

## Rattrapage

Durée : 2 heures

Uniquement une feuille recto-verso de notes. Calculatrice interdite.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points.

[1] Héloïse veut se lancer dans les cours particuliers de proba-stat et elle interroge 70 étudiants de sa ville afin de savoir s'ils sont intéressés. Chaque étudiant a une probabilité égale à  $p$  d'être intéressé par ces cours particuliers. Les comportements des étudiants sont supposés indépendants les uns des autres.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants intéressés.

- [a] Quelle est la loi de  $X$  ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
- [b] Énoncer le TCL et en déduire un résultat de convergence en loi dans lequel intervient  $X$ .
- [c] Héloïse souhaite savoir que vaut la probabilité  $p$ , donner un intervalle de confiance asymptotique pour  $p$ , de niveau de confiance  $1 - \alpha$ .
- [d] Applications numériques : calculer l'intervalle de confiance asymptotique pour  $p$ , de niveau de confiance  $1 - \alpha$  : pour une observation de 70 personnes qui sont intéressées par les cours particuliers de proba-stat et pour  $1 - \alpha = 85\%, 95\%, 97\%$ . La réponse sera sous la forme d'addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée de nombres réels.

[2] Pour cet exercice on doit donner la valeur exacte ou sous la forme d'une fraction irréductible pour chacune des réponses.

Un enseignant veut savoir s'il a intérêt à promouvoir la méditation auprès de ses élèves et donc il cherche à comprendre s'il existe une relation linéaire entre le nombre d'heures passées à méditer par un étudiant et le résultat à un examen. Pour la  $i$ -ème personne interrogée, on note  $x_i$  le nombre d'heures passées à méditer par jour et  $y_i$  la note à l'examen. Il a interrogé 10000 personnes et l'on obtient les sommes suivantes :

$$\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} x_i = 21.2 \text{ et } \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} x_i^2 = 5.44, \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} y_i = 12 \text{ et } \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} y_i^2 = 340 \text{ et } \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} y_i x_i = 10.4.$$

- a) Calculer l'équation de la droite de régression linéaire de  $y$  en  $x$ .
- b) Calculer le coefficient de corrélation observé. Étudier la qualité de l'ajustement.
- c) On suppose que la loi de l'erreur est une gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$  connue, elle vaut 1, donner un intervalle de confiance pour les 2 paramètres à estimer.
- d) Estimer la note la plus plausible pour un étudiant sachant qu'il a médité 1 heure par jour.

[3] Pour chaque  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $Q_\theta$  la loi  $\mathcal{E}(\theta^2)$  exponentielle de paramètre  $\theta^2$ , avec  $\theta$  est un paramètre réel strictement positif. On observe un  $n$ -échantillon de loi  $Q_\theta$ . On rappelle que la densité de la loi exponentielle de paramètre  $\theta^2$  est  $f_\theta(x) = \theta^2 e^{-\theta^2 x}$  si  $x > 0$  et 0 sinon.

Le paramètre d'intérêt est  $\theta$ .

- [a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.
- [b] Est-ce que l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  existe ? Si oui le donner.

[c] Que vaut  $\mathbb{E}_\theta(X_1)$ ? Proposer un estimateur de  $\theta$  grâce à la méthode des moments.

[d] Le modèle est-il identifiable?

[e] Soit  $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$  un estimateur de  $\theta$ . Quelle est la vitesse de  $\hat{\theta}$ ?

[f] En déduire un intervalle de confiance asymptotique à 75 pourcent de  $\theta$ . Avec les valeurs numériques :  $n = 300$ ,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0.25$ . La réponse sera sous la forme d'addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée de nombres réels.

[g] On suppose que le modèle est régulier, que vaut l'information de Fisher?

[h] Question Bonus : Est-ce que c'est un estimateur asymptotiquement efficace de  $\theta$ ?

**Table de la loi normale**  
 $\Phi(t) = P(X \leq t)$  pour  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$t$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997