Université de Rennes 1 — Année 2009-2010
UFR Mathématiques M2, EDP

Feuille TD 4 (Espaces de Sobolev)

Exercice 1

1. Soit $I =]-1,1[$. Pour quels $p \in [1,\infty]$ la fonction $f : x \mapsto |x|$ appartient-elle à l'espace $W^{1,p}(I)$; pour quels $q \in [1,\infty]$ f appartient-elle à l'espace $W^{2,q}(I)$?
2. Soit Q le carré ouvert $Q =]-1,1[\times]-1,1[$. Soit u la fonction, définie sur Q :

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{si} \quad x_1 > 0, |x_2| < x_1, \\ 1 + x_1 & \text{si} \quad x_1 < 0, |x_2| < -x_1, \\ 1 - x_2 & \text{si} \quad x_2 > 0, |x_1| < x_2, \\ 1 + x_2 & \text{si} \quad x_2 < 0, |x_1| < -x_2. \end{cases}$$

   Pour quels $p \in [1,\infty]$, u appartient-elle à l'espace $W^{1,p}(Q)$?

Exercice 2

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe une constante C telle que, pour toute fonction $u \in C_c^\infty(\Omega)$, on a l'inégalité d'interpolation :

$$\int_\Omega |Du|^2 dx \leq C \left(\int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |D^2 u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

2. Si Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, montrer que l'inégalité d'interpolation (1) reste vraie pour $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Exercice 3

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ telle que

$$Du = 0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $u = c$ presque partout dans Ω.

Exercice 4

Donner un exemple d'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$ et d'une fonction $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tels que u n'est pas lipschitzienne dans Ω.

Exercice 5

Vérifier que la fonction non bornée :

$$x \mapsto \log\left(\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right)$$

appartient à l'espace $W^{1,n}(B(0,1))$ pour $n > 1$, où $B(0,1)$ est la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine et de rayon un.

Exercice 6

Soit $Q =]-1,1[\times]-1,1[\backslash\{(0,x_2), x_2 \geq 0\}$. Soit H la fermeture par rapport à la norme de $H^1(Q)$ de l'ensemble des fonctions de $H^1(Q)$ de classe C^∞ qui s'annulent sur un voisinage de $\Gamma =]-1,1[\times\{-1\}$. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in H$:

$$\int_Q u^2 \leq C \int_Q |Du|^2.$$

Exercice 7

Soit $\alpha > 0$ et $\Omega = B(0,1)$, où $B(0,1)$ est la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine et de rayon un. Montrer qu'il existe une constante C qui ne dépend que de n et α, telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega u^2 \leq C \int_\Omega |Du|^2$$

si

$$m\big(\{x \in \Omega \ : \ u(x) = 0\}\big) \geq \alpha.$$

Exercice 8

1. Soit Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 avec F' bornée. Montrer que si $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$, pour un $p \in [1,\infty]$, alors $v = F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. Soit Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1,\infty]$, montrer que
   (a) si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$,
   (b) si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ et $u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ ($u = u^+ - u^-$) et

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{presque partout dans } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{presque partout dans } \{u \leq 0\}. \end{cases}$$

$$Du^- = \begin{cases} -Du & \text{presque partout dans } \{u < 0\}, \\ 0 & \text{presque partout dans } \{u \geq 0\}. \end{cases}$$

   (c) si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $Du = 0$ presque partout sur l'ensemble $\{u = 0\}$.

   Suggestion : utiliser la suite des fonctions $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$F_n(z) = \begin{cases} (z^2 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} & \text{si } z \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$