Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2022-2023
Nathalie Krell

Fiche de TD n°2 :

$\boxed{1}$ Soit (X, Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $\rho \in [0, 1]$. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

$\boxed{2}$ Soient X et Y deux v.a. indépendantes $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Montrer que $(X+Y)^2$ et $(X-Y)^2$ sont deux variables aléatoires indépendantes si et seulement si $\sigma_1 = \sigma_2$.

$\boxed{3}$ Soit X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit $a > 0$, on pose $Y^{(a)} = X\mathbb{1}_{\{|X|<a\}} - X\mathbb{1}_{\{|X|\geq a\}}$. Montrer que $Y^{(a)}$ est gaussienne mais que le couple $(X, Y^{(a)})$ n'est pas gaussien. Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que $Cov(X, Y^{(b)}) = 0$. Les variables X et $Y^{(b)}$ sont elles indépendantes ?

$\boxed{4}$ Soit X une v.a. qui suit une loi de Pareto dont le paramètre de seuil a est égal à 1. Quelle loi suit la v.a. $\ln(X)$?

$\boxed{5}$ Soient $X_1, ..., X_n$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, K)$, avec K une matrice inversible. Montrer la v.a.

$$Y = \sum_{1\leq i,j\leq n} (K^{-1})_{i,j} X_i X_j$$

suit la loi du χ^2 à n degrés de liberté.

$\boxed{6}$ Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $|\rho| < 1$. On pose $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$, $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$.

[a] Calculer la matrice de covariance de (Y_1, Y_2) ? Quelle est la loi jointe de (Y_1, Y_2) ? Les variables Y_1, Y_2 sont elles indépendantes ?

[b] Quelle est la loi de X_1? Quelle est celle de Y_1 ? Déduire de $\mathbb{E}(X_1^4)$ le moment d'ordre 4 de Y_1, puis calculer $\mathbb{E}(X_1^2 X_2^2)$.

[c] On pose $Z = X_1/X_2$. Calculer la loi de Z puis en déduire sans calcul celle de $1/Z$.

[d] Montrer alors que si X suit une loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ alors $1/X$ suit également une loi de Cauchy.

$\boxed{7}$ Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^t$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$, avec $X_1, ..., X_n$ indépendantes de même loi d'espérance m et de variance σ^2 finie. On pose $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. On suppose que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes. On appelle ϕ la f.c. des X_i.

[a] Soit $m = 0$. Calculer $\mathbb{E}(nS^2)$ en fonction de σ^2 et montrer que $\mathbb{E}(nS^2 e^{itn\bar{X}}) = (n-1)\sigma^2\phi^n(t)$ pour tout réel t. En déduire que ϕ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\phi''}{\phi} - (\frac{\phi'}{\phi})^2 & = -\sigma^2 \\ \phi(0) & = 1 \qquad \phi'(0) \ = 0 \end{cases}$$

En déduire que $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pour $i = 0, ..., n$.

[b] Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèses $m = 0$.

$\boxed{8}$ * **Convergence en loi de variables gaussiennes.** Soit (X_n) une suite de v.a.r. gaussiennes qui converge en loi vers une v.a.r. X dont la fonction caractéristique est strictement positive pour au moins un réel non nul. Montrer que X est elle-même gaussienne. Que valent sa moyenne et sa variance ?

$\boxed{9}$ * Soit (X_n) une suite de v.a.r. centrées non nulles. Elle est dite stationnaire si pour tous entiers $n, r_1, ..., r_n$ la loi du vecteur aléatoire $(X_{r_1+\alpha}, ..., X_{r_n+\alpha})$ est indépendante de l'entier positif α.

On posera $\sigma_j^2 = \mathbb{E}(X_j^2)$ et $\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j = \mathbb{E}(X_iX_j)$.

[a] Montre qu'une suite gaussienne (X_n) est Markovienne si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est réalisée.

(a) $\forall r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_r|X_0, ...X_{r-1}) = \mathbb{E}(X_r|X_{r-1})$.

(b) $\forall (i, r) \in \mathbb{N}^2$, tel que $i < r$, $\rho_{ir} = \rho_{i,r-1}\rho_{r-1,r}$.

(c) $\forall (i, j, r) \in \mathbb{N}^3$, tel que $i \le j < r$, $\rho_{ir} = \rho_{ij}\rho_{jr}$.

Indication Considérer la v.a.r. $Y_r = X_r - \mathbb{E}(X_r|X_{r-1})$.

[b] Montrer que la suite de v.a.r. centrées (X_n) est gaussienne et markovienne si et seulement si s'il existe une suite (Z_n) de v.a.r. gaussiennes centrées réduites telle que Z_1 soit indépendante de X_0 et pour tout entier $r \ge 2$, Z_r soit indépendante de $X_0, Z_1, ...Z_{r-1}$ avec $X_r = a_rX_{r-1} + b_rZ_r$, les a_r et b_r étant constantes. Dans le cas d'une suite stationnaire, déterminer X_r en fonction de $X_0, Z_1, ..., Z_r$.

[c] Lorsque (X_n) est gaussienne, markovienne et stationnaire, déterminer $\lim_{r\to\infty} \rho_{i,r}$

$\boxed{10}$ * **Estimateurs bayesiens.**

I On définit le couple aléatoire (X, M) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par la loi conditionnelle de X sachant $M = m$ est une loi de gauss $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et la loi de M est une loi de gauss $\mathcal{N}(m_0, \tau^2)$; m_0, σ^2 et τ^2 sont donnés ($\sigma > 0$, $\tau > 0$).

(a) Calculer $\mathbb{E}(M|X)$.

(b) Donner la loi conditionnelle de M sachant $X = x$ et la loi de X.

II On définit le triplet aléatoire (X, M, Γ) par la loi conditionnelle de X sachant $M = m, \Gamma = \gamma$ est une loi de gauss $\mathcal{N}(m, \gamma^2)$, la loi conditionnelle de M sachant $\Gamma = \gamma$ est une loi de Gauss $\mathcal{N}(m_0, t^2\gamma^{-1})$, la loi de Γ est une loi gamma $G(a, \lambda)$; m_0, t^2, a et λ sont données ($t > 0$, $a > 0$, $\lambda > 0$). Utiliser la question 1 pour

(a) Calculer $\mathbb{E}(M|X)$.

(b) Donner la loi conditionnelle de Γ sachant $X = x$ et de $\mathbb{E}(\Gamma|X)$.