

Uniquement une feuille de notes recto-verso

Durée : 1 heure

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points.

Exercice 1

Un vol Nice-Paris est assuré par un Airbus de 140 places. L'expérience a montré que la probabilité qu'une personne ayant acheté un billet se présente est $p \in]0, 1[$. On suppose que les comportements des voyageurs sont indépendants les uns des autres. La compagnie fait du surbooking, elle a vendu n billets.

1. Quelle est la loi de S_n le nombre de personnes qui se présentent pour prendre l'avion ?
2. On suppose que n est un nombre assez grand, par quelle loi limite pouvez vous approcher S_n ?
3. On suppose dans un premier temps que $p = 0.9$ et on se demande combien de réservations la compagnie aérienne a intérêt à accepter afin d'avoir 99 % de chances de ne dédommager personne. Vous pourrez donner votre réponse sous la forme \sqrt{n} est solution d'une inégalité faisant intervenir un polynôme de degré 2 en \sqrt{n} .
4. On observe que finalement $S_n/n = 0.9$. Donner un intervalle de confiance asymptotique dépendant de n à 90 pourcent de p .

Exercice 2

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de variables aléatoires indépendantes de loi \mathbb{P}_θ pour $\theta > 1$, telle que pour tout entier $k > 0$, on a $\mathbb{P}_\theta(X_1 = k) = \frac{1}{\theta}(1 - \frac{1}{\theta})^{k-1}$.

1. Écrire le modèle statistique correspondant.
2. Montrer que $\mathbb{E}_\theta(X_1) = \theta$ et déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.
3. Est-ce que le modèle est identifiable ?
4. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance.
5. (question bonus). Montrer que $Var_\theta(X_1) = \theta(\theta - 1)$. Vous pourrez utiliser cette valeur dans la suite même si vous n'avez pas réussi à le montrer.
6. Soit l'estimateur $\hat{\theta} := \overline{X_n}$. Quel est le MSE de $\hat{\theta}$?
7. Quelle est la vitesse de convergence noté c_n de $\hat{\theta}$? Que vaut $\sigma^2(\theta)$ dans l'expression $c_n(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$?
8. On suppose que le modèle vérifie les hypothèses afin de pouvoir appliquer les résultats sur l'information de Fisher. Calculer la quantité d'information de Fisher.
Est-ce que $\hat{\theta}$ est efficace ?

$$\Phi(t) = P(X \leq t) \text{ pour } X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997