Université de Rennes 1 Année 2009-2010
UFR Mathématiques M2, EDP

Feuille TD 5
Introduction à la méthode de Perron

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si u est une fonction convexe sur I alors u vérifie le principe du maximum fort sur I.
2. Montrer que si v est concave sur I et u est convexe sur I et $v(a) \geq u(a)$, $v(b) \geq u(b)$, alors $v > u$ ou $v = u$ sur I.
3. Soient $c < d$ deux réels dans I. Montrer que si u est convexe sur I, alors la fonction U continue sur I qui coincide avec u en dehors de $]c,d[$ et qui est linéaire sur $[c,d]$ est convexe. On appellera cette fonction rélèvement linéaire de u sur $[c,d]$.
4. Montrer que si $(u_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ est une famille de fonctions convexes sur I, alors $\sup\limits_{i=1\dots N} u_i$ est convexe.
5. Soient α et β deux réels, montrer que la fonction
$$h = \sup\{u : u \,\text{convexe sur}\, I \,\text{telle que}\, u(a) \leq \alpha \text{ et } u(b) \leq \beta\}$$
coïncide avec la fonction linéaire l telle que $l(a) = \alpha$ et $l(b) = \beta$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction sous-harmonique sur Ω est une fonction continue sur Ω telle que, pour toute boule $B(x,r) \subset\subset \Omega$ (($B(x,r)$ est la boule de centre x et rayon $r > 0$) et pour toute fonction h harmonique sur $B(x,r)$ telle que $u \leq h$ sur $\partial B(x,r)$, on a $u \leq h$ dans $B(x,r)$.

1. Montrer que si $n = 1$, la notion de sous-harmonicité coïncide avec la notion de convexité.
2. Montrer que si u est une fonction sous-harmonique sur Ω alors u vérifie le principe du maximum fort sur Ω.
3. Montrer que si v est sur-harmonique sur Ω (donner la définition) et u est sous-harmonique sur Ω, $v \in C(\overline{\Omega})$ et $u \in C(\overline{\Omega})$ et $v \geq u$ sur $\partial\Omega$, alors $v > u$ ou $v = u$ sur Ω.
4. Soit u est une fonction sous-harmonique sur Ω, $B \subset\subset \Omega$ est une boule. Soit $\overline{u}$ la fonction harmonique qui coïncide avec u sur le bord de B. Montrer que la fonction U définie par
$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega\backslash B, \\ \overline{u}(x) & \text{si} x \in B \end{cases}$$
est sous-harmonique sur Ω. On appellera cette fonction rélèvement harmonique de u sur B.
5. Montrer que si $(u_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ est une famille de fonctions sous-harmoniques sur Ω, alors $\sup\limits_{i=1\dots N} u_i$ est sous-harmonique.