Feuille de travaux pratiques - Python #8

Dans ce TP, nous nous intéressons aux processus de Poisson.

1 Simulations de processus de Poisson

Un processus de Poisson modélise les dates de réalisation de nombreux phénomènes :
— dates d'arrivées d'appels dans un serveur téléphonique
— dates d'émission de particules radiocatives d'une molécule
— dates d'arrivées de clients dans une file d'attente.

Definition 1.1. Un processus de comptage $(N_t)_{t\geq 0}$ est un **processus de Poisson d'intensité $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$** si $N_0 = 0$ et
— $\forall 0 < t_1 < \cdots < t_n$, les variables N_{t_1}, $N_{t_2-t_1}$, $\cdots$, $N_{t_n-t_{n-1}}$ dont indépendantes,
— $\forall 0 < t_1 < t_2$ et $h > 0$, $N_{t_2+h} - N_{t_1} + h$ a même loi que $N_{t_2} - N_{t_1}$,
— $\forall h > 0$, $\mathbb{P}(N_h = k) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & \text{si } k = 0, \\ \lambda h + o(h) & \text{si } k = 1, \\ o(h) & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$

Notons $T_0 = 0 < T_1 < \cdots < T_n$ les dates de réalisation d'un phénomène, alors $N_t := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{T_n \leq t}$ est le nombre d'évènements réalisés jusqu'au temps t.

Proposition 1.1. *Si N est un processus de Poisson, alors pour tout $t \geq 0$, $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.*
Et pour tout $n \geq 1$, $T_n - T_{n-1} \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Un tel processus se représente facilement à partir de la donnée d'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. En effet, si on pose $T_n := S_1 + \ldots + S_n$, on vérifie que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$N_t := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{T_n \leq t},$$

est un processus de Poisson d'intensité λ.

Exercice 1. *Montrer que la variable T_n suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$ et illustrer cette identité en superposant un histogramme empirique à la densité cible.*

Proposition 1.2 (Loi conditionnelle des temps de saut)**.** *Sachant que $N_t = k$ (avec $k \geq 1$), la loi du $k-$uplet $(T_1, \ldots, T_k)$ coincide avec celle d'un $k-$échantillon ordonné de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, t]$.*

Exercice 2. *Simulation de trajectoires.*

1. *Simuler et afficher une trajectoire d'un processus de Poisson simple d'intensité $\lambda = 1/5$ jusqu'à son 20ième saut.*

2. *Simuler une trajectoire de processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1/5$ jusqu'à l'instant $t = 20$*
   (a) *à l'aide d'une boucle* `while`*,*
   (b) *à l'aide de la proposition 1.2.*

   Comparer ces deux méthodes en générant mille trajectoires avec chaque méthode et mesurer le temps de calcul.
3. *Illustrer le fait que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.*
4. *Reprendre la question précédente en effectuant un test du χ^2 d'adéquation.*

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a l'encadrement $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$. On définit des variables aléatoires réelles positives U_t et V_t par

$$U_t := t - T_{N_t}, \qquad V_t := T_{N_t+1} - t,$$

de sorte que U_t mesure la durée entre le temps courant et le temps du dernier saut, et V_t mesure la durée entre le temps courant et l'instant du prochain saut. Alors,

Proposition 1.3. *Pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires U_t et V_t sont indépendantes. La loi de U_t est celle de $S_1 \wedge t$ et celle de V_t est égale à celle de $S_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$.*

Exercice 3. *Paradoxe de l'inspection ou paradoxe de l'autobus*

1. *Montrer que l'espérance de la longueur de l'intervalle $[T_{N_t}, T_{N_t+1}]$ est égale à $\lambda^{-1}(2 - e^{-\lambda t})$, et tend donc rapidement vers $2/\lambda$ lorsque t tend vers l'infini.*
2. *Quelle est l'espérance des temps d'inter-sauts S_k ? Commenter.*

2 Comportement asymptotique et estimation

En écrivant N_t comme la somme de ses accroissements (indépendants), on peut établir les comportements asymptotiques suivants pour les trajectoires d'un processus de Poisson.

Proposition 2.1. *Lorsque t tend vers l'infini, on a les convergences suivantes :*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.s.} \lambda, \qquad \sqrt{\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{N_t}{t} - \lambda\right) \xRightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 4. *Estimation de l'intensité quand on observe le processus jusqu'à un temps t.*

1. *À l'aide d'un générateur aléatoire de votre choix, choisir une intensité $\lambda > 0$ au hasard.*
2. *Génèrer alors une trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité λ et proposer un estimateur $\widehat{\lambda}_t$ de cette intensité.*
3. *Proposer un intervalle de confiance I_t pour λ de niveau de confiance 95%.*
4. *Représenter sur un même graphique l'évolution temporelle de l'estimateur $\widehat{\lambda}_t$ et de l'intervalle de confiance I_t.*

L'intensité du processus peut aussi être estimée à partir de l'observation des temps de sauts du processus. En effet, la loi des grands nombres et le théorème limite central appliqués à $T_n = S_1 + \ldots + S_n$ donnent

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{\lambda}, \qquad \sqrt{n}\left(\lambda\frac{T_n}{n} - 1\right) \xRightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 5. *Estimation de l'intensité quand on observe le processus jusqu'à son n-ième saut.*

1. *À l'aide d'un générateur aléatoire de votre choix, choisir une intensité $\lambda > 0$ au hasard.*
2. *Génèrer alors une trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité λ jusqu'à son $n-$ième saut et proposer un estimateur $\widehat{\lambda}_n$ de cette intensité.*
3. *Proposer un intervalle de confiance I_n pour λ de niveau de confiance 95%.*
4. *Représenter sur un même graphique l'évolution temporelle de l'estimateur $\widehat{\lambda}_n$ et de l'intervalle de confiance I_n.*

3 Quelques compléments

3.1 Superposition et décomposition

Proposition 3.1 (Superposition de deux processus de Poisson)**.** *Si $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson simples indépendants de paramètres respectifs λ et μ alors la somme de processus $(M_t + N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson simple de paramètre $\lambda + \mu$.*

Exercice 6. *Proposer une illustration de la proposition 3.1.*

Proposition 3.2 (Décomposition d'un processus de Poisson)**.** *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson simple de paramètre λ. On construit les processus deux processus $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$ de la façon suivante : à chaque saut (indépendamment des autres) du processus de base $(N_t)_{t\geq 0}$, on choisit de faire sauter $(N_t^1)_{t\geq 0}$ avec probabilité p ou $(N_t^2)_{t\geq 0}$ avec probabilité $1-p$. Alors les processus $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson simples indépendants d'intensité respectives $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.*

Exercice 7. *Écrire une fonction qui trace une trajectoire du processus de base $(N_t)_{t\geq 0}$ et en déduit les trajectoires des sous-processus $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$.*

3.2 Processus de Poisson composé

Definition 3.1. Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi ν, indépendante de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$. On pose $T_n := S_1 + \ldots + S_n$. On appelle **processus de Poisson composé d'intensité $\boldsymbol{\lambda > 0}$ et de loi de saut $\boldsymbol{\nu}$** le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ issu de zéro défini par

$$X_t := \sum_{n\geq 0} Y_n \mathbb{1}_{T_n \leq t}.$$

N.B. *Le processus de Poisson simple est un processus de Poisson composé où la loi des sauts est la mesure de Dirac δ_1.*

Exercice 8. *Simuler une trajectoire de processus de Poisson composé d'intensité 1 et de loi de saut $\mathcal{N}(0,1)$.*

Proposition 3.3 (Loi d'une somme aléatoire)**.** *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de fonction caractéristique ϕ et soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G, indépendante de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, la somme aléatoire (avec convention qu'une somme vide est nulle)*

$$S = \sum_{n=1}^{N} Y_n$$

admet pour fonction caractéristique $\phi_S(u) = G(\phi(u))$.

Corollaire 3.1. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Poisson composé d'intensité* λ *et de loi de saut* ν *de moyenne* m *et de variance* $\sigma^2 < +\infty$. *Alors, pour tout* $t \geq 0$ *:*

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[Y_1] = m\lambda t, \qquad var(X_t) = \mathbb{E}[N_t]var(Y_1) + var(N_t)\mathbb{E}[Y_1]^2 = \lambda t\sigma^2 + \lambda t m^2.$$

Exercice 9. *Illustrer le corollaire en considérant différentes lois de saut.*