

Feuille 6 : intervalle de confiance

Exercice 1 (Accidentologie)

Dans une ville, on recueille pendant cinquante jours le nombre d'accidents de la circulation quotidiens. Les données obtenues sont les suivantes.

Nbre accidents	0	1	2	3	4
Nbre jours	21	18	7	3	1

On suppose que le nombre d'accidents par jour est bien décrit par une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Donner un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour le nombre moyen d'accidents par jour (on pourra utiliser une approximation de la loi de Poisson).

Exercice 2 (Vélo électrique)

Un sondage auprès de 1500 ménages tirés au hasard dans la population française a indiqué que 20 % de ceux-ci prévoient d'acheter un vélo électrique dans les douze prochains mois. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance 95% pour le pourcentage de ménages de la population française prévoyant d'acheter un vélo électrique dans les douze prochains mois.

Exercice 3 (Fiabilité)

Une entreprise reçoit une livraison de 10000 pièces d'une même marchandise. Pour évaluer le nombre de pièces défectueuses dans le stock livré, on tire au hasard 400 pièces dont on constate que 45 sont défectueuses. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance 99% pour le nombre total de pièces défectueuses parmi les 10000. défectueuses.

Exercice 4 (Fiabilité, bis)

Un magasin de bricolage reçoit une importante commande de vis. Pour estimer la proportion de vis défectueuses livrées, on effectue n fois le test suivant : on tire avec remise des vis au hasard jusqu'à en trouver une défectueuse et on note alors le nombre de tirages nécessaires. On fixe pour la suite $\alpha \in]0, 1[$.

1. Déterminer le modèle statistique associé à cette expérience.
2. Construire un estimateur de la proportion de vis défectueuses.
3. Expliciter un intervalle de confiance asymptotique au niveau $(1-\alpha)$ pour la proportion de vis défectueuses.
4. Donner un estimateur sans biais du nombre moyen de tirages effectués lors des n tests.
5. Construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $(1-\alpha)$ pour ce nombre.

Exercice 5 (Sur la loi exponentielle)

On considère $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de variables i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$ est inconnu. On fixe $\alpha \in]0, 1[$

1. Montrer que la variable aléatoire $\lambda \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ est pivotale, i.e. sa loi ne dépend pas de λ . En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre λ au niveau de confiance $1-\alpha$.
2. Quelle est la loi $\bar{X}_n$? En déduire un autre un intervalle de confiance pour λ au niveau $1-\alpha$.
3. Si $\hat{\lambda} := 1/\bar{X}_n$, déterminer le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)$ lorsque n tend vers l'infini et en déduire un intervalle de confiance asymptotique pour λ au niveau $1-\alpha$.

Exercice 6 (Contrôle de taux)

Lors d'un contrôle sanitaire, on relève les taux de pesticides présents sur des plants de salade. L'étude s'effectue sur $n = 12$ plants. Les taux relevés sont les suivants.

0.5 1 1.5 0.3 2.3 1.1 0.9 1 1.1 1.3 2 1.5

On suppose que ces 12 observations sont indépendantes et suivent une loi normale $\mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$.

1. Donner une estimation par intervalle de confiance de la moyenne ν au niveau de confiance 95% en supposant que $\sigma^2 = 16$.
2. On suppose maintenant que la variance σ^2 est inconnue. Déterminer un nouvel intervalle de confiance à 95% pour la moyenne ν .
3. Donner un intervalle de confiance pour la variance au niveau 95%. L'hypothèse que $\sigma^2 = 16$ dans la première question est-elle raisonnable ?

Exercice 7 (Estimateur des moments)

On considère le modèle statistique $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (Q_\theta^{\otimes n})_{\theta \in]-1, 1[})$ où Q_θ désigne la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_\theta(x) := \frac{1}{2}(1 + \theta x)\mathbb{1}_{]-1, 1[}(x).$$

1. Construire un estimateur $\hat{\theta}$ de θ en utilisant la méthode des moments.
2. Calculer son biais et son risque quadratique moyen.
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer le comportement asymptotique de $\hat{\theta}$ lorsque n tend vers l'infini et en déduire un intervalle de confiance asymptotique pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 8 (Positionnement et médiane empirique)

On considère $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de variables i.i.d. dont la densité est de la forme $f_\theta(x) = f(x - \theta)$ où f est une fonction paire. On note M_n la médiane empirique associée, autrement dit si on considère les données ordonnées $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$, on a

$$M_n := X_{(k+1)}, \quad \text{si } n = 2k + 1, \quad \text{et} \quad M_n := \frac{1}{2}(X_{(k)} + X_{(k+1)}), \quad \text{si } n = 2k.$$

1. Déterminer la fonction de répartition, puis la densité de la médiane empirique M_n .
2. Montrer que sa loi est également symétrique par rapport à θ .
3. En déduire que la médiane empirique est un estimateur sans biais pour θ .