Rattrapage

Une attention particulière sera portée à la rédaction. Tout devra être justifié soigneusement.

$\boxed{1}$ Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, et $X_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{\{B_m\}}$ avec $B_n \in \mathcal{F}_n$ $\forall n$.

[a] Montrer que X_n est une sous-martingale.

[b] Donner la décomposition de Doob de X_n.

[c] Particulariser au cas $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.

$\boxed{2}$
Soient $\xi_1, \xi_2, ...$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}(\xi_m) = 0$, et soit la martingale $X_n = \sum_{m=1}^{n} \xi_m$. On se donne $\lambda > 0$, et soit

$$P_n(\lambda) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq m\leq n} |X_m| \geq \lambda\right)$$

[a] On suppose les ξ_m de variance finie. Donner une majoration de $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à X_n^2.

[b] Améliorer la borne précédente en appliquant l'inégalité de Doob à $(X_n + c)^2$ et en optimisant sur c.

[c] On suppose que les ξ_m suivent une loi normale centrée réduite. Majorer $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à $e^{cX_n^2}$ et en optimisant sur c.

[d] Pour des ξ_m normales centrées réduites, majorer $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq m\leq n} X_m \geq \lambda\right)$ en appliquant l'inégalité de Doob à e^{cX_n} et en optimisant sur c.

$\boxed{3}$ On considère le jeu de hasard suivant. A chaque partie, le joueur lance un dé non pipé. S'il tire 1, il ne gagne rien, s'il tire 2, il gagne le montant de sa fortune ; s'il ne tire ni 1, ni 2, il perd toute sa fortune et se retrouve ruiné. S'il se retrouve ruiné, il reste ruiné. Soit $(X_n, n \geq 0)$ la fortune du joueur après n parties. On suppose que le joueur démarre avec une fortune initiale $X_0 = x$, $x > 0$ et qu'il y a indépendance entre les lancers.

[a] Expliquer pourquoi $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\mathbb{N}$ et déterminer sa matrice de transition P.

[b] Effectuer la classification des états : déterminer les classes de récurrence et les états transitoires. La chaîne est-elle irréductible ?

[c] Soit T_0 le premier instant non nul pour lequel la richesse du joueur s'annule. Déterminer $\mathbb{P}_x(T_0 = n)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{N}$.

[d] Calculer P^n.