Partiel N. 2

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

1 Concentration autour de 0 et de 1. On considère sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une suite de v.a. $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $[0, 1]$. On pose pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. On suppose que $X_0 = a$ p.s. avec $a \in [0, 1]$ et que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} | \mathcal{F}_n) = 1 - X_n \text{ et } \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} | \mathcal{F}_n) = X_n$$

- [a] Montrer que pour tout n , $\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \text{ ou } X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}) = 1$.
- [b] Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$ -martingale qui converge p.s. et dans L^p pour tout $p \geq 1$ vers une v.a. Z .
- [c] Montrer que $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n(1 - X_n))$.
- [d] En déduire la valeur de $\mathbb{E}(Z(1 - Z))$ puis la loi de Z .

2

Un joueur joue de la manière suivante. A l'instant 0, sa richesse est nulle. A chaque instant entier n , on note X_n la richesse du joueur ; il tire alors à Pile ou Face ; si $X_n \neq 0$ ou 10 et s'il a obtenu Pile (respectivement Face), alors le joueur gagne 1 euro (respectivement perd 1 euro) à la date $n + 1$; si $X_n = 0$ (respectivement si $X_n = 10$), alors le joueur gagne 1 euro (respectivement perd 1 euro) à la date $n + 1$ quelque soit le résultat du tirage.

La probabilité d'obtenir Pile à chaque tirage vaut $1/2$ et chaque tirage est indépendant.

- [a] Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov homogène d'espaces d'état $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$.
- [b] Donner sa loi initiale et calculer sa matrice de transition.
- [c] Calculer $\mathbb{P}(X_4 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_4 = i)$ pour $i > 4$.
- [d] Calculer $\mathbb{P}(X_4 < X_6 | X_4 = i)$ pour $i = 0$. En déduire $\mathbb{P}(X_4 < X_6)$.