

Feuille TD 6

**Exercice 1** Approximation interne par des fonctions régulières

On remarquera qu'on ne fait aucune hypothèse de régularité sur le bord de  $\Omega$ .

1. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\eta_\epsilon$  une suite de fonctions régularisantes.  
Soit  $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \text{ tel que } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$ .  
Soit  $p \in [1, \infty[$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ; soit  $u_\epsilon$  la suite des fonctions  $u_\epsilon : \Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_\epsilon = \eta_\epsilon * u.$$

- (a) Montrer que  $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$  pour tout  $\epsilon > 0$ .
  - (b) Montrer que  $u_\epsilon \rightarrow u$  dans  $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ .
2. Soit  $\Omega$  un ouvert **borné** de  $\mathbb{R}^n$  et  $p \in [1, \infty[$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , montrer qu'il existe une suite  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  et  $u_m \rightarrow u$  dans  $W^{k,p}(\Omega)$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ .
  3. Que peut-on dire si  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ou si  $\Omega$  est un domaine non borné?
  4. Que peut-on dire si  $p = \infty$ ?
  5. Montrer avec un exemple que la suite  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ne peut pas être toujours choisie telle que  $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$  (c'est à dire restriction à  $\Omega$  d'une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ).

**Exercice 2** Opérateur de prolongement

Soit  $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |x| < 1 \text{ et } x_n > 0 \text{ avec } x = (x_1 \dots x_n), \}$ .

1. Soit  $u \in C^1(\overline{B^+})$ . Montrer que la fonction (on l'appellera reflétée d'ordre élevé)  $\overline{u}$  définie sur  $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |x| \leq 1\}$  par :

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n \geq 0, \\ -3u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à  $C^1(\overline{B})$ .

2. Soit  $p \in [1, \infty]$ , montrer qu'il existe une constante  $C$ , qui ne dépend que de la dimension de l'espace  $n$  et de  $p$ , telle que  $|\overline{u}|_{W^{1,p}(B)} \leq C|u|_{W^{1,p}(B^+)}$ .
3. Montrer, avec un argument de densité, qu'il existe un opérateur de prolongement continu de  $W^{1,p}(B^+)$  dans  $W^{1,p}(B)$ .
4. Est-ce cet opérateur, restreint à  $W^{2,p}(B^+)$ , continu sur  $W^{2,p}(B)$ ? Et plus en général de  $W^{k,p}(B^+)$ , continu sur  $W^{k,p}(B)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ ?
5. Sous quelles hypothèses sur  $\Omega$  on peut généraliser les résultats précédents?