Université de Rennes 1 Année 2009-2010
UFR Mathématiques M2, EDP

Feuille TD 3

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ (Borne uniforme du gradient du logarithme d'une fonction harmonique positive.)
Soit u soit une fonction harmonique dans $B(0,1)$, non negative. Soient $v = \log(u)$, $w = |\nabla v|^2$, $\phi \in C_0^1(B(0,1)) \cap C^2(B(0,1))$ non négative sur $B(0,1)$.

1. Calculer ∇v.
2. Calculer Δv.
3. Montrer que $\Delta w = 2\sum_{i,j=1}^{n}(\partial_{ij}v)^2 - 2\sum_{j=1}^{n}\partial_j v\partial_j w$.
4. Montrer que $\sum_{i,j=1}^{n}(\partial_{ij}v)^2 \geq \dfrac{w^2}{n}$.
5. Calculer $\Delta w\phi$ et montrer, grâce à une inégalité de Hölder, que si $\dfrac{|\nabla\phi|^2}{\phi}$ est borné :
$$\Delta(\phi w) + 2\sum_{i=1}^{n}\partial_i v\partial_i(\phi w) \geq \phi\sum_{i,j=1}^{n}(\partial_{ij}v)^2 - |\nabla v|^2(|\Delta\phi| + 4\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}) - 2|\nabla v|^3|\nabla\phi.$$
6. Soit $\phi = \eta^4$, η une fonction $\eta \in C_0^1(B(0,1)) \cap C^2(B(0,1))$ non negative sur $B(0,1)$. Montrer que il existe une constante C qui peut dépendre de η telle que
$$\Delta(\eta^4 w) + 2\sum_{i=1}^{n}\partial_i v\partial_i(\eta^4 w) \geq \eta^4\frac{|\nabla v|^4}{n} - C\eta^3|\nabla v|^3 - C\eta^2|\nabla v|^2,$$
et en déduire que il existe une constante C' qui peut dépendre de η telle que
$$\Delta(\eta^4 w) + 2\sum_{i=1}^{n}\partial_i v\partial_i(\eta^4 w) \geq \eta^4\frac{|\nabla v|^4}{2n} - C'.$$
7. Soit x_0 un point de maximum interne (dans $B(0,1)$) de $\eta^4 w$, montrer que $\eta^4 w^2(x_0) \leq C''$ (une constante qui peut dépendre de η) et en déduire que $\eta^4 w(x) \leq C'''$ (une constante qui peut dépendre de η).
8. Montrer qu'il existe une constante $\tilde{C}$ qui ne dépend que de n telle que si u est une fonction harmonique dans $B(0,1)$, non négative
$$\sup_{x\in B(0,\frac{1}{2})}|\nabla\log(u)| \leq \tilde{C}.$$