Université de Rennes 1 — Année 2009-2010
UFR Mathématiques M2, EDP

Feuille TD 1

Exercice 1

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, $v \in C^2(\overline{\Omega})$ est une fonction sous-harmonique si :

$$-\Delta v \leq 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

1. Montrer que si v est sous-harmonique alors
$$v(x) \leq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} v dy$$
pour toute boule ouverte $B(x,r) \subset \Omega$.
2. Soit Ω borné, déduire du point précédent que
$$\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v.$$
(Principe de maximum faible).
3. Soit ϕ une fonction régulière et convexe. Soit u harmonique et $v = \phi(u)$. Montrer que v est sous-harmonique.
4. Montrer que si u est harmonique alors $|\nabla u|^2$ est sous-harmonique.
5. Dériver le principe de maximum faible de considérations relatives aux conditions nécessaires satisfaites sur un point de maximum interne.

Exercice 2

Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et u une fonction continue dans I qui vérifie l'identité de la moyenne :

$$u(x) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} u(s) ds$$

pour tout $x \in I$ et $r \in \mathbb{R}_*^+$, tel que $]x - 2r, x + 2r[\subset I$.

1. Montrer que u est dérivable dans I
2. Montrer que u' vérifie l'identité de la moyenne.
3. Montrer que $u(x) = \dfrac{u(x+r) + u(x-r)}{2}$
pour tout $x \in I$ et $r \in \mathbb{R}_*^+$, tel que $]x - 2r, x + 2r[\subset I$.
4. Montrer que u est harmonique sur I.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Principe de Schwarz

Soit B^+ la demi-boule $\{x \in \mathbb{R}^n |x| < 1, x_n > 0\}$. Si $u \in C^1(\overline{B^+}) \cap C^2(B^+)$ est une fonction harmonique dans B^+ telle que $u = 0$ sur $\partial B^+ \cap \{x_n = 0\}$. Soit v :

$$v(x) = \left\{ \begin{array}{cl} u(x) & \text{if } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, x_2, \ldots, -x_n) & \text{if } x_n < 0 \end{array} \right.$$

Montrer que v est harmonique.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$

Montrer que si $\Delta u = 0$ dans Ω et $u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur une portion Γ ouverte régulière et non vide de la frontière $\partial\Omega$ et $u \in C^1(\Omega \cap \Gamma)$ alors u est identiquement nulle.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ (H. Weyl)

Montrer que si $u \in C(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $n \geq 3$) et satisfait

$$\int_\Omega u \Delta \phi = 0$$

pour tout $\phi \in C_0^2(\Omega)$ (deux fois dérivable avec support dans Ω), alors u est harmonique.