Université Rennes 1
L3, PSI2, 2021-2022
Nathalie Krell

Partiel n°2 .

Durée: 1 heure.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Vous avez le droit à votre feuille bleue mais pas à la calculatrice.

Exercice 1 Le coryza du chat est une maladie virale associée à un symdrome respiratoire qui touche principalement les chatons. Pour estimer la prévalence (c'est-à-dire la proportion de présence) dans un département, on prélève un échantillon de 145 chatons et 25 s'avèrent porteurs de cette maladie.

[a] Calculer la fréquence observée de chatons porteurs du coryza dans cet échantillon.

[b] Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance asymptotique de 90% pour la proportion de chatons touchés par la maladie dans le département.

[c] L'amplitude de l'intervalle de confiance asymptotique étant trop grande, on souhaite prélever un nouvel échantillon. Quel doit être le nombre de personne choisi pour l'échantillon si l'on veut que la taille de l'intervalle de confiance asymptotique soit inférieure ou égale à 0.01 ? On pourra donner la réponse sous la forme de produits et divisions de réels.

Exercice 2 Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathbb{P}_\theta$ pour $\theta \in]0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$, telle que pour tout entier $k > 0$, on a $\mathbb{P}_\theta(X_1 = k) = \binom{k}{m}\theta^k(1-\theta)^{m-k}$. On suppose que m est connu.

[a] Écrire le modèle statistique correspondant.

[b] Calculer $\mathbb{E}_\theta(X_1)$ et déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.

[c] Est-ce que le modèle est identifiable ?

[d] Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance.

[e] (question bonus). Montrer que $Var_\theta(X_1) = m\theta(1-\theta)$. Vous pourrez utiliser cette valeur dans la suite même si vous n'avez pas réussi à le montrer.

[f] Soit l'estimateur $\hat{\theta} := \frac{\overline{X_n}}{m}$. Quel est le MSE de $\hat{\theta}$?

[g] Quelle est la vitesse de convergence notée c_n de $\hat{\theta}$? Que vaut $\sigma^2(\theta)$ dans l'expression $c_n(\hat{\theta} - \theta) \to \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$?

[h] Donner un intervalle de confiance asymptotique à 85% de θ.

[i] On suppose que le modèle vérifie les hypothèses afin de pouvoir appliquer les résultats sur l'information de Fisher. Calculer la quantité d'information de Fisher.
Est-ce que $\hat{\theta}$ est efficace ?

$$\Phi(t) = P(X \leq t) \text{ pour } X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997