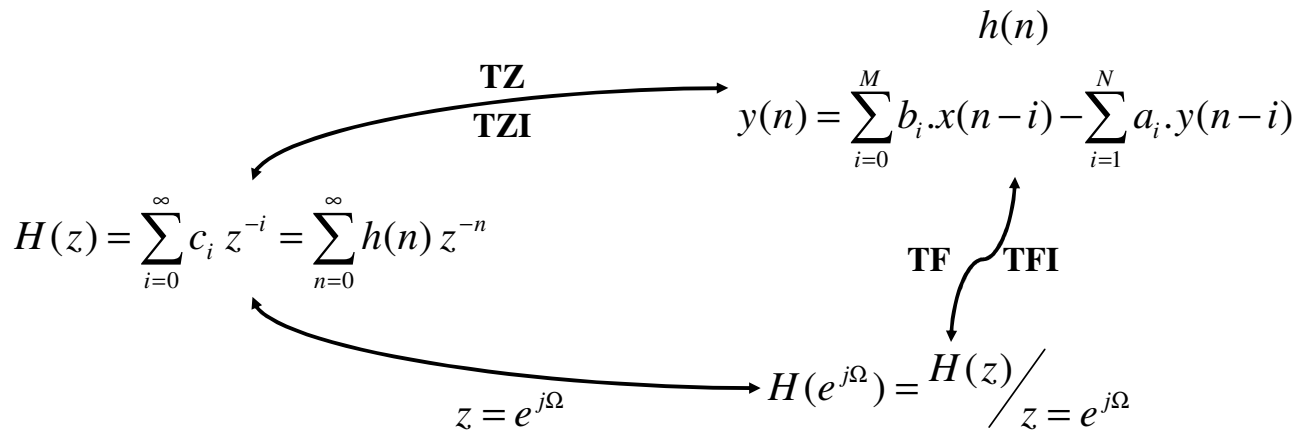


Notes :

Conclusion

Trois domaines de représentation

- Temporel $h(n)$, équation aux différences
- Fonction de transfert en z , diagramme des pôles/zéros
- Fréquentiel $H(\Omega)$, module, phase



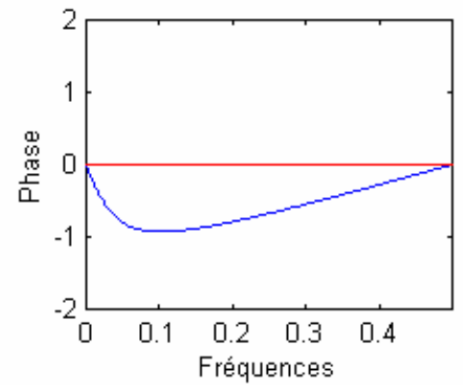
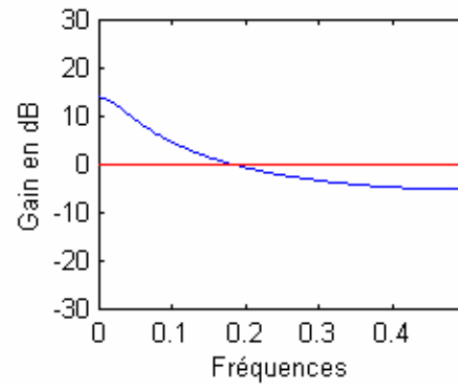
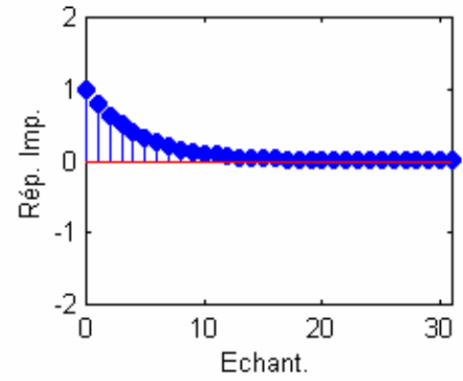
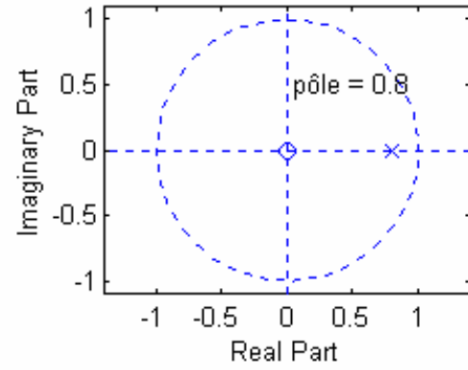
Notes :

Exemple 1 pordre1.avi

$$H(z) = \frac{z}{z - a}$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq a \leq 1$$



Notes :

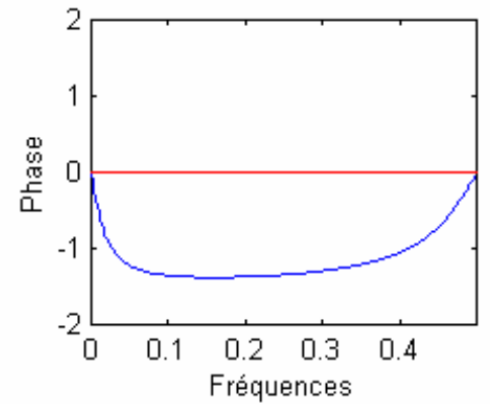
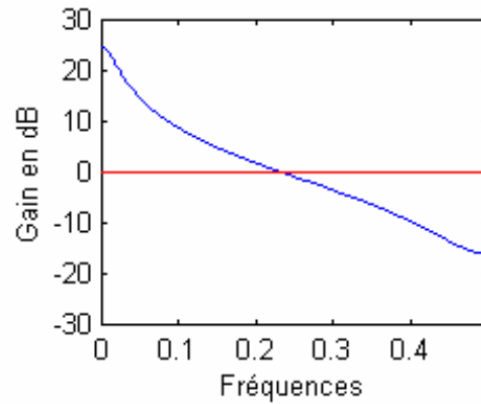
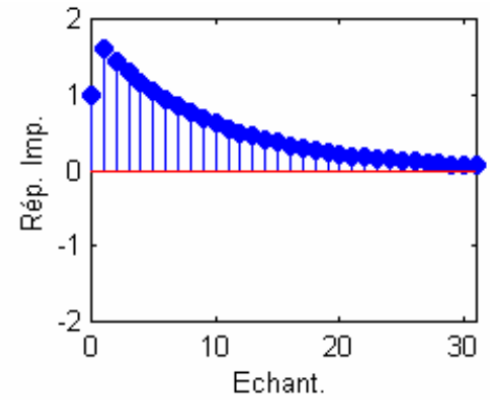
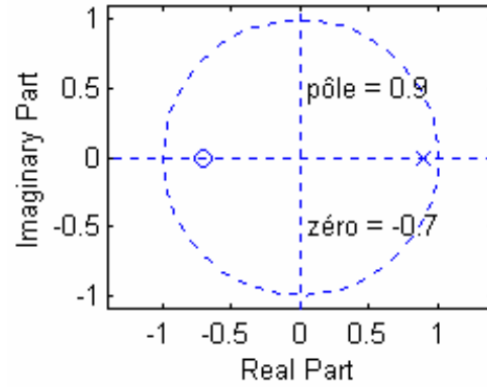
Exemple 2

[pzordre1.avi](#)

$$H(z) = \frac{z}{z - a}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$-0.9 \leq a, b \leq 0.9$$



Notes :

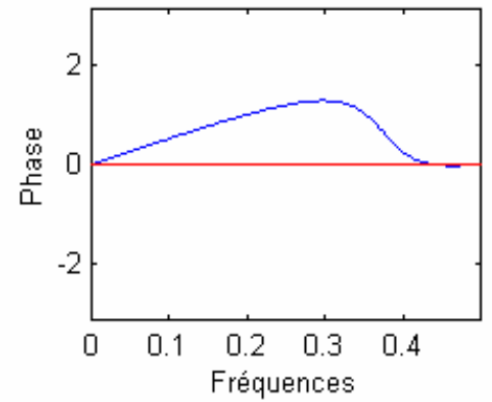
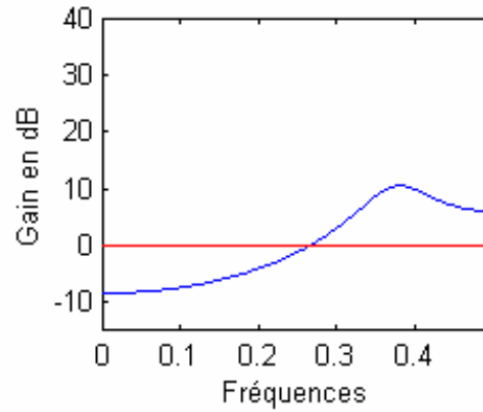
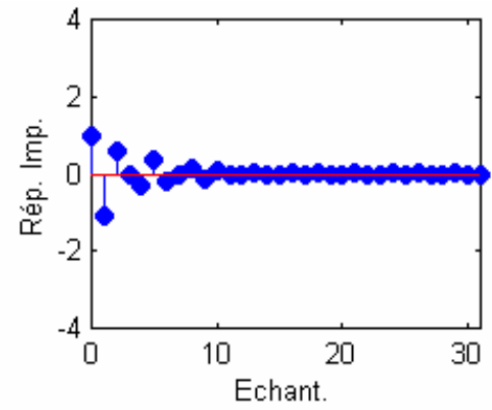
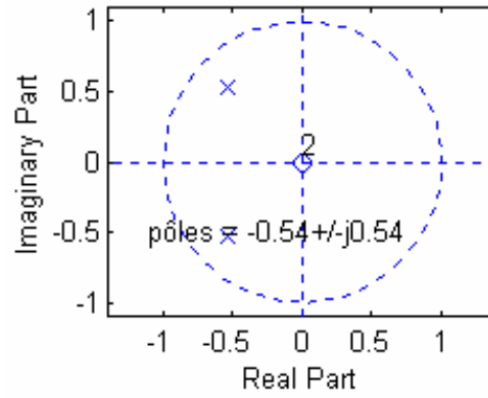
Exemple 3

paordre2.avi

$$H(z) = \frac{z}{(z-p)(z-p^*)}$$

$$p \in \mathbb{C}$$

$$|p| \leq 1$$



Notes :

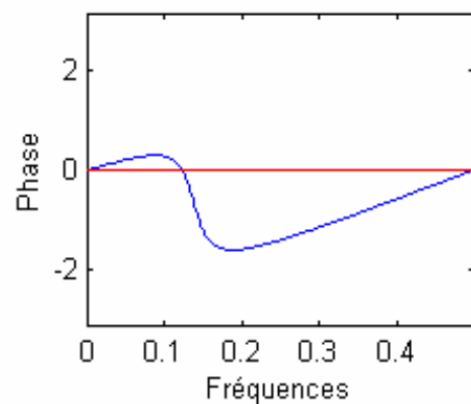
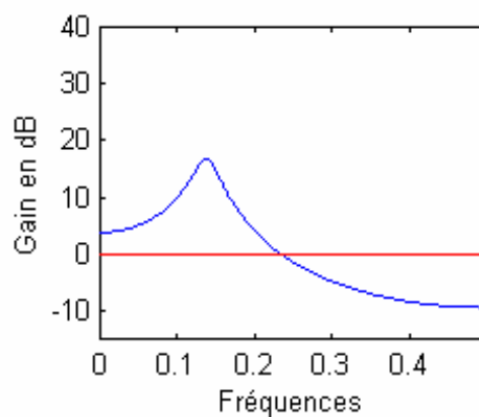
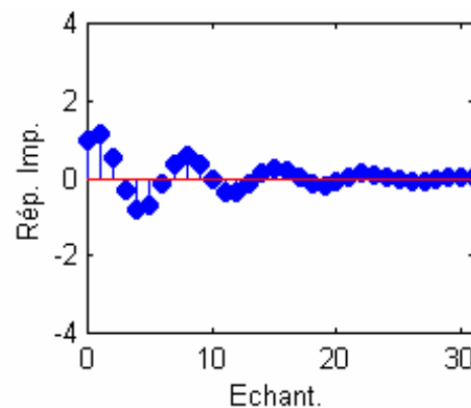
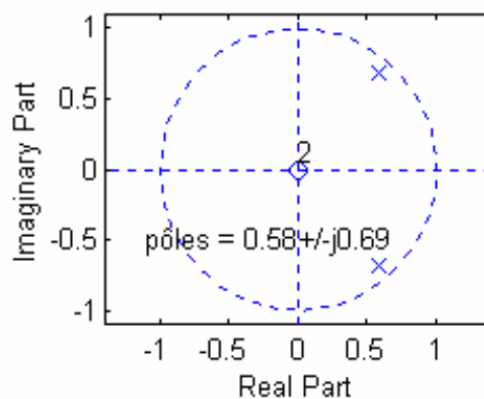
Exemple 4

prordre2.avi

$$H(z) = \frac{z}{(z-p)(z-p^*)}$$

$$p \in \mathbb{C}$$

$$|p| = 0.9$$

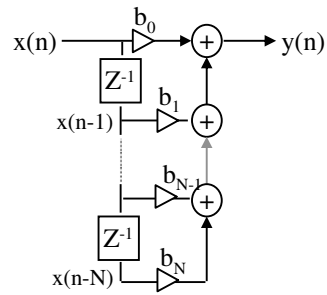


Notes :

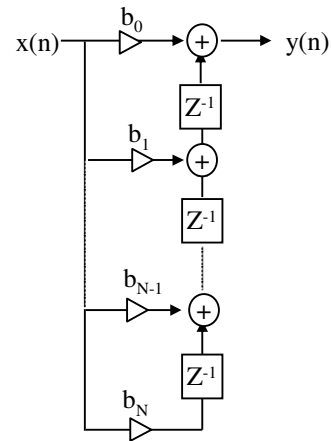
5. Structures de réalisation

– Filtrés RIF

$$y(n] = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i]$$



a) Structure directe



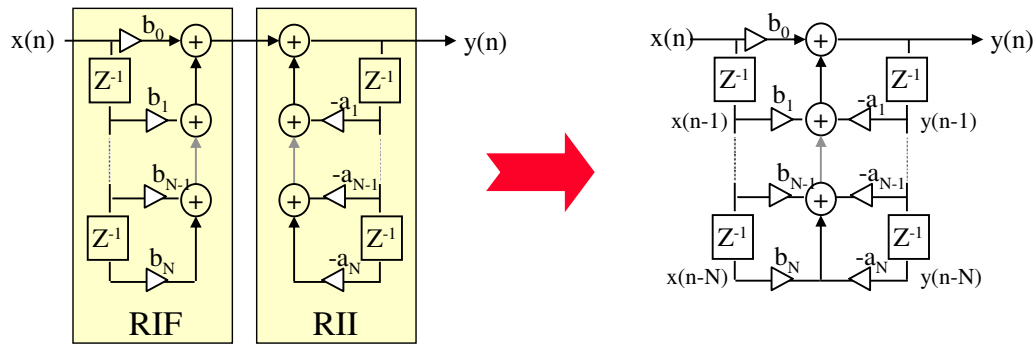
b) Structure transposée

Notes :

– Filtres RII

$$y(n] = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = N(z) \times \frac{1}{D(z)} = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \times \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

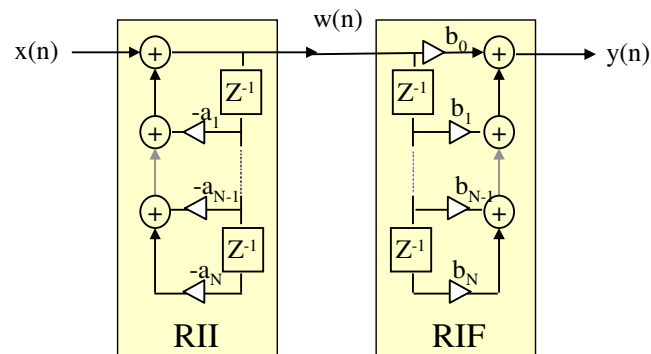


a) Structure directe

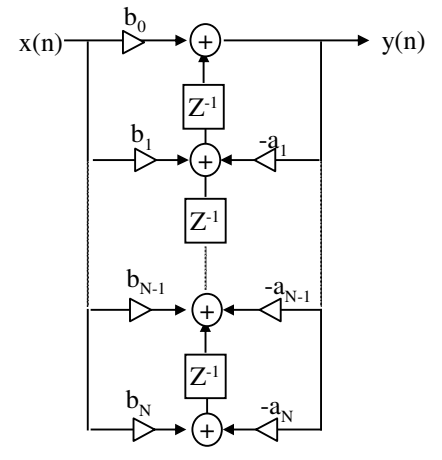
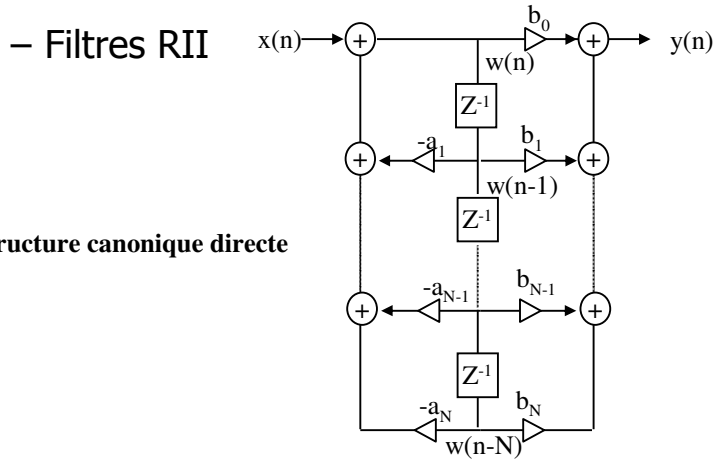
Notes :

– Filtres RII
$$H(z) = \frac{1}{D(z)} \times N(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \times \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}$$

$$\begin{cases} W(z) = \frac{1}{D(z)} \cdot X(z) \\ Y(z) = N(z) \cdot W(z) \end{cases} \quad \begin{cases} w(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i w(n-i) \\ y(n) = \sum_{i=0}^N b_i w(n-i) \end{cases}$$

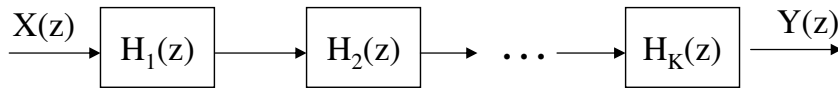


Notes :



– Forme cascade de filtres du second ordre

$$H(z) = \prod_{i=1}^{\frac{N+1}{2}} H_i(z) = \prod_{i=1}^{\frac{N+1}{2}} \frac{b_{i,0} + b_{i,1}z^{-1} + b_{i,2}z^{-2}}{1 + a_{i,1}z^{-1} + a_{i,2}z^{-2}}$$



Notes :

V. Transformées en TNS

1. TFD, convolution linéaire
2. TFR : Transformée de Fourier Rapide

Notes :

V Transformées en TNS



1 Rappels

• TFSD : Transformée de Fourier d'un Signal

Discret $X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jn\omega T}$ **$x(nT)$ non périodique**

$$\left\{ \begin{array}{l} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jn\Omega} \\ x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \end{array} \right.$$

• Propriétés

- Linéarité
- Décalage en temps/fréquence
- Produit de convolution en temps/fréquence
- Théorème de Parseval
- Transformées de fonctions réelles

Notes :

V Transformées en TNS

2 Transformée de Fourier Discrète



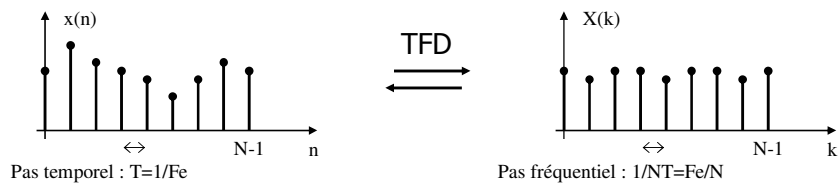
• TFD

- En pratique, on prend seulement un nombre fini d'échantillons de $x(nT)$. On ne peut donc obtenir qu'un nombre fini d'échantillons fréquentiels de $X(e^{j\Omega})$.

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi \frac{kn}{N}} & k = 0..N-1 \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+2j\pi \frac{kn}{N}} & n = 0..N-1 \end{cases}$$

$x(n)$ est considéré comme périodique de période N , $x(n) = x(n+qN)$

$X(k)$ est donc également périodique de période N , $X(k) = X(k+qN)$



Notes :

V Transformées en TNS

2 Transformée de Fourier Discrète



- **Propriétés**

- Linéarité
- Décalage en temps/fréquence
- Produit de convolution en temps/fréquence
 - Convolution discrète
 - Convolution circulaire (ou périodique)
- Théorème de Parseval
- Transformées de fonctions réelles

- **Relation entre TFSD et TFD**

- Signaux de durée finie ou périodique
- Cas général ?

Notes :

V Transformées en TNS

2 Transformée de Fourier Discrète



- Définition

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi \frac{kn}{N}} & k = 0..N-1 \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+2j\pi \frac{kn}{N}} & n = 0..N-1 \end{cases}$$

TFD
 $X(k) \Leftrightarrow x(n)$

$x(n)$ et $X(k)$ sont, dans le cas général, des nombres complexes.

- Forme Matricielle

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdot & W_N^{N-1} \\ \cdot & W_N^2 & W_N^4 & \cdot & W_N^{2(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdot & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} = \underline{W} \cdot \underline{x} \quad (2)$$

$$W_N = e^{\frac{-2j\pi}{N}}$$

$$W_N^{nk} = e^{\frac{-2j\pi}{N} kn}$$

Notes :

V Transformées en TNS

2 Transformée de Fourier Discrète



Propriétés des $W_N^n = e^{-2j\pi \frac{n}{N}}$

$$W_N^{k(N-n)} = (W_N^{kn})^* \quad (3.1)$$

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \quad (3.2) \text{ Périodicité}$$

$$W_N^{n+N/2} = -W_N^n \quad (3.3) \text{ Symétrie}$$

$$W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn} \quad (3.4)$$

Complexité de calcul

La TFD revient à calculer un produit matrice-vecteur où chaque élément est de type complexe. La complexité de calcul de la TFD est de N^2 multiplications, et de $N(N-1)$ additions sur des nombres complexes. Ceci revient à une complexité de $4N^2$ multiplications réelles et $N(4N-2)$ additions réelles. Cet algorithme se comporte donc en $O(N^2)$, mais ne possède pas de problèmes d'adressage car les $x(n)$ et les W_i sont rangés dans l'ordre en mémoire.

- En 1965, Cooley et Tuckey [COOLEY 65] ont publié un algorithme applicable quand N est le produit de 2 ou plusieurs entiers dont la complexité est en $O(N \log_2 N)$

Notes :

V Transformées en TNS

3 Transformée de Fourier Rapide



• TFR (FFT) partagée dans le temps (DIT)

$$X(k) = \sum_{n \text{ pair}} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n \text{ impair}} x(n) \cdot W_N^{nk}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \cdot W_N^{(2n+1)k}$$

En exploitant la propriété 3.4, on obtient :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot W_{N/2}^{nk} + W_N^k \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \cdot W_{N/2}^{nk} \quad (4)$$

$$X(k) = G(k) + W_N^k \cdot H(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

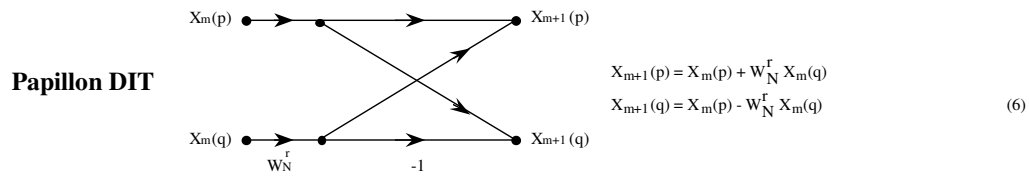
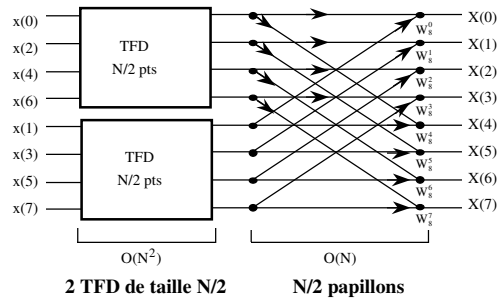
où $G(k)$: TFD sur $N/2$ points d'indices pairs,
 $H(k)$: TFD sur $N/2$ points d'indices impairs.

$$X(k + \frac{N}{2}) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot W_{N/2}^{n(k+N/2)} + W_N^{k+N/2} \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \cdot W_{N/2}^{n(k+N/2)}$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = G(k) - W_N^k \cdot H(k)$$

Notes :

... TFR DIT ...



Complexité d'un papillon : 1 multiplication complexe, 2 additions/soustractions complexes

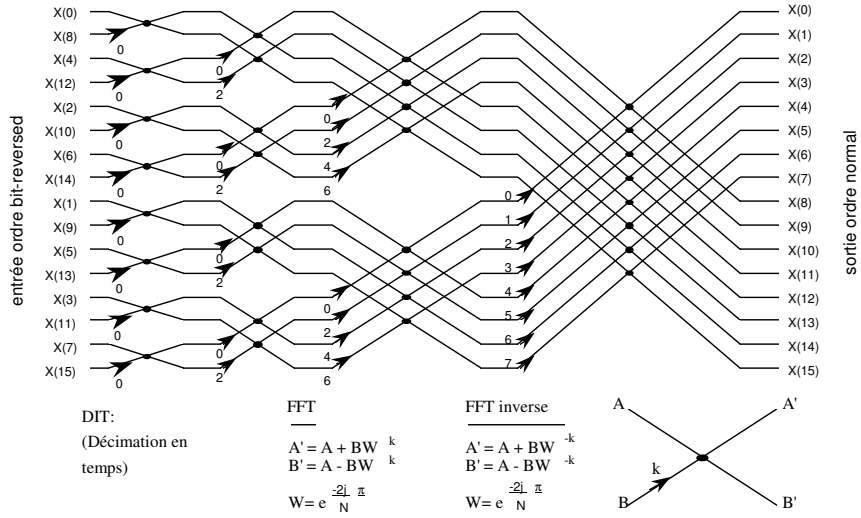
Notes :

... TFR DIT ...

$\frac{N}{2} \log_2 N$ multiplications de nombres complexes,
 $N \log_2 N$ additions/soustractions de nombres complexes, ou,
 $2 N \log_2 N$ multiplications de nombre réels,
 $3 N \log_2 N$ additions/soustractions de nombre réels.



FFT DIT RADIX-2 en place sur 16 points



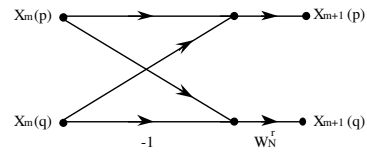
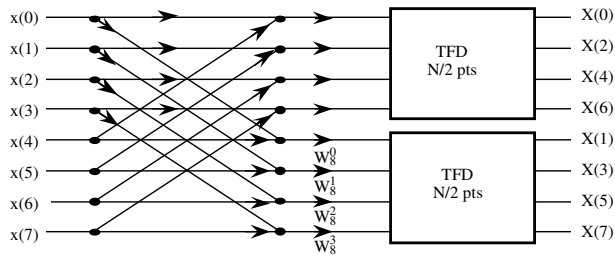
Notes :

• TFR (FFT) partagée dans les fréquences (DIF)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{nk} + W_N^{k \cdot N/2} \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + \frac{N}{2}) \cdot W_N^{nk} \quad (7)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + (-1)^k \cdot x(n + \frac{N}{2})] W_N^{nk}$$



$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + X_m(q)$$

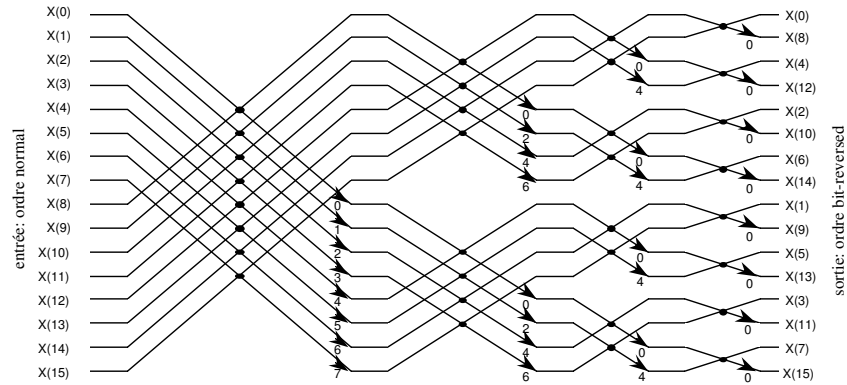
$$X_{m+1}(q) = [X_m(p) - X_m(q)] W_N^1 \quad (8)$$

Notes :

... TFR DIF



FFT DIF RADIX-2 en place sur 16 points



DIF:

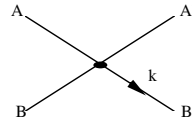
(Décimation en fréquence)

FFT

$$\begin{aligned} A' &= A + B \\ B' &= (A-B) W^{-k} \end{aligned}$$

FFT inverse

$$\begin{aligned} A' &= A + B \\ B' &= (A-B) W^{+k} \end{aligned}$$

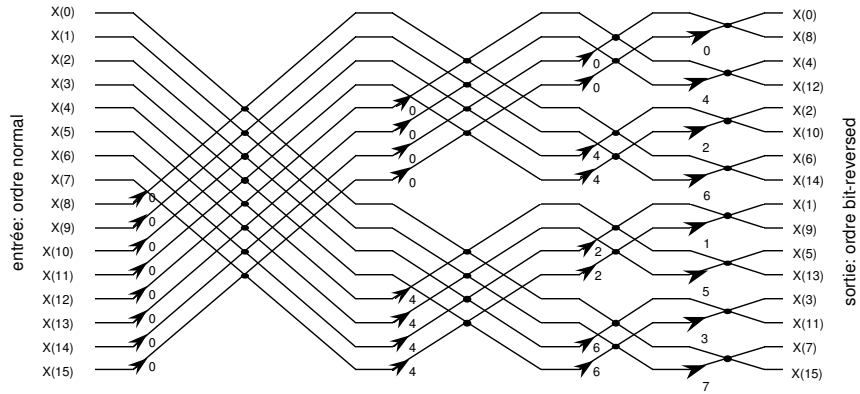


Notes :

Transformée de Fourier Rapide



FFT DIT RADIX-2 en place sur 16 points



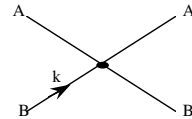
DIT:
(Décimation en temps)

FFT

$$\begin{aligned} A' &= A + BW^k \\ B' &= A - BW^k \end{aligned}$$

FFT inverse

$$\begin{aligned} A' &= A + BW^{-k} \\ B' &= A - BW^{-k} \end{aligned}$$

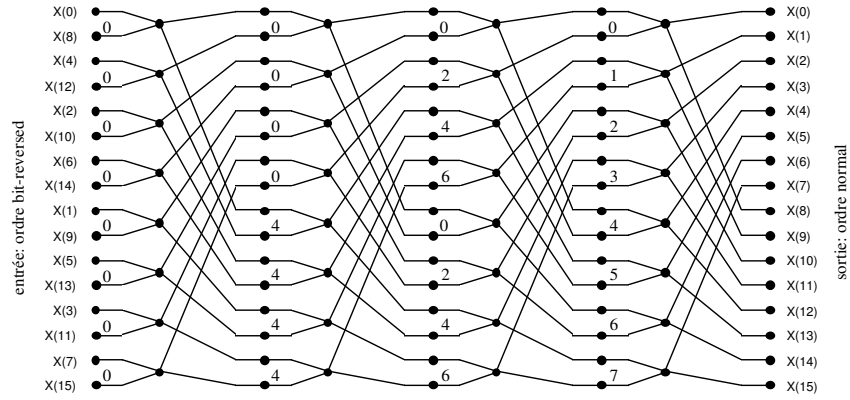


Notes :

Transformée de Fourier Rapide



FFT GEOMETRIE CONSTANTE sur 16 points



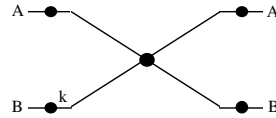
**Géométrie
Constante**

FFT

$$\begin{aligned} A' &= A + B \cdot W^k \\ B' &= A - B \cdot W^k \end{aligned}$$

FFT inverse

$$\begin{aligned} A' &= A + B \cdot W^{-k} \\ B' &= A - B \cdot W^{-k} \end{aligned}$$

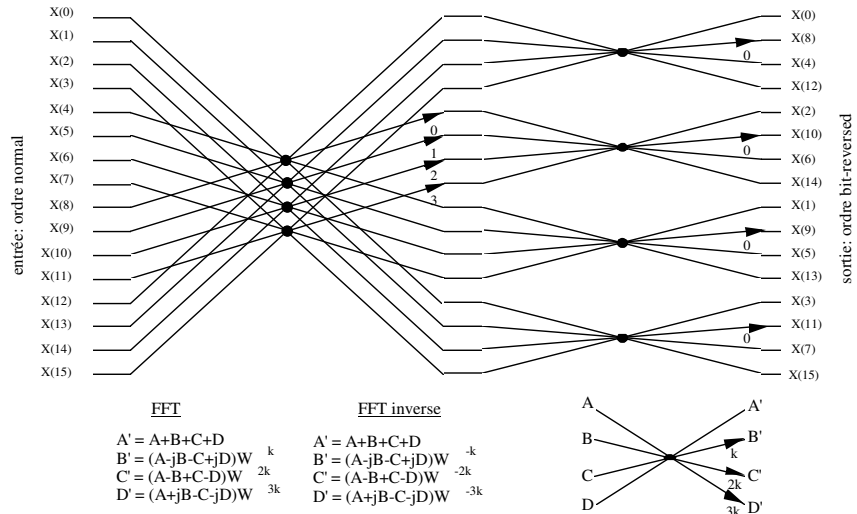


Notes :

Transformée de Fourier Rapide



FFT DIF RADIX-4 en place sur 16 points



Notes :

V.4 Convolution et corrélation



1 Définitions

- **Corrélation**

– Soit x_1 et x_2 , 2 signaux de durée finie $[0 \dots N-1]$, la corrélation est :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) x_2(i+n)$$

- **Convolution linéaire**

– Soit x et h , 2 signaux de durée finie respectivement N et M , la convolution est définie par :

$$y(n) = (x * h)(n)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) h(n-i) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) x(n-i)$$

Le signal $y(n)$ est de durée $[0 \dots N+M-2]$

Notes :

V.4 Convolution et corrélation

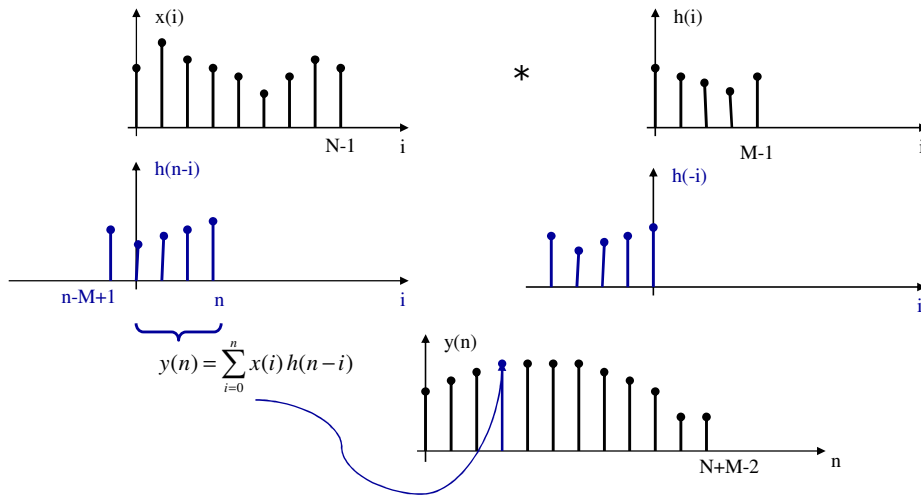


1 Définitions

• Exemple de convolution

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) h(n-i)$$

$N > M$



Notes :

1 Définitions

- **Propriétés**

- $Y(z) = H(z) X(z)$ (TZ)
- $Y(k) \neq H(k) X(k)$ (TFD)

- **Vue matricielle de la convolution**

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(N + M - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & h(0) & \cdot & \cdot & 0 \\ h(M - 1) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & h(0) \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & h(M - 1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ y(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N - 1) \end{bmatrix}$$

→ $O(N^2)$

Notes :

V.4 Convolution et corrélation



2 Convolution circulaire

- **Convolution circulaire**

– Soit x et h , 2 signaux périodiques de période N , la convolution circulaire est définie par :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) h(n-i)$$

$$y(n) = x(n) \circledast h(n)$$

Le signal $y(n)$ est de période N

$h(n-i)$ est évalué modulo N

$$TFD : Y(k) = H(k) \cdot X(k)$$

Notes :

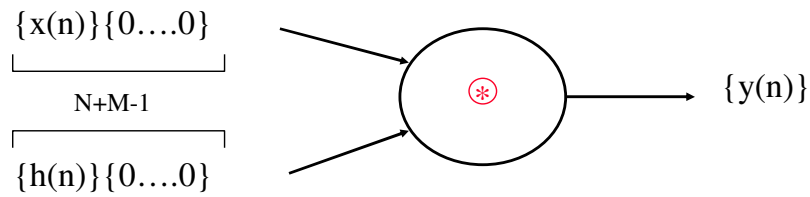
V.4 Convolution et corrélation



2 Convolution circulaire

- **Convolution circulaire**

- On passe de la convolution circulaire à la convolution linéaire en remplissant de zéros chaque séquence jusqu'à $M+N-1$



Notes :

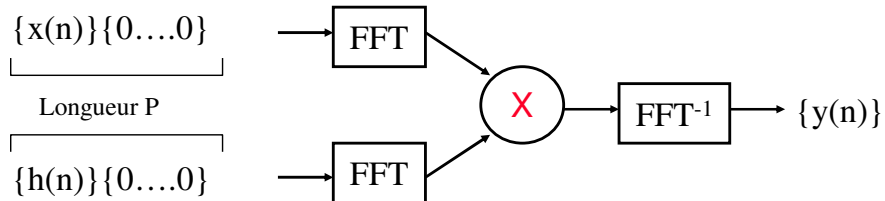
V.4 Convolution et corrélation



3 Convolution rapide

• Convolution rapide

- Passer dans le domaine de Fourier par une TFD : la convolution se transforme en produit
- Utiliser la FFT sur P points pour accélérer les calculs



- Compléter les suites $x(n)$ et $h(n)$ par des zéros jusqu'à $P > N+M-2$, avec $P = 2^p$.
→ $O(N\log_2 N)$

Notes :

V.4 Convolution et corrélation



3 Convolution rapide

- Problème : $h(n)$ et $x(n)$ doivent être de durée finie
- Application : FIR rapide
 - $h(n)$ de durée M : $H(k)$ peut être calculé une fois pour toute
 - $x(n)$ de durée infinie

• Convolution sectionnée

- $x(n)$, de durée infinie, est découpé en blocs x_k de taille M

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n) & \text{pour } kM \leq n < (k+1)M \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$y(n) = h(n) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(n)$$

Notes :

- **Méthode OLA (Overlap Add)**

- Blocs x_k de taille M
- Addition des recouvrements entre les y_k

- **Méthode OLS (Overlap Save)**

- Blocs x_k de taille $N+M$ avec recouvrement
- Troncature des y_k sur M points, addition entre les y_k

Notes :

VI Quantification

Évaluation de la précision



Introduction : pourquoi la quantification ?

1. Formats de codage (rappels)

Virgule fixe, complément-à-2

2. Modèle de quantification

Caractéristiques de quantification

Modèle de bruit, caractéristiques de dépassement

3. Bruit de conversion

Filtrage d'un bruit

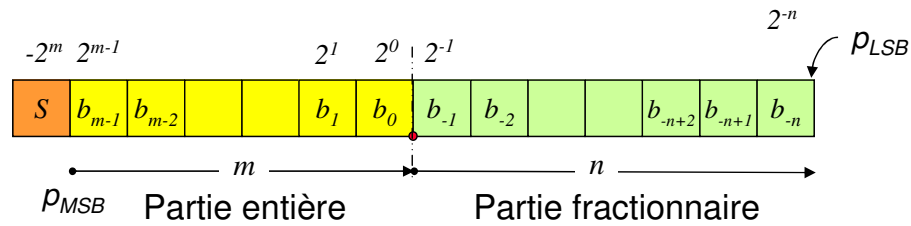
4. Limitation des chemins de données

5. Effets en TNS

Filtrage RIF, RII, cycles limites, quantification des coefficients

Notes :

- Rappel codage en virgule fixe

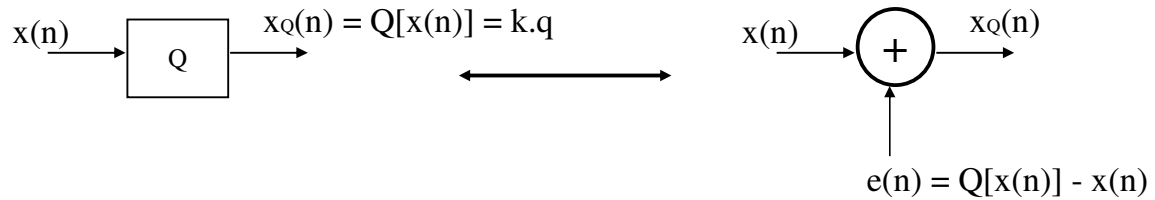


$$x = -2^m S + \sum_{i=-n}^{m-1} b_i 2^i$$

- m : distance (en nombre de bits) entre la position du bit le plus significatif p_{MSB} et la position de la virgule p_V
- n : distance entre la position de la virgule p_V et la position du bit le moins significatif p_{LSB}

Notes :

• Modèle bruit additif



- Définition : approximation de chaque valeur d'un signal $x(n)$ par un multiple entier du pas de quantification élémentaire q .
- $e(n)$ est l'erreur de quantification

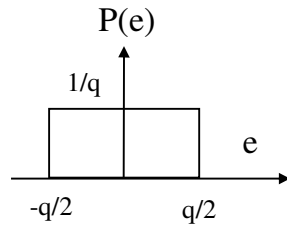
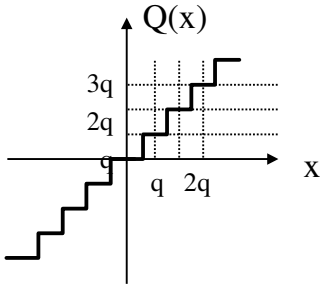
• Sources de bruit

- Bruit de conversion A/N
- Limitation des chemins de données de l'architecture cible
Élimination de bits lors d'un changement de format

Notes :

(a) Arrondi

$$Q(x) = k.q \text{ si } (k-0.5).q \leq x < (k+0.5).q$$

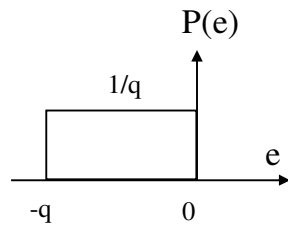
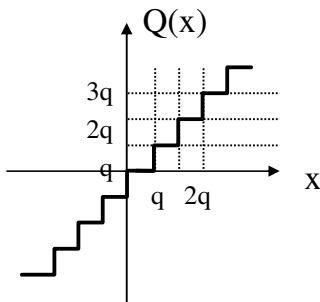


Etude statistique

- $\{e(n)\}$ est une séquence d'un processus aléatoire **continu** et stationnaire
- $\{e(n)\}$ est décorrélée de $\{x(n)\}$
- $\{e(n)\}$ est un bruit blanc additif
- la distribution de probabilité de $\{e(n)\}$ est uniforme sur l'intervalle de quantification
- ergodicité : moyennes temporelles = moyennes statistiques
- moyenne $m_e =$ moyenne temporelle
- variance $\sigma_e^2 =$ puissance du bruit
variance = $q^2/12$

(b) Troncature

$$Q(x) = k.q \text{ si } k.q \leq x < (k+1).q$$

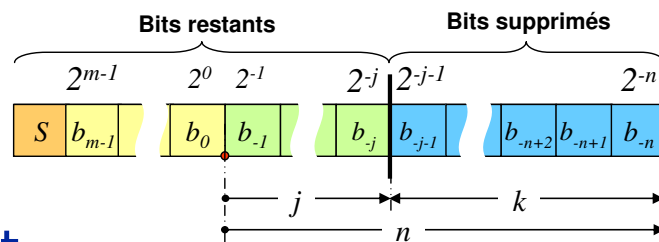


Notes :

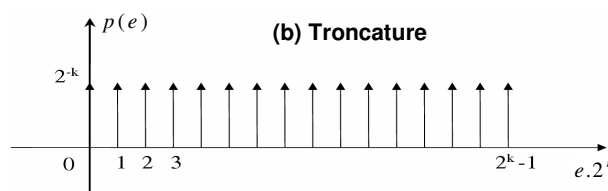
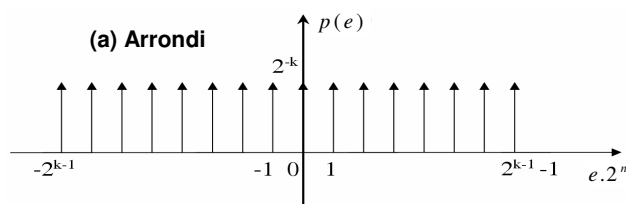
VI Quantification

2 Caractéristiques de quantification

- Bruit lié à l'élimination de k bits



- Processus aléatoire discret

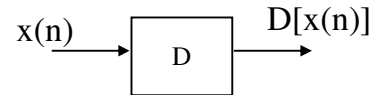


- Moments ($q = 2^{-j}$)

$$\mu_b = 0 \quad \sigma_b^2 = \frac{q^2}{12} (1 - 2^{-2k})$$

$$\mu_b = \frac{q}{2} (1 - 2^{-k}) \quad \sigma_b^2 = \frac{q^2}{12} (1 - 2^{-2k})$$

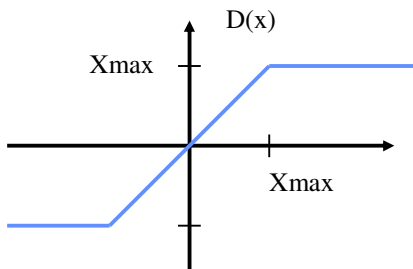
Notes :



– Valeurs de $x(n)$ lorsqu'il sort de la dynamique de codage

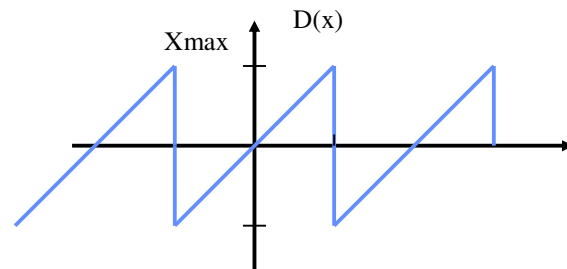
Saturation

- Complexe
- Moins d'effets indésirables



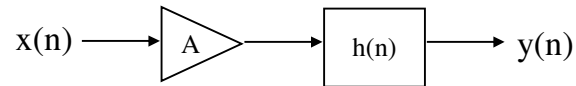
Modulaire

- Effets indésirables



Notes :

- Afin d'éviter le dépassement, on diminue l'amplitude avant ou pendant le traitement par un facteur d'échelle $A < 1$ (*scaling*).



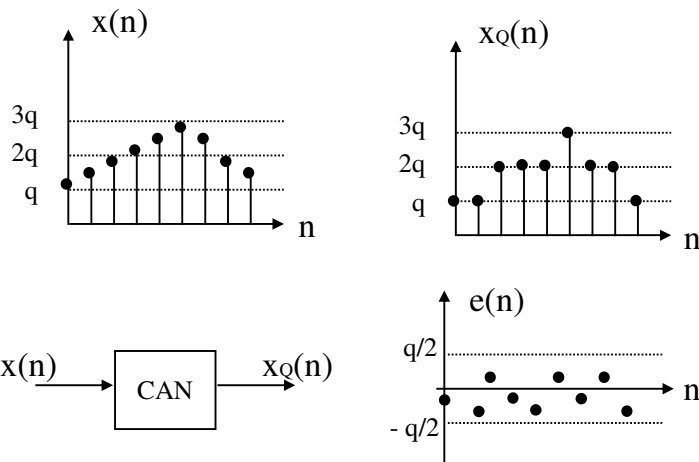
- A peut être combiné avec les valeurs des coefficients
- A puissance de 2 (en pratique)

• Critères

- Critère du pire-cas (ou norme L1)
Pas de dépassement tant que $|x(n)| < X_{\max}$
- Critère de puissance (ou norme L2)
Pas de dépassement tant que $P_x < P_{\max}$
- Critère bande étroite (ou norme Chebychev)
Pas de dépassement tant que $|x(n)| < X_{\max}$, avec $x(n)$ sinusoïdal.

Notes :

Quantification en conversion A/N

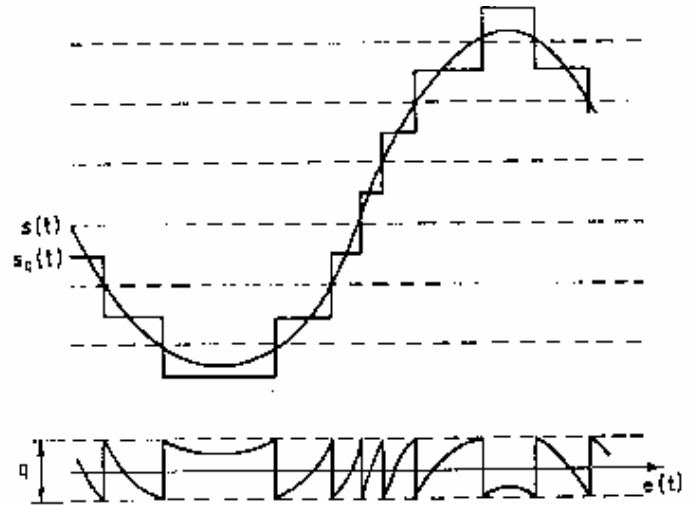


$$x_Q(n) = Q[x(n)]$$

$$e(n) = x_Q(n) - x(n)$$

$$|e(n)| \leq q/2$$

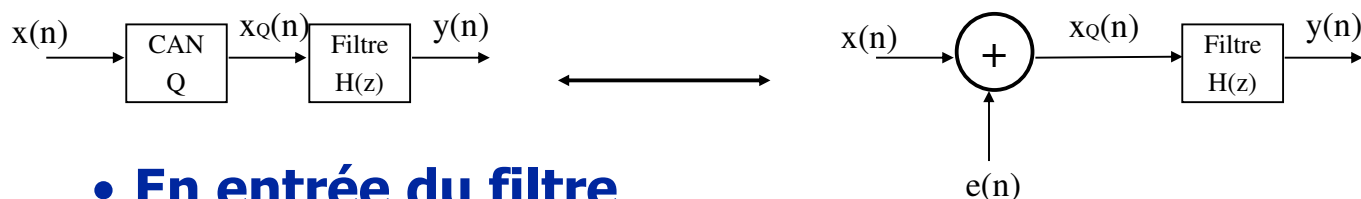
Quantification d'une sinusoïde



Notes :

Filtrage d'un bruit

• Exemple : filtrage du bruit de conversion



• En entrée du filtre

– Signal $x(n)$ + Bruit de conversion $e(n)$

$$\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}, \sigma_x^2 \text{ puissance du signal d'entrée}$$

$$RSB = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2}{q^2/12} = 12 \cdot 2^{2(b-1)} \sigma_x^2$$

$$RSB_{dB} = 10 \log RSB = 6.02b + 4.77 + 10 \log \sigma_x^2$$

Le RSB augmente de 6dB par bit ajouté

Notes :

- **Limitation des chemins de données de l'architecture cible**

- Multiplication => Quantification
- Addition => Débordement

$$\begin{array}{r} 0,1101 \\ + 0,1001 \\ \hline 01,0110 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0,8125 \\ + 0,5625 \\ \hline 1,375 \end{array}$$

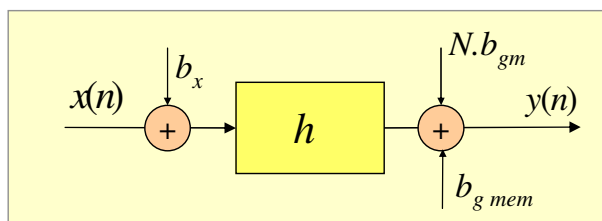
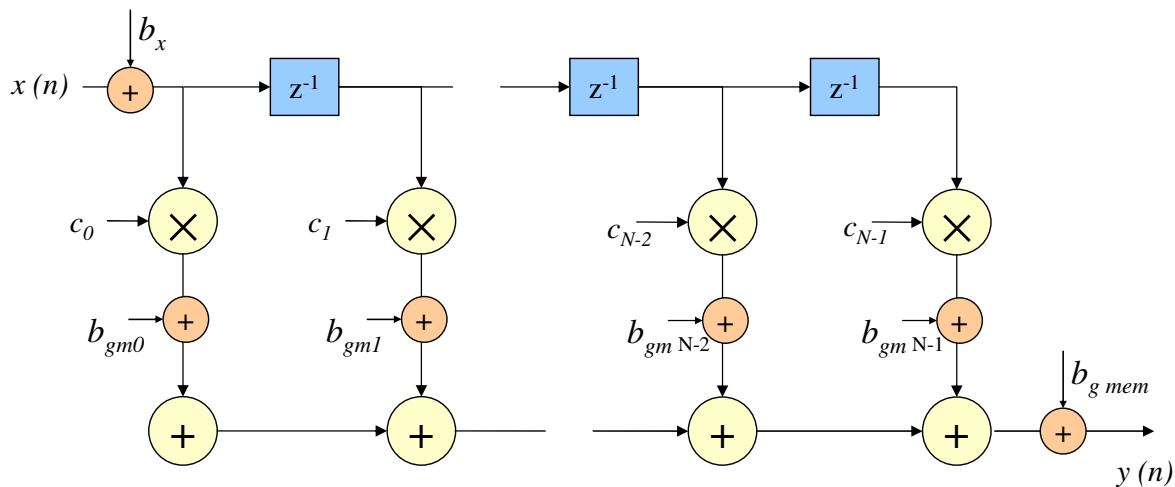
$$\begin{array}{r} 0,1101 \\ \times 0,1001 \\ \hline 00,0111 \quad 0101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,8125 \\ \times 0,5625 \\ \hline 0,4570 \quad 3125 \end{array}$$

Notes :

Exemple du filtre FIR

- Sources de bruit :



Notes :

Exemple du filtre FIR

- Puissance du bruit en sortie (arrondi)

$$\sigma_{b_y}^2 = \sigma_{b'_e}^2 + \sigma_{b_{mem}}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_{b_{gm.i}}^2$$

$$\sigma_{b_y}^2 = \sigma_{b_e}^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)|^2 + \sigma_{b_{mem}}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_{b_{gm.i}}^2$$

$$\sigma_{b_y}^2 = \frac{q_e^2}{12} \sum_{m=0}^{N-1} c_m^2 + \frac{q_{mem}^2}{12} + N \cdot \frac{q_{mi}^2}{12}$$

Notes :

VII. Synthèse des filtres numériques RII

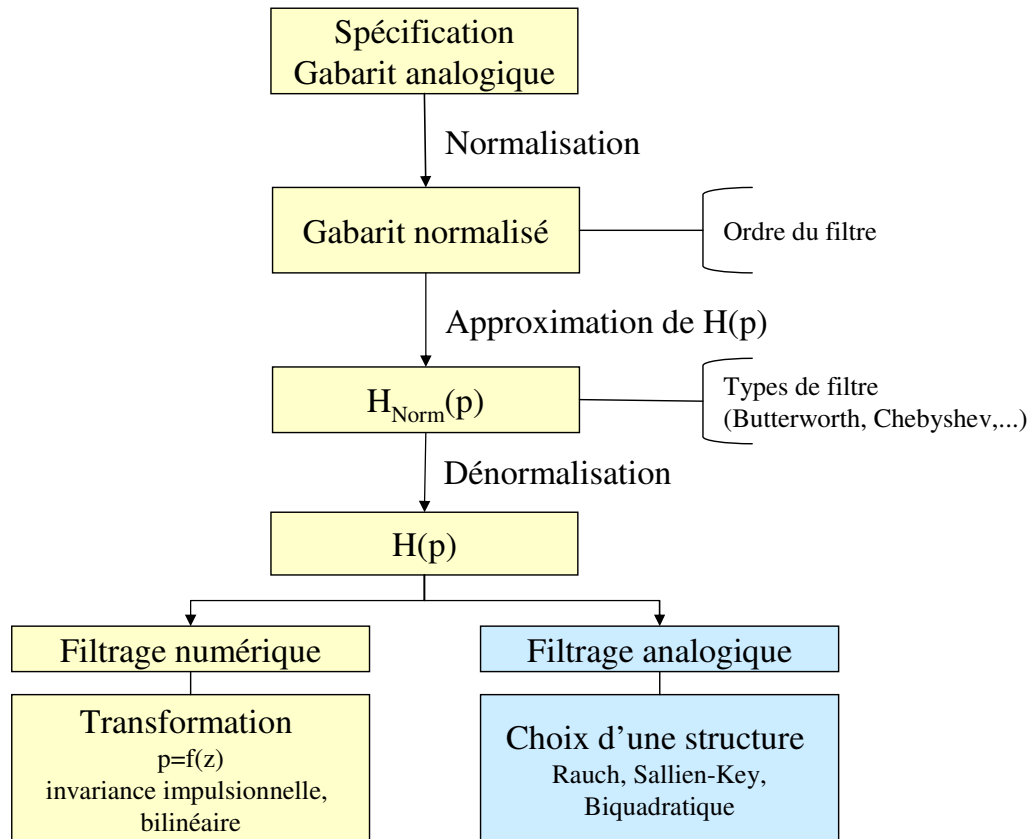
1. Introduction
2. Rappels sur la synthèse des filtres analogiques
3. Invariance impulsionnelle
4. Transformation bilinéaire

Notes :

- **Recherche de $H(z)$ correspondant aux spécifications (gabarit)**

- Transposition des méthodes de synthèse applicables aux filtres analogiques, puis transformation de $H(p)$ vers $H(z)$
 - Invariance impulsionnelle
 - Transformation bilinéaire
- Synthèse directe en z
- Méthodes d'optimisation : minimiser un critère d'erreur entre courbe réelle et courbe idéale

Notes :



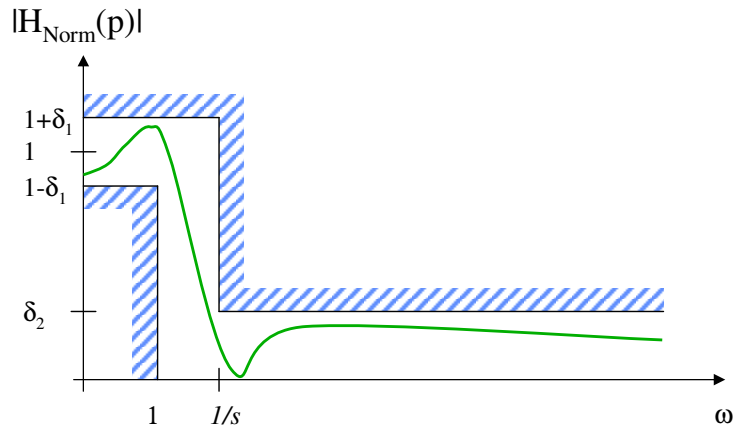
Notes :

VII Synthèse des filtres RII

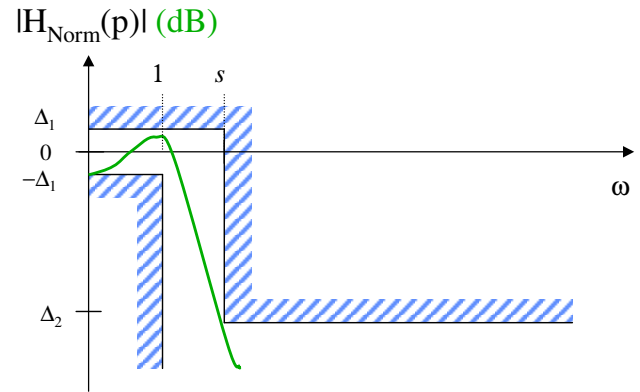
2 Synthèse de filtre analogique

- **Normalisation**

- Calcul de la sélectivité s



a) Gabarit prototype linéaire



b) Gabarit prototype en dB

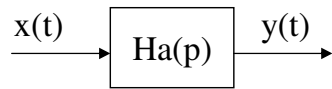
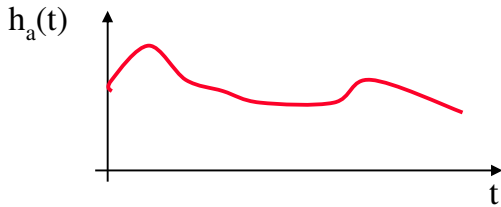
Notes :

- **Ordre du filtre et fonction de transfert normalisée**
 - Butterworth, Chebyshev, Elliptique, Bessel, Legendre, ...
 - $H_{\text{NORM}}(p_N)$
- **Dénormalisation**
 - Passe-bas : $p_N = p / \omega_c$
 - Passe-haut : $p_N = \omega_c / p$
 - Passe-bande : $p_N = 1/B (p / \omega_0 + \omega_0 / p)$
- **On obtient une fonction de transfert $H(p)$ respectant le gabarit analogique spécifié**
⇒ Passage vers $H(z)$

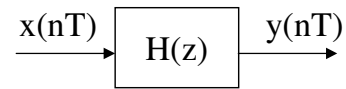
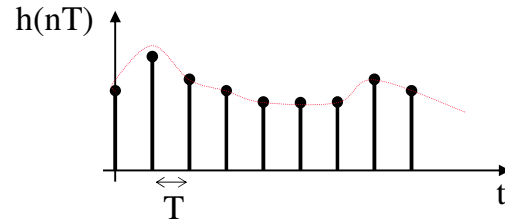
Notes :

3 Invariance impulsionnelle

- Le filtre numérique et le filtre analogique ont la même réponse impulsionnelle



filtre analogique



filtre numérique

$$h(nT) = h_a(t) /_{t=nT}$$

Notes :

- **Le filtre numérique et le filtre analogique ont la même réponse impulsionnelle**

$$H_a(p) \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{t=nT} h(nT) \xrightarrow{Tz} H(z)$$

ou *formatio n directa*

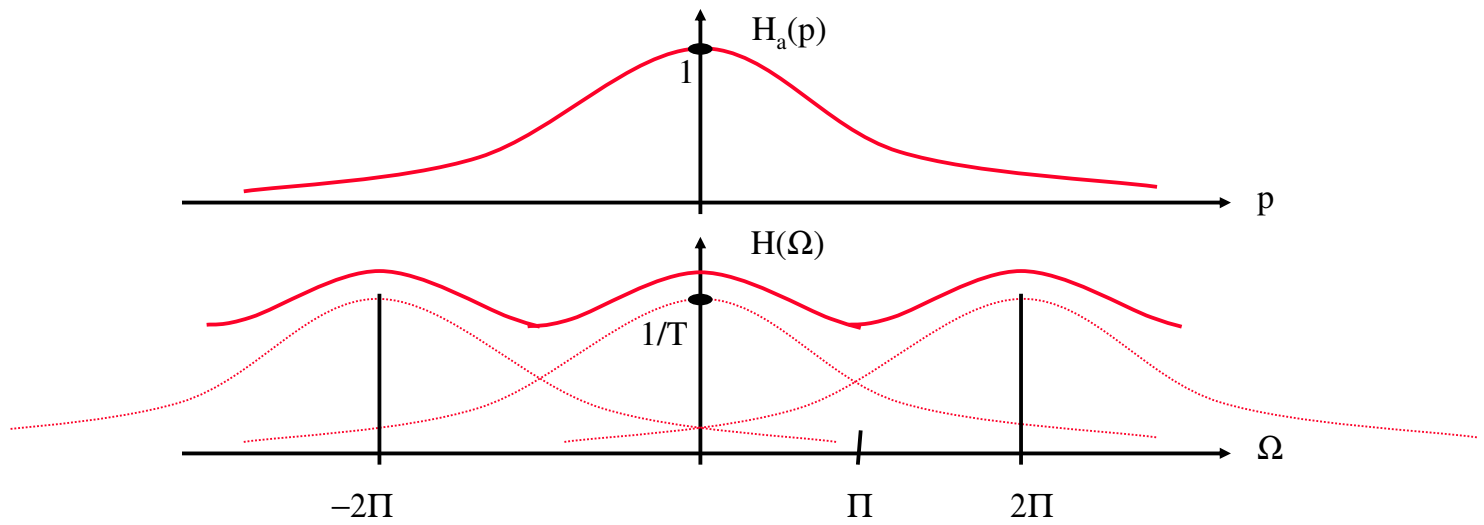
$$H(z) = \sum_{\{p\text{ôles } p_i \text{ de } H_a(p)\}} \text{Résidus} \left[\frac{H_a(p)}{1 - z^{-1} e^{pT}}, p_i \right]$$

- Conserve la réponse temporelle et la stabilité
- Phénomène de recouvrement de spectre dû à l'échantillonnage
- Non respect de la spécification fréquentielle

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_k H_a\left(j\omega + j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

Notes :

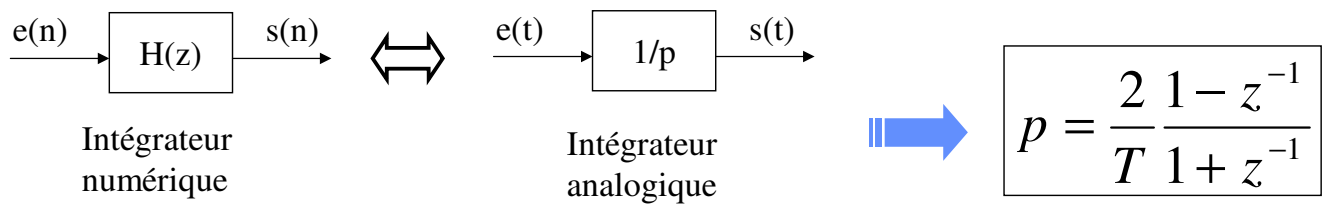
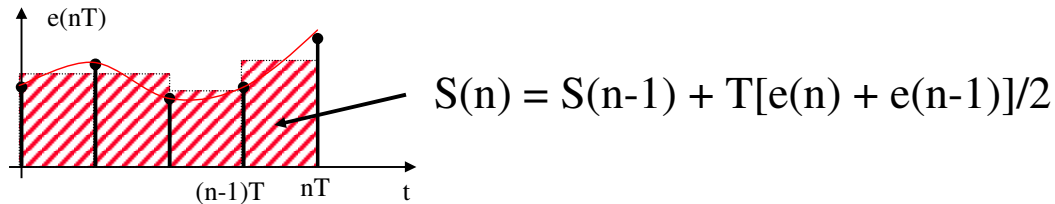
- Réponse fréquentielle



– Normalisation
(xT) ou ($/H(0)$)

Notes :

- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles¹

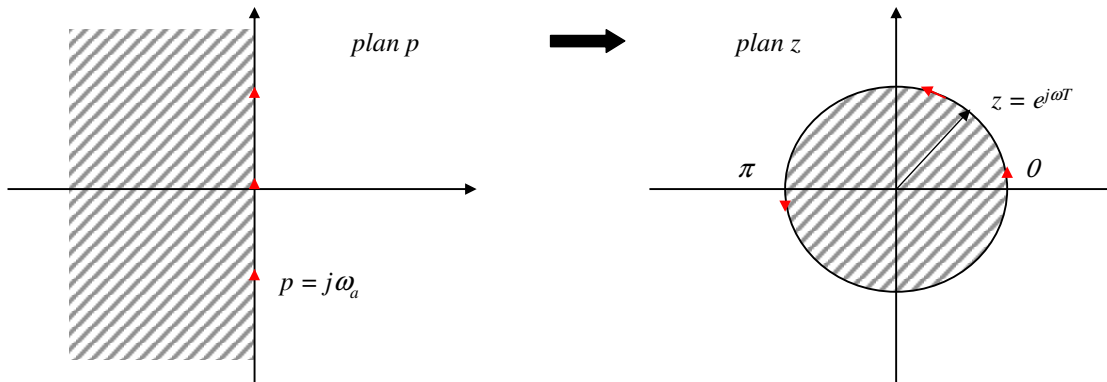


¹Appelée également, selon les sources, méthode des trapèzes

Notes :

4 Transformation bilinéaire

– Conservation de la stabilité



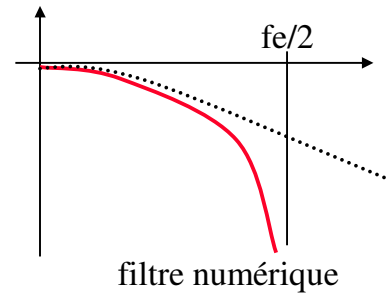
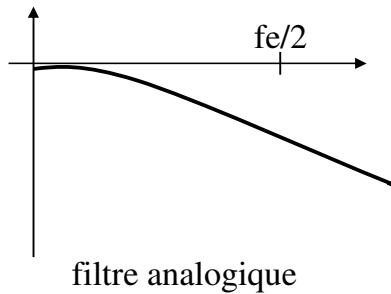
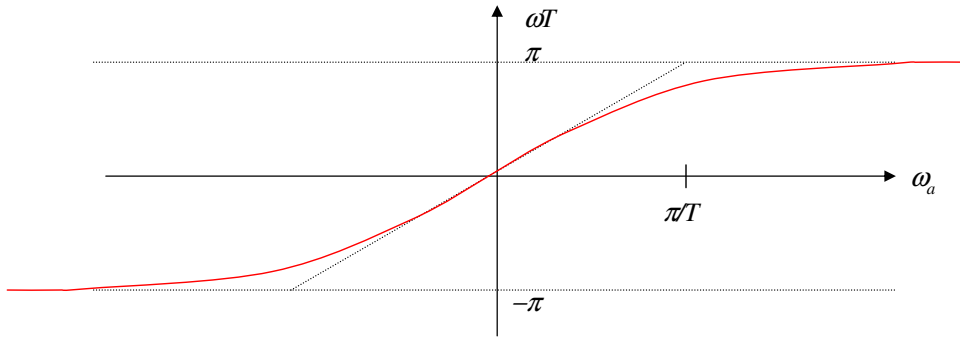
– Relation entre fréquences numériques et analogiques

Notes :

4 Transformation bilinéaire

– Distorsion en fréquence connue

$$\omega_{\text{analogique}} \frac{T}{2} = \operatorname{tg} \left(\omega_{\text{numérique}} \frac{T}{2} \right)$$



Notes :

- **Procédure de synthèse**

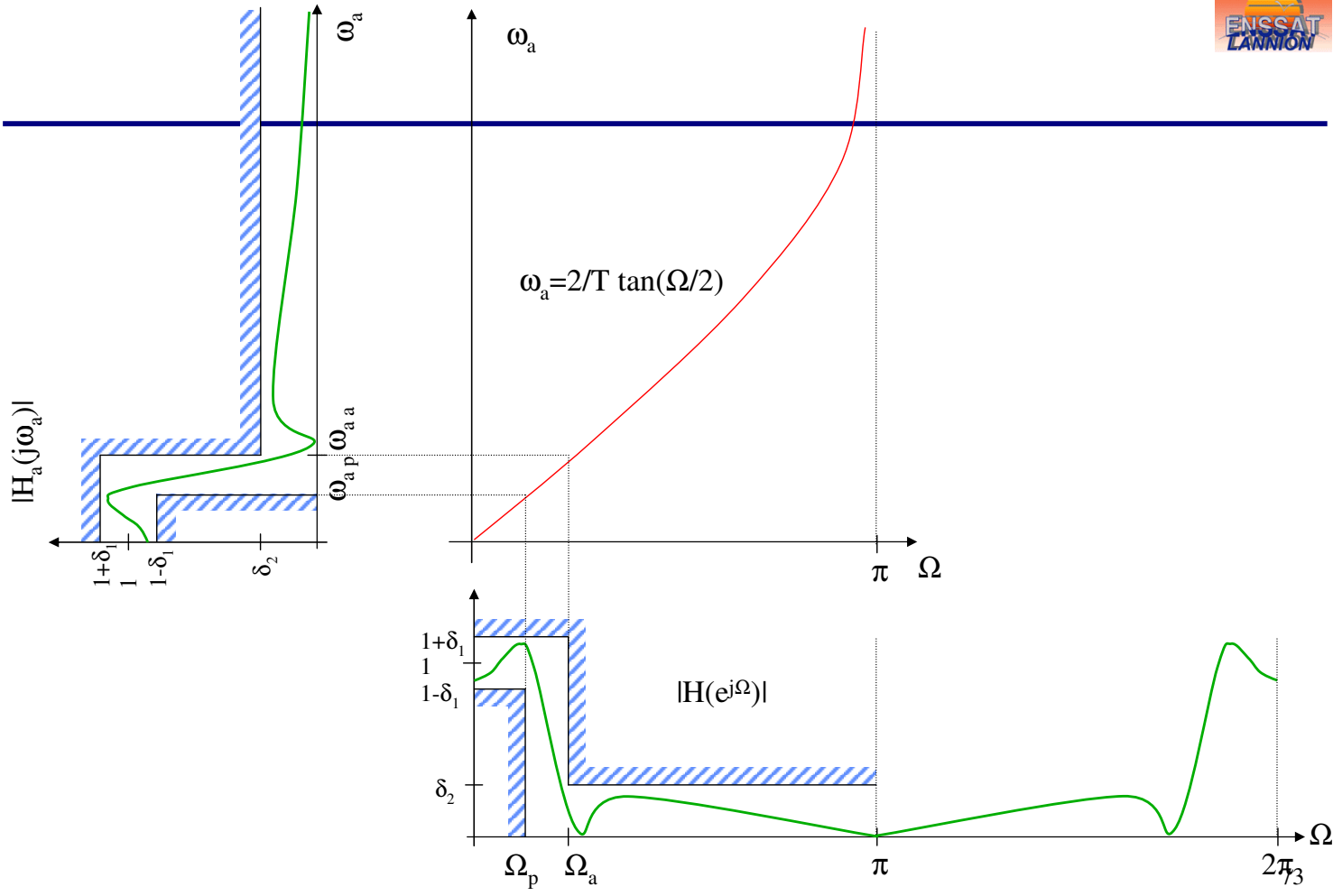
- A partir du gabarit en fréquence numérique ω_n
- Effectuer une prédistorsion en fréquence

$$\omega_a \frac{T}{2} = \operatorname{tg} \left(\omega_n \frac{T}{2} \right)$$

- Synthèse de $H(p)$ par méthodes du chapitre V.2
- Transformation bilinéaire

$$H(z) = H(p) \Big/ p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Notes :



Notes :

Exemple

- **Filtre numérique analogique du premier ordre**

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}} \quad f_c = 1 \text{ KHz}, f_e = 10 \text{ Khz}$$

$$\omega_c = \frac{1}{R.C}$$

– Invariance impulsionnelle : $H_i(z)$

– Transformation bilinéaire : $H_b(z)$

Notes :

VIII. Synthèse des filtres numériques RIF

1. Introduction
2. Filtres à Phase Linéaire
3. Méthode du Fenêtrage
4. Échantillonnage en Fréquence

Notes :

1 Introduction

- **Recherche de $H(z)$ correspondant aux spécifications (gabarit)**
 - Synthèse directe en z
 - Filtrés à phase linéaire ou minimale
- **3 méthodes de synthèse**
 - Méthode du fenêtrage
 - Méthode de l'échantillonnage fréquentiel
 - Méthodes d'optimisation : minimiser un critère d'erreur entre courbe réelle et courbe idéale

Notes :

2 Phase linéaire

- **Filtre à phase minimale**

- Zéros dans le cercle unité

- **Filtre à phase linéaire**

$$H(e^{j\Omega}) = A(\Omega).e^{j\varphi(\Omega)}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A(\Omega): \text{pseudo - module (amplitude)} \\ \varphi(\Omega) = \beta - \alpha\Omega \end{cases}$$

- Condition pour avoir une phase linéaire

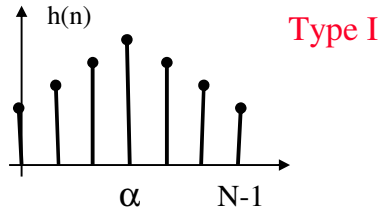
- Symétrie ou antisymétrie par rapport à $\alpha = (N-1)/2$

Notes :

2 Phase linéaire

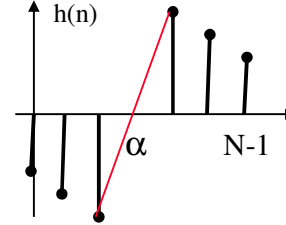
réponse impulsionnelle symétrique
 $\beta=0$

N impair
 α entier

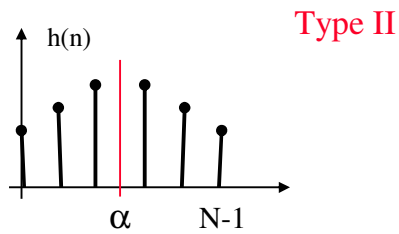


réponse impulsionnelle antisymétrique
 $\beta=\pm\pi/2$

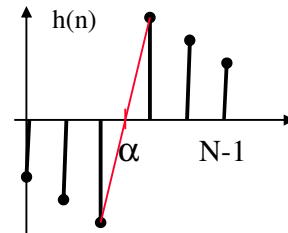
Type III



N pair
 α non entier



Type IV



Notes :

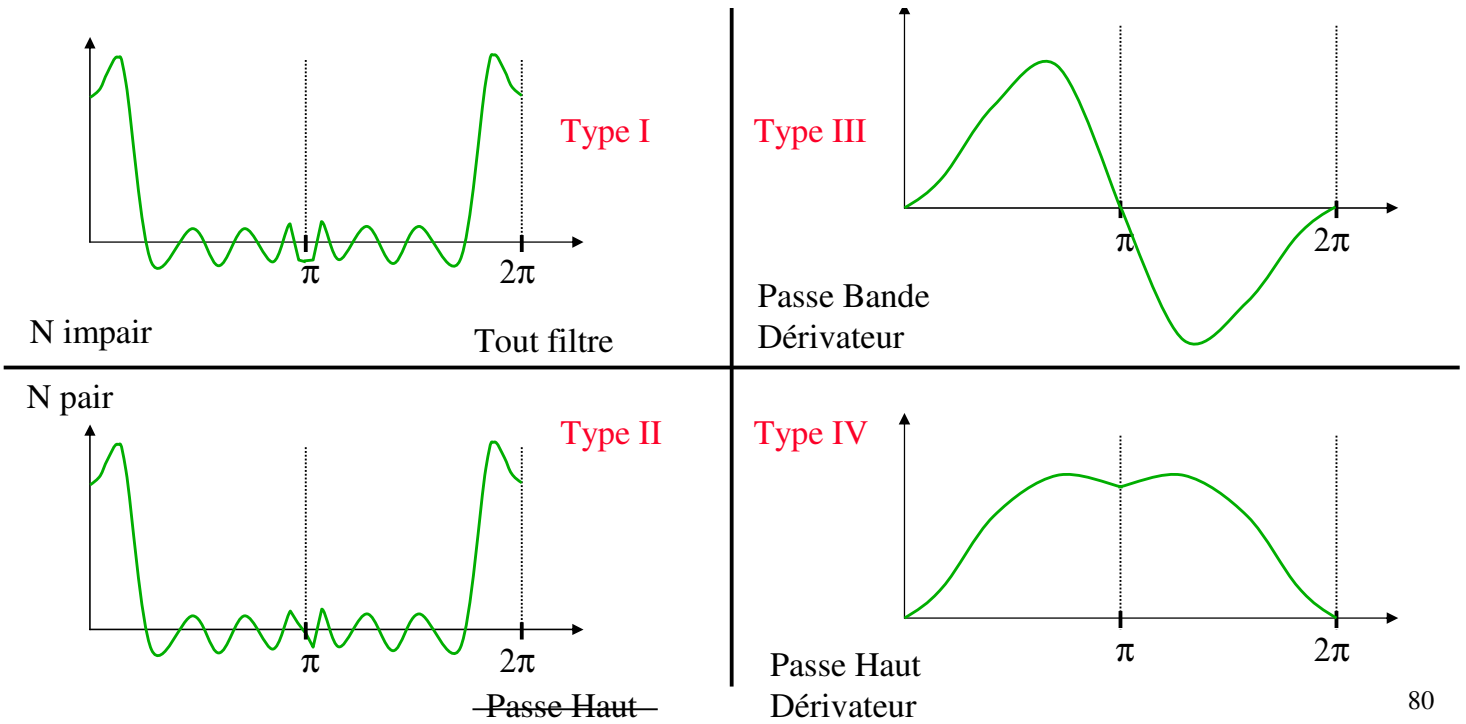
Réponses fréquentielles

		Type I	Type III
		$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\alpha\Omega} \sum_{n=0}^{\alpha} a_n \cos(n\Omega)$ $a_0 = h(\alpha), \quad a_n = 2h(\alpha - n), \quad n = 1 \dots \alpha$	$H(e^{j\Omega}) = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\alpha\Omega} \sum_{n=1}^{\alpha} c_n \sin(n\Omega)$ $c_n = 2h(\alpha - n), \quad n = 1 \dots \alpha$ $H(0) = H(\pi) = 0$
N impair		Tout filtre	Passe Bande Dérivateur
		Type II	Type IV
N pair		$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\alpha\Omega} \sum_{n=1}^{N/2} b_n \cos[(n - 1/2)\Omega]$ $b_n = 2h(N/2 - n), \quad n = 1 \dots N/2$ $H(\pi) = 0$	$H(e^{j\Omega}) = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\alpha\Omega} \sum_{n=1}^{N/2} d_n \sin[(n - 1/2)\Omega]$ $d_n = 2h(N/2 - n), \quad n = 1 \dots N/2$ $H(0) = 0$
		Passe Haut	Passe Haut Dérivateur

Notes :

2 Phase linéaire

Réponses fréquentielles



Notes :

3 Méthode du fenêtrage

- Développement en série de Fourier du filtre idéal

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\Omega}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) \cdot e^{jn\Omega} d\Omega$$

– Filtre non causal, de type RII

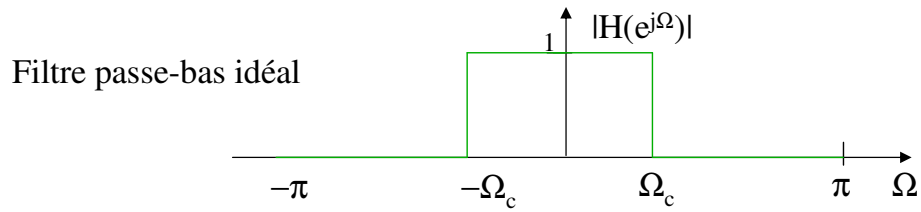
- Passage de $h(n)$ idéal au RIF approché par fenêtrage de $h(n)$

$$h_a(n) = h(n) \cdot w(n)$$

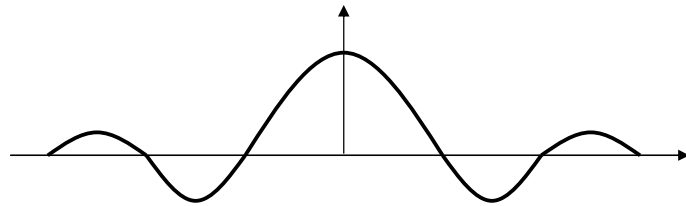
Notes :

3 Méthode du fenêtrage

- Exemple : filtre passe-bas idéal



$$h(n) = \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin(n\Omega_c)}{n\Omega_c}$$

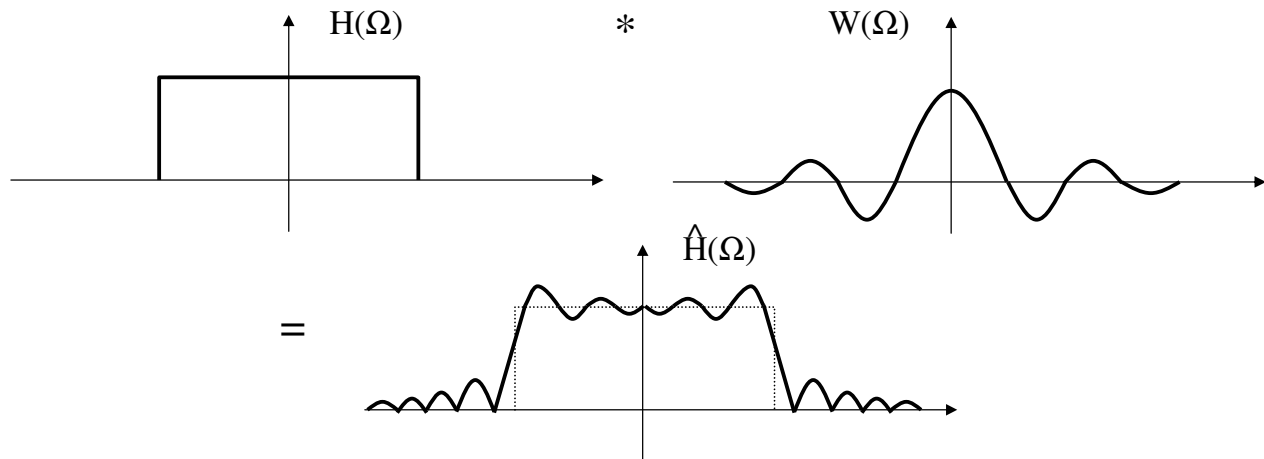


Notes :

3 Méthode du fenêtrage

- Prise en compte d'une condition de phase linéaire par décalage de α
- Fenêtrage de $h(n)$

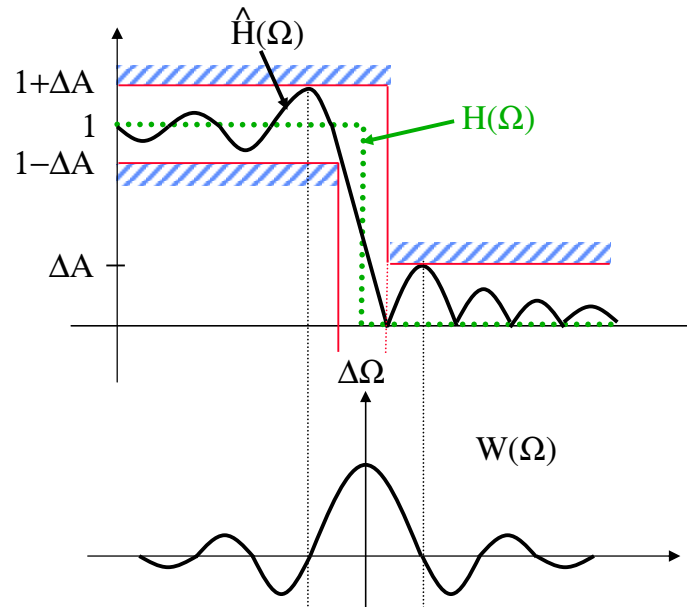
$$h_a(n) = h(n).w(n) \Leftrightarrow H_a(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) * W(e^{j\Omega})$$



Notes :

3 Méthode du fenêtrage

- Largeur de la zone de transition $\Delta\Omega \Leftrightarrow 1/2$ largeur du lobe principal
- Atténuation $\Delta A \Leftrightarrow$ amplitude du premier lobe secondaire

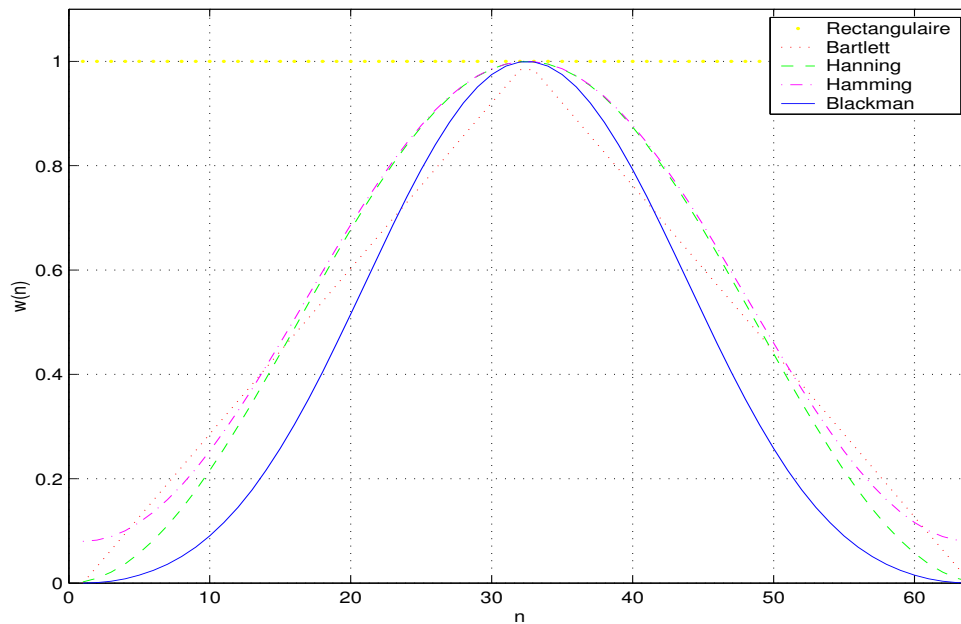


Notes :

3 Méthode du fenêtrage

- Fenêtres usuelles

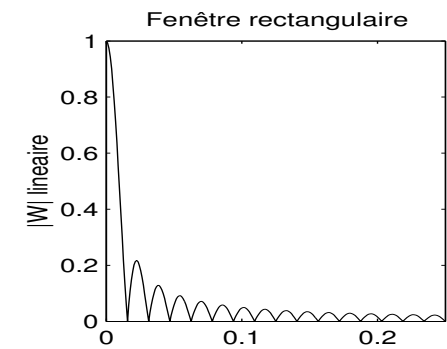
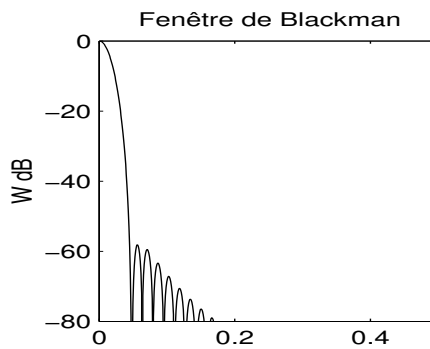
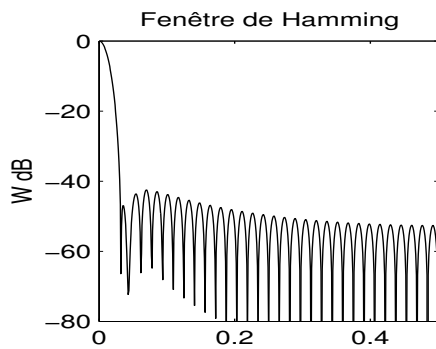
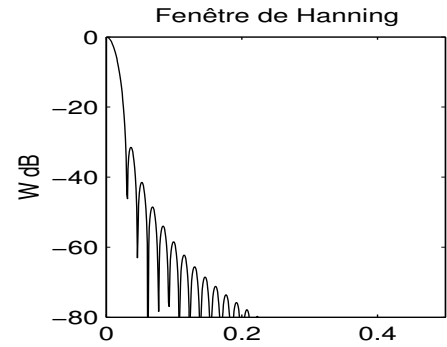
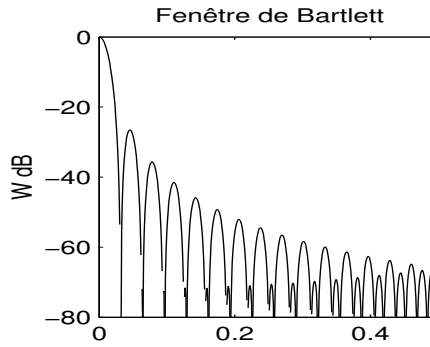
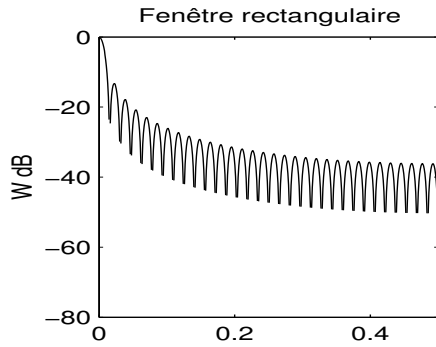
- Rectangle, Triangle, Hanning, Hamming, Blackman, Kaiser, ...
- Réponses temporelles



Notes :

3 Méthode du fenêtrage

• Fenêtres usuelles



Notes :

3 Méthode du fenêtrage

- Influence de la fenêtrage

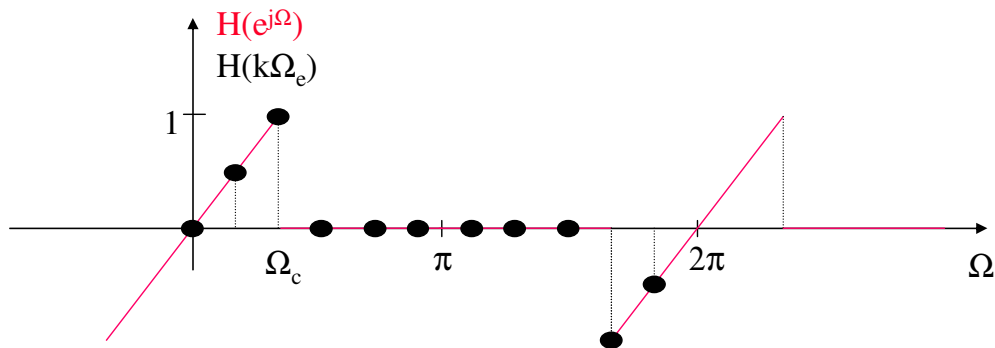
Fenêtrage	Lobe secondaire	Demi largeur du lobe principal	Atténuation minimum
Rectangulaire	-13dB	$2\pi/N$	-21dB
Triangulaire	-25dB	$4\pi/N$	-25dB
Hanning	-31dB	$4\pi/N$	-44dB
Hamming	-41dB	$4\pi/N$	-53dB
Blackman	-57dB	$6\pi/N$	-74dB

- Le type de fenêtrage influe sur ΔA et $\Delta \Omega$
- Le nombre de points influe sur $\Delta \Omega$

Notes :

• Échantillonnage en fréquence

- Échantillonnage du filtre idéal



- TFD inverse de $H(k\Omega_e)$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k\Omega_e) e^{j\frac{2\pi}{N}n.k}$$

- Méthode valable pour tout type de filtre
- Possibilité d'utiliser un fenêtrage

Notes :

IX. Analyse spectrale

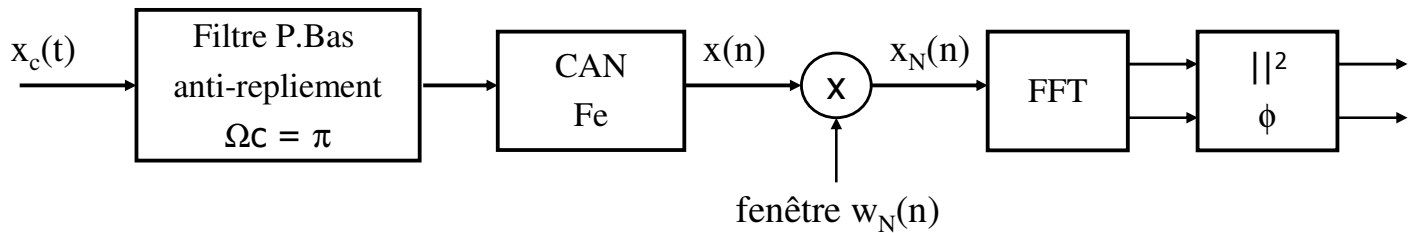
1. Effets de la troncature
2. Caractéristiques des fenêtres
3. Influence sur l'analyse

Notes :

1 Définition

• Analyse spectrale de signaux continus

- Etude du contenu fréquentiel (spectre) d'un signal continu $x_c(t)$
- Nombre limité d'échantillons du signal d'entrée pour la TFD



• Troncature temporelle

- $x_N(n) = x(n) \cdot w_N(n)$ avec $w_N(n)$ fenêtrage sur N points
- $T_0 = N.T$: horizon d'observation

Notes :

2 Troncature temporelle

- **Troncature temporelle**

- $x_N(n) = x(n) \cdot w_N(n)$ avec $w_N(n)$ fenêtrage sur N points

- **Influence sur le spectre**

- Convolution fréquentielle $X_N(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) * W_N(e^{j\Omega})$

- **TFD du signal tronqué**

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x_N(n) e^{-2j\pi \frac{kn}{L}} \quad k = 0..L-1$$

$$L \geq N$$

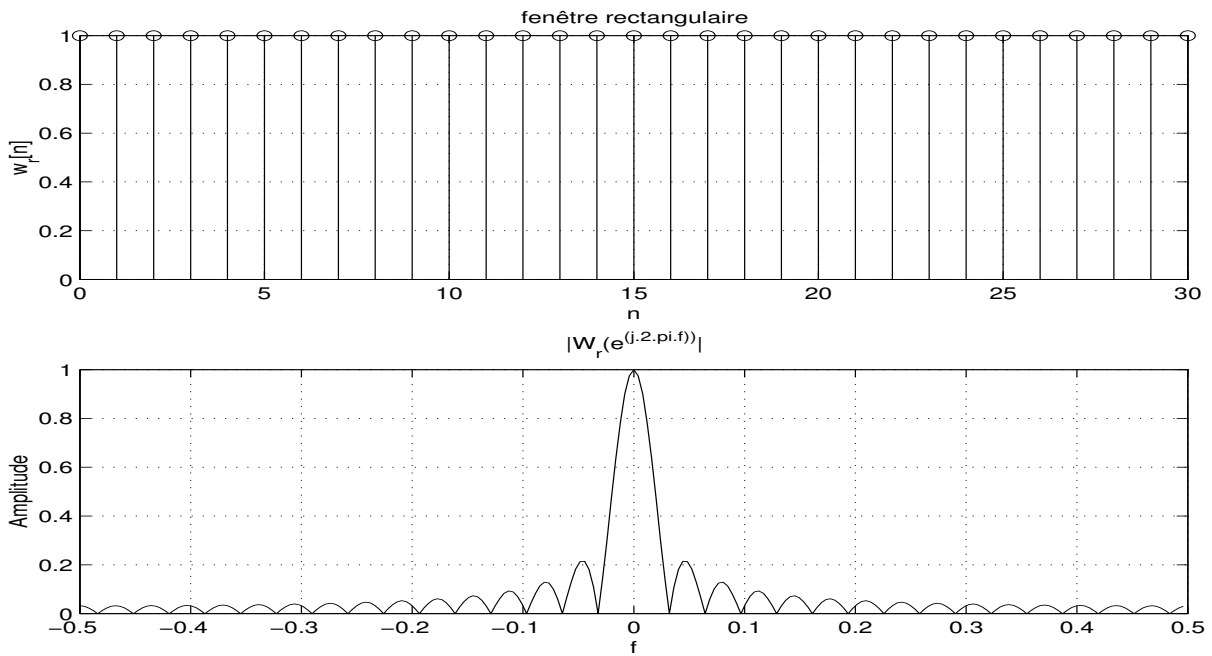
$$X_N(k) = X_N(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=2\pi k/L}$$

Notes :

2 Troncature temporelle

• Exemple

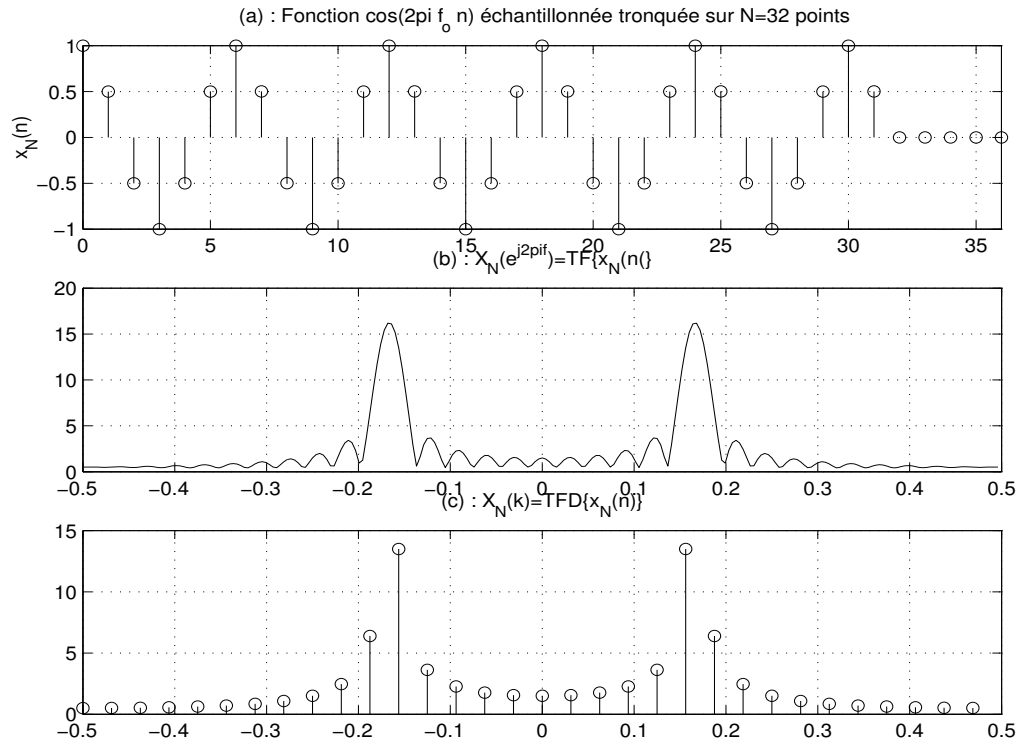
– Fenêtre rectangulaire, $N=31$



Notes :

3 Influence de la fenêtre

– fonction cosinus fenêtrée sur N=32 points



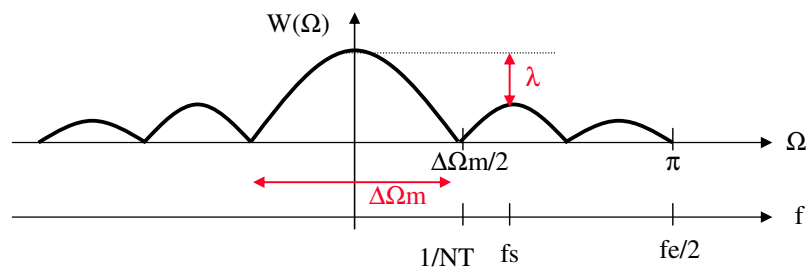
Notes :

3 Influence de la fenêtre

• Influence de la fenêtre

Fenêtre	Lobe secondaire $\lambda = 20\log W(f_s)/W(0) $	Largeur du lobe principal $LLP = \Delta\Omega_m$
Rectangulaire	-13dB	$4\pi/N$
Triangulaire	-25dB	$8\pi/N$
Hanning	-31dB	$8\pi/N$
Hamming	-41dB	$8\pi/N$
Blackman	-57dB	$12\pi/N$

- Le type de fenêtre influe sur λ et $\Delta\Omega_m$
- Le nombre de points influe sur $\Delta\Omega_m$

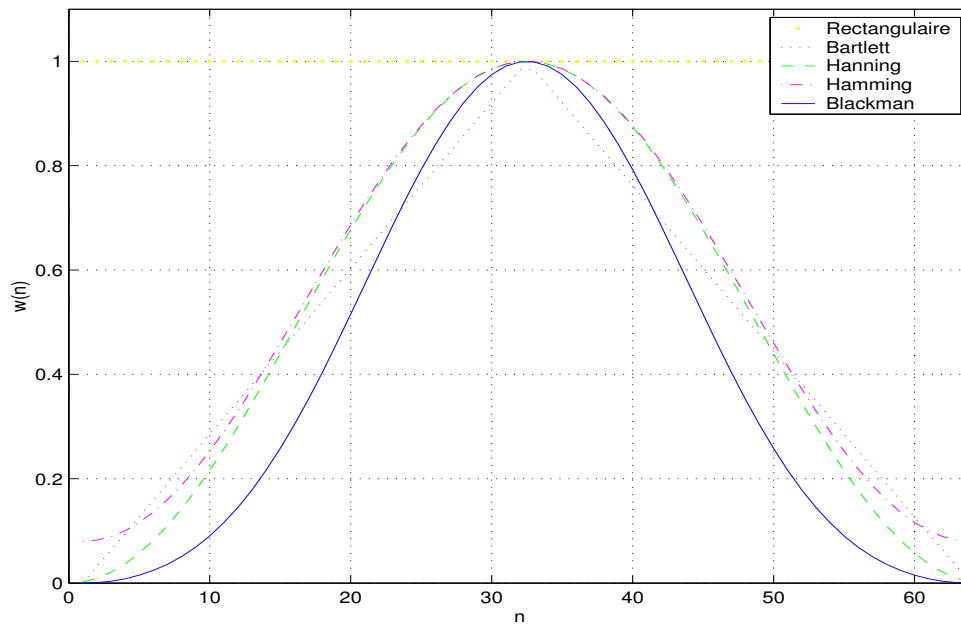


Notes :

3 Influence de la fenêtre

- Fenêtres usuelles

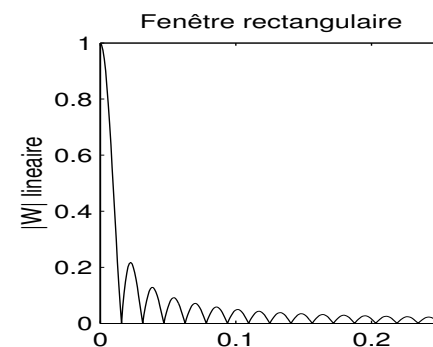
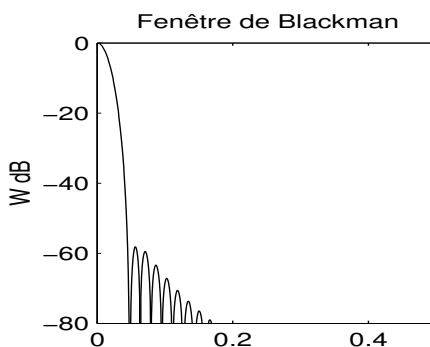
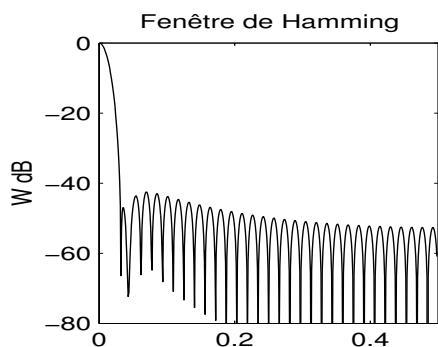
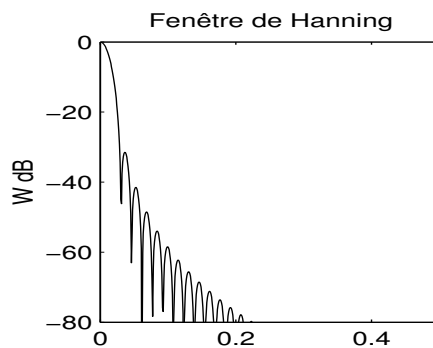
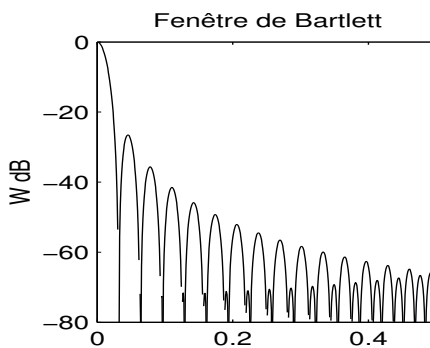
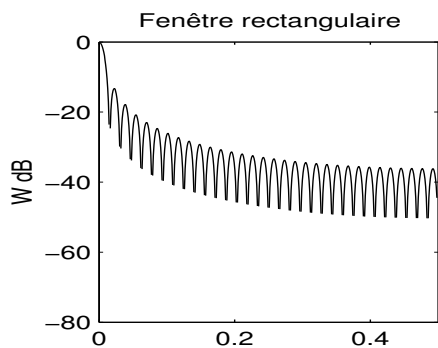
- Rectangle, Triangule, Hanning, Hamming, Blackman, Kaiser, ...
- Réponses temporelles



Notes :

3 Influence de la fenêtre

• Fenêtres usuelles



Notes :

4 Paramètres de l'analyse

- **Finesse en fréquence**

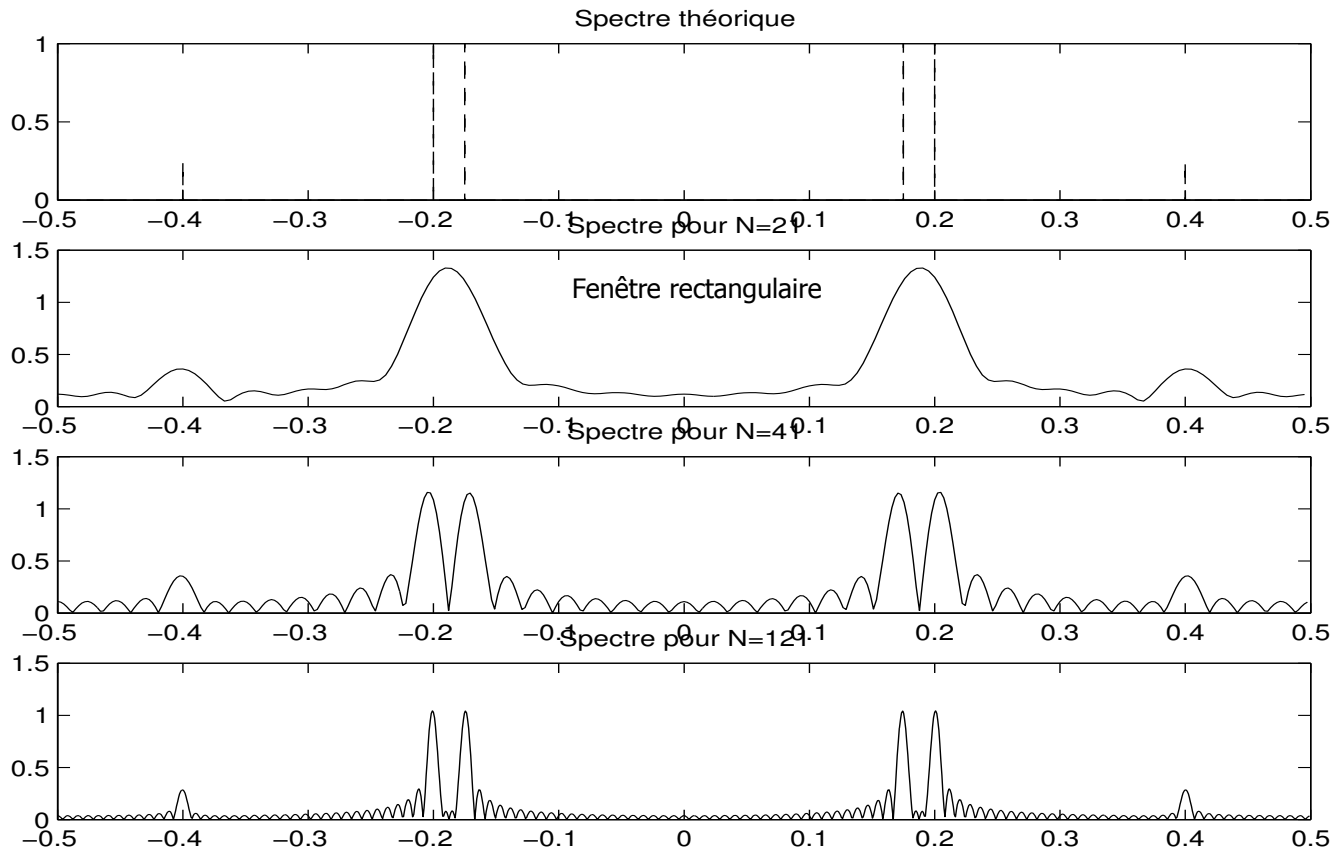
- Capacité de l'analyseur à détecter 2 raies proches
- Masquage fréquentiel
- Largeur du lobe principal : $LLP = 2\Delta\Omega$
- Dépend de N et du type de fenêtre
Exemple sur transparent 9

- **Finesse en amplitude**

- Capacité de l'analyseur à détecter des raies de faibles amplitudes ou masquée par une autre raie proche
- Masquage d'amplitude ou bruit de l'analyse
 $\lambda = 20\log|W(f_s)/W(0)|$
- Dépend du type de fenêtre
Exemple sur transparent 10

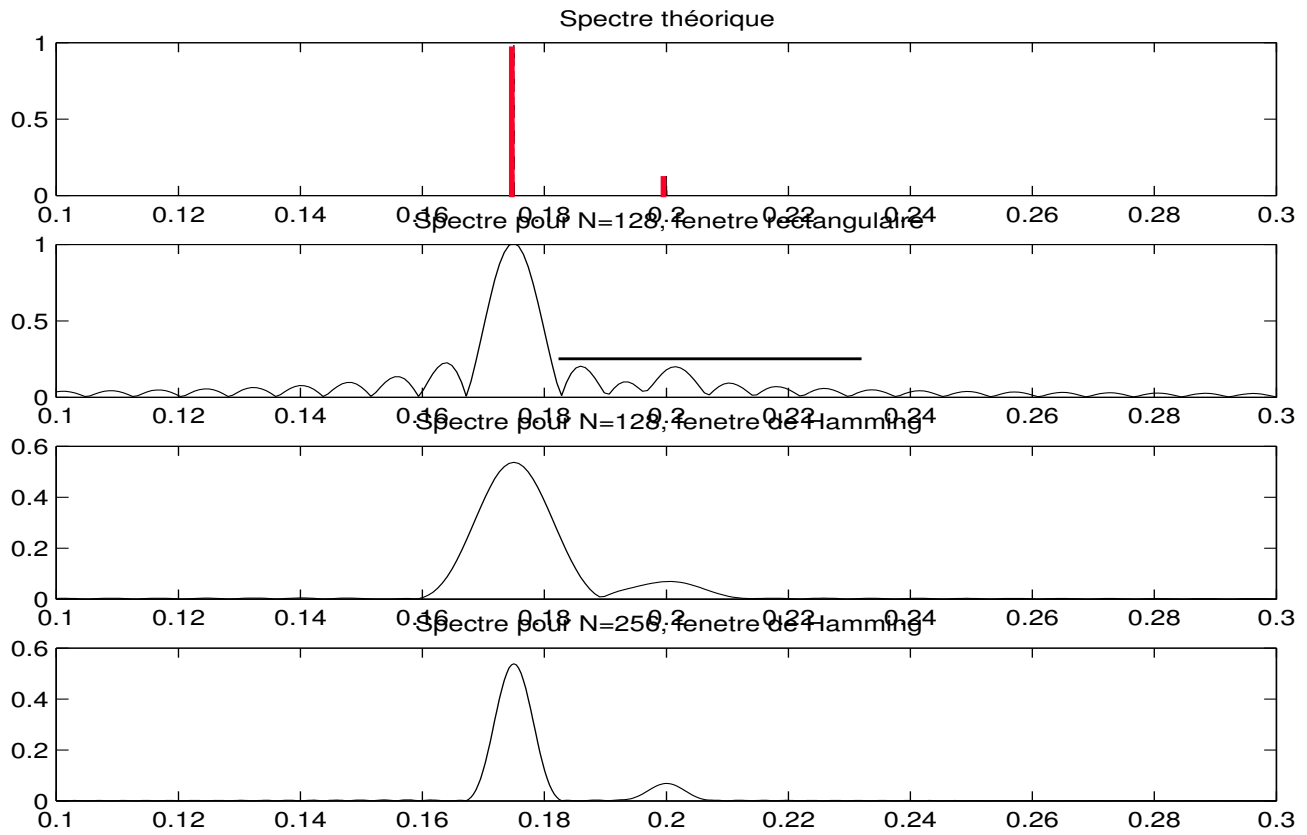
Notes :

4 Paramètres de l'analyse



Notes :

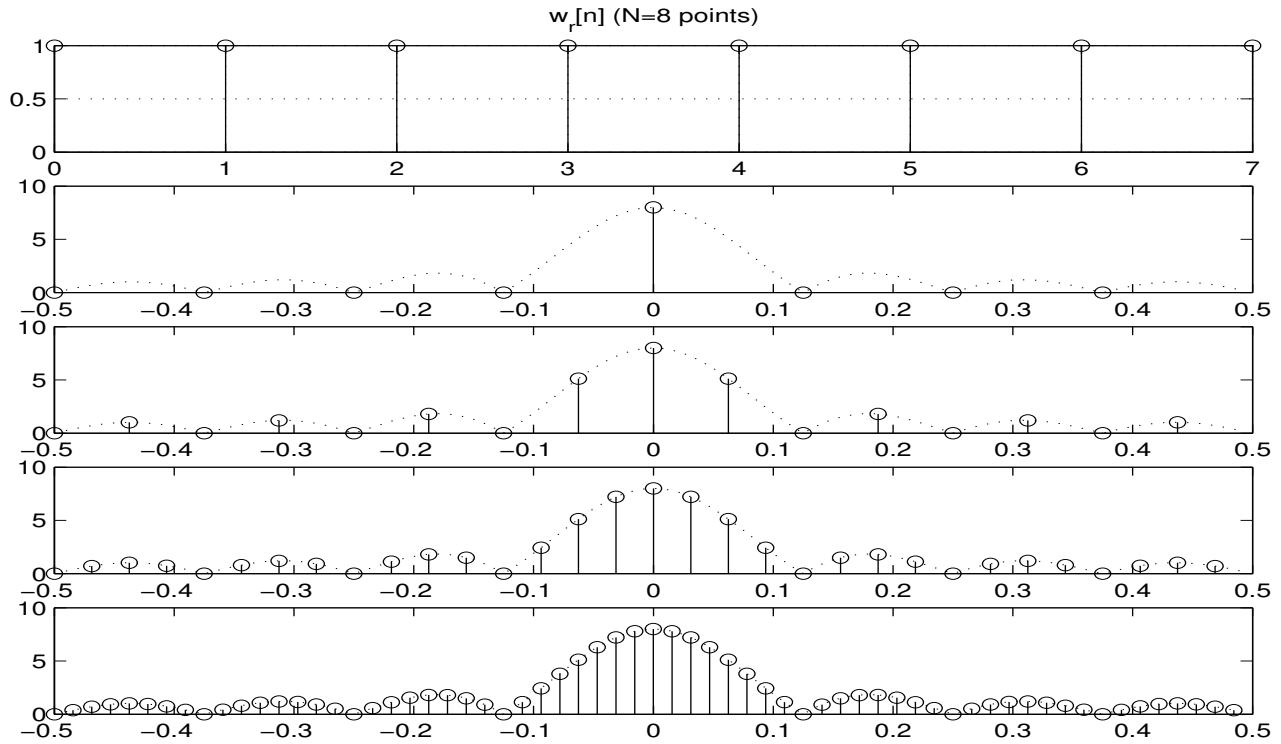
4 Paramètres de l'analyse



Notes :

5 Zero-padding

– Ajout de $L-N$ zéros à la suite de $x(n)$ avant TFD sur L points



Notes :

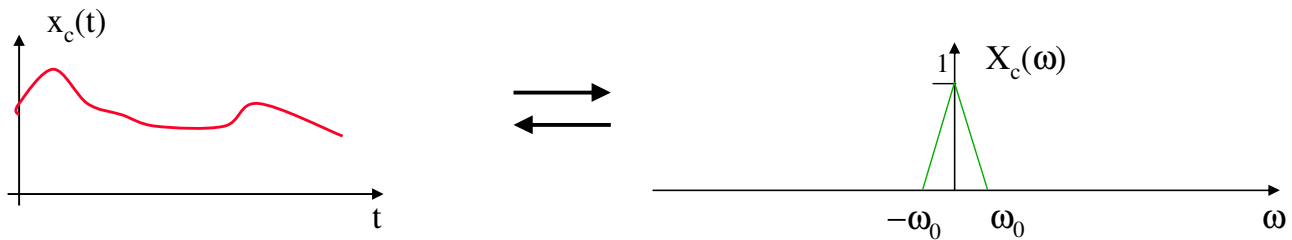
X. Systèmes multi-cadences

1. Définition
2. Décimation
3. Interpolation

Notes :

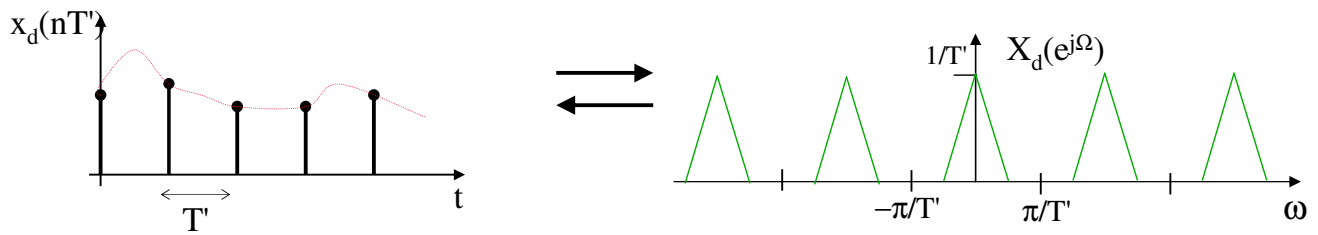
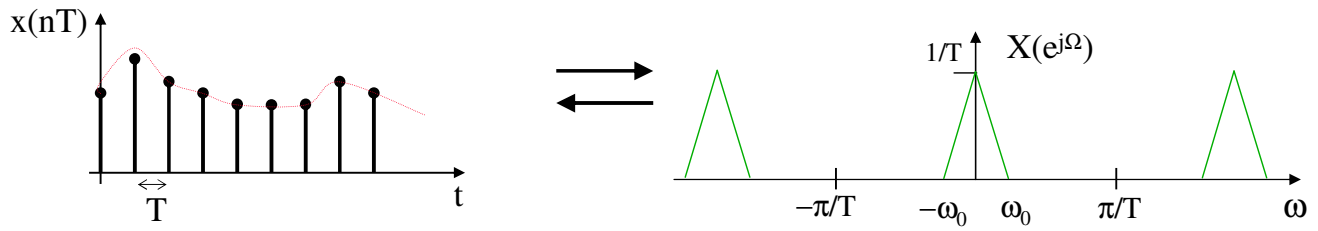
• Systèmes multi-cadences

- Systèmes dans lesquels on pourra avoir plusieurs fréquences d'échantillonnage dans une même chaîne de traitement
- Ils tirent partie de la forme spectrale d'un signal en gardant F_e toujours à sa valeur optimale
 - > Réduction de la complexité



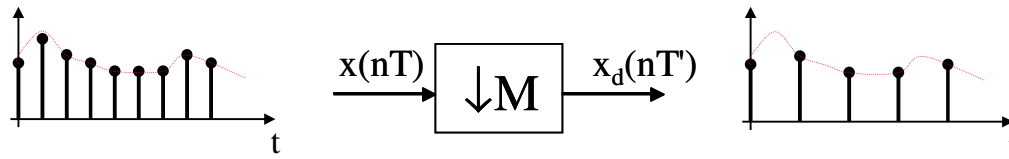
Notes :

1 Définition



Notes :

• Décimation d'un facteur M



$$T' = MT$$

$$F'e = Fe/M$$

$$x_d(n) = x(nM)$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega/M - 2\pi i/M)})$$

- Pour éviter le recouvrement de spectre, le signal $x_c(t)$ doit être à bande limitée et respecter le théorème de Shannon par rapport à T'

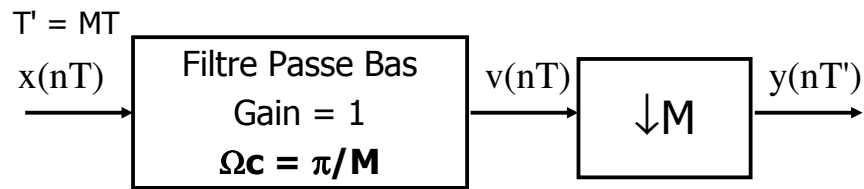
$$X_c(\omega) = 0 \quad \text{pour } |\omega| \geq \omega_0$$

$$\text{et } \pi/T' = \pi/(MT) \geq \omega_0 \quad \text{ou } F'e = Fe/M \geq \omega_0$$

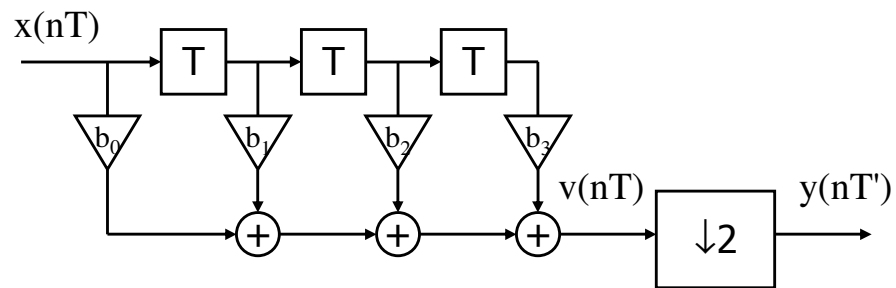
Notes :

• Filtres à décimation

– Filtre suivi d'un décimateur



• Optimisation du filtre à décimation



Notes :

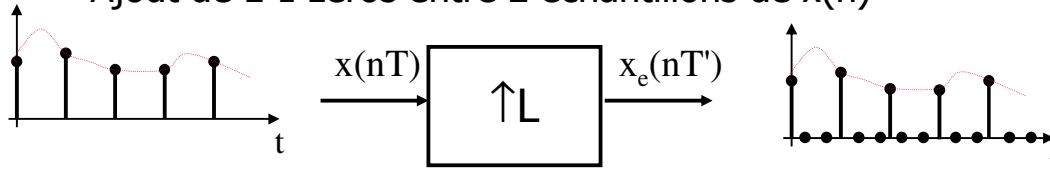
• Interpolation d'un facteur L

- Objectif : augmenter la fréquence d'échantillonnage d'un signal $x(n)$ échantillonné à la période T d'un facteur L

$$x_i(n) = x(n/L) = x_c(nT'), \text{ avec } T' = T/L$$

• Élévateur de fréquence

- Ajout de $L-1$ zéros entre 2 échantillons de $x(n)$



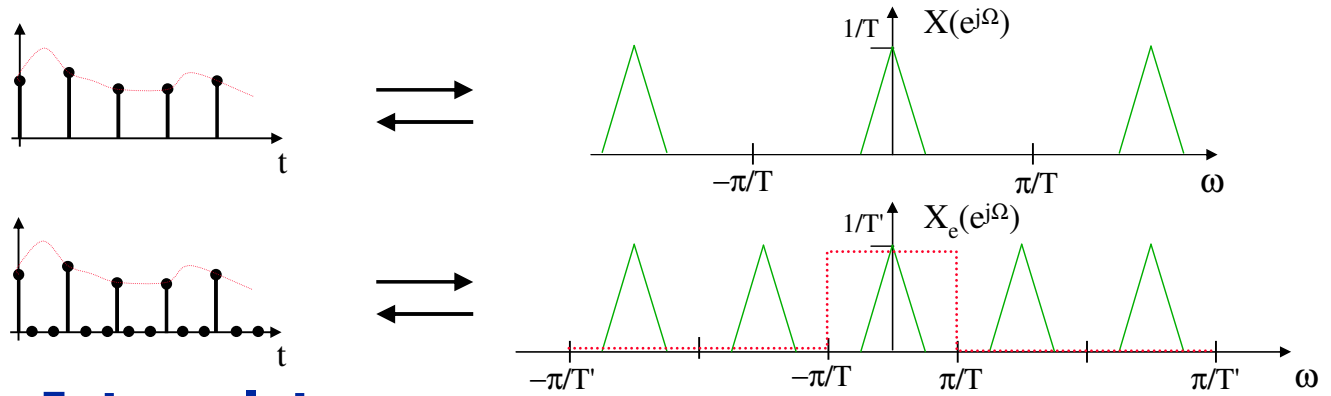
$$x_e(n) = \begin{cases} x(n/L), n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

$$X_e(e^{j\omega T'}) = X(e^{j\omega T})$$

$$X_e(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L})$$

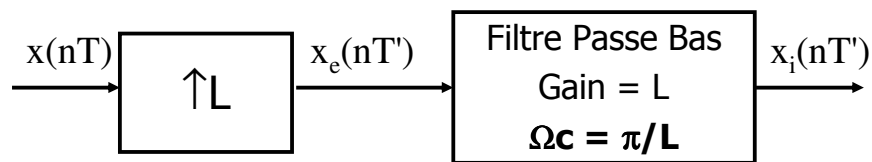
Pas d'effet sur le spectre

Notes :



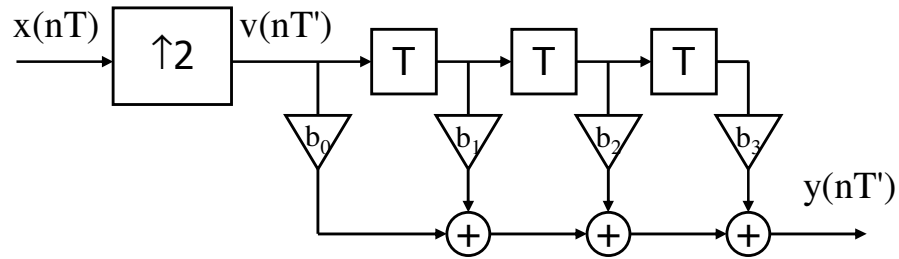
• Interpolateur

- Succession d'un élévateur de fréquence et d'un filtre passe-bas idéal de gain L , de période d'échantillonnage T' et de fréquence de coupure $F_c = 1/2T$ (i.e. $\Omega_c = \pi/L$).



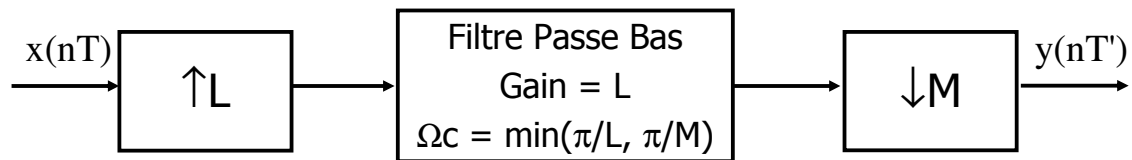
Notes :

- Optimisation du filtre à interpolation



- Multiplication de F_e par un facteur rationnel $R=L/M$

- $T' = T.M/L$



Notes :