

Examen

Uniquement une feuille recto-verso de notes

Durée : 2 heures

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points.

1 Pour cet exercice on doit donner la valeur exacte pour chacune des réponses.

Une étudiante en sociologie veut analyser, dans le cadre d'un projet de TER, s'il existe une relation linéaire entre le nombre d'heures passées sur facebook et le nombre d'heures que les personnes dorment. Pour la i -ème personne interrogée, on note x_i le nombre d'heures passé sur facebook par jour et y_i le nombre d'heures qu'elle dort par nuit. Elle a interrogé 10000 personnes et l'on obtient les sommes suivantes :

$$\frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} x_i = 2.5 \text{ et } \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} x_i^2 = 7.5, \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} y_i = 7 \text{ et } \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} y_i^2 = 52.2 \text{ et } \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} y_i x_i = 19.25.$$

- [a] Identifier la variable à expliquer et la variable explicative. Pour chaque variable calculer la moyenne observée et la variance observée. Donner également la valeur de la covariance et du coefficient de corrélation. Commenter.
- [b] Ecrire l'équation de la droite de régression obtenue en utilisant les valeurs estimées des coefficients a et b .
- [c] Estimer le nombre d'heures le plus plausible qu'une personne dorme par nuit sachant qu'elle passe 5 heures sur facebook par jour.

2 Myriam veut lancer une activité artistique de dessin Zentangle et interroge 600 habitants de sa ville afin de savoir s'ils sont intéressés. Chaque habitant a une probabilité égale à p d'être intéressé par le Zentangle. Les comportements des habitants sont supposés indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'habitants intéressé.

- [a] Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
- [b] Par quelle loi peut-on approcher X et pourquoi ?
- [c] Myriam souhaite savoir que vaut la probabilité p , donner un intervalle de confiance asymptotique pour p , de niveau de confiance $1 - \alpha$.
- [d] Applications numériques : calculer l'intervalle de confiance asymptotique pour p , de niveau de confiance $1 - \alpha$: pour une observation de 350 personnes qui sont intéressés par le dessin Zentangle et pour $1 - \alpha = 88\%, 95\%, 98\%$. La réponse sera sous la forme d'addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée de nombres réels.

ATTENTION IL Y A DES EXERCICES A LA PAGE SUIVANTE.

[3] Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on note Q_θ la loi $\mathcal{N}(\sqrt{\theta}, 1)$ normale de paramètre $(\sqrt{\theta}, 1)$, avec θ est un paramètre réel strictement positif. On observe un n -échantillon de loi Q_θ .

Le paramètre d'intérêt est θ .

- [a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.
- [b] Que vaut $\mathbb{E}_\theta(X_1)$? Proposer un estimateur de θ grâce à la méthode des moments.
- [c] Le modèle est-il identifiable?
- [d] Est-ce que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ existe? Si oui le donner.
- [e] Soit $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$ un estimateur de θ . Quelle est la vitesse de $\hat{\theta}$?
- [f] En déduire un intervalle de confiance asymptotique à 90 pourcent de θ . Avec les valeurs numériques : $n = 200$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 4$. La réponse sera sous la forme d'addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée de nombres réels.
- [g] On suppose que le modèle est régulier, que vaut l'information de Fisher?
- [h] Question Bonus : Est-ce que c'est un estimateur asymptotiquement efficace de θ ?

[4] On s'intéresse aux salaires des employés d'une entreprise de fabrication de papier.

montant du salaire	[0,1000[	[1000,1500[	[1500,2000[	[2000,3000[
nombre de salariés	10	16	14	6

On fait l'hypothèse que les données sont uniformément réparties à l'intérieur des classes.

- [a] Représenter la distribution de cette variable par un histogramme
- [b] Calculer la moyenne arithmétique sous la forme d'une fraction.
- [c] Calculer la médiane (on pourra donner la réponse sous la forme d'une fraction).
- [d] Calculer la classe modale

$\Phi(t) = P(X \leq t)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

<i>t</i>	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997