Université de Rennes 1 Année 2009-2010 UFR Mathématiques M2, EDP

Feuille TD 2

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ (Estimation optimale des dérivées des fonctions harmoniques)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, et u soit une fonction harmonique dans Ω.

1. Montrer que si $B((x_0,y_0),r) \subset \Omega$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\sin(\theta)) r\cos(\theta) d\theta.$$
2. Si u satisfait les inégalités suivantes
$$m \leq u \leq M,$$
sur la frontière $\partial B((x_0,y_0),r)$ de $B((x_0,y_0),r)$ montrer que
$$|\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)| \leq \frac{2(M-m)}{\pi r}.$$
[Suggestion : déterminer une constante opportune c et appliquer les résultats du point précédent à $u - c$.]
3. En déduire que si u satisfait les inégalités suivantes
$$m \leq u \leq M,$$
sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω
$$|\nabla u(x,y)| \leq \frac{2(M-m)}{\pi d},$$
où d est la distance de (x,y) de la frontière [suggestion : commencer par remarquer que le Laplacien (Δ) est invariant par rotation, ensuite choisir comme axe celui qui a la direction du gradient].
4. Soit $\phi = \arctan(\dfrac{2y}{1-(x^2+y^2)})$.
   (a) (Presque facultatif) Montrer que $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{4xy}{1-2x^2+2y^2+x^4+2x^2y^2+y^4}$, et que $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{2(1-x^2+y^2)}{1-2x^2+2y^2+x^4+2x^2y^2+y^4}$.
   (b) (Presque facultatif) Montrer que ϕ est harmonique dans $B((0,0),1)$.
5. Montrer que l'inégalité démontrée au point 3 est optimale.
6. (Facultatif) Soit $v = y\log[(x-1)^2+y^2] + 2(1-x)\arctan(\dfrac{y}{1-x})$,
   (a) Montrer que $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2\arctan(\dfrac{y}{x-1})$, et que $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \ln((x-1)^2+y^2)+2$.
   (b) Montrer que v est harmonique dans $B((0,0),1)$ et que v est continue sur $\overline{B((0,0),1)}$.
7. (Facultatif) Montrer que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|\nabla v(x,y)|}{|\log((x-1)^2+y^2)|} = 1$, que pouvez-vous en conclure ?
8. Montrer, avec un contrexemple, que (3) ne peut pas être satisfaite pour les fonctions sous-harmoniques.