Partiel N. 1

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

Dans ce partiel, vous pourrez utiliser le Corollaire suivant que l'on montrera en cours :

Corollaire 3.1 : Soit X une surmartingale (resp. une martingale) continue à droite et soient $S \leq T$ deux temps d'arrêt (déterministiquement) bornés. Alors

$$X_S \geq \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) \ \text{(resp. } X_S = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S)).$$

$\boxed{1}$ **Calcul d'espérances.**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration brownienne.

[a] Calculer pour tout couple (s,t) les quantités $\mathbb{E}(B_s B_t^2)$, $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s)$ et $\mathbb{E}(B_t|B_s)$

[b] Calculer $\mathbb{E}(B_s^2 B_t^2)$

[c] Quelle est la loi de $B_t + B_s$?

[d] Soit θ_s une v.a. bornée $\mathcal{F}_s$-mesurable. Calculer pour $t \geq s$, $\mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s))$ et $\mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s)^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(\theta_s)$.

$\boxed{2}$ **Fonction de répartition du maximum d'un pont brownien.**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration brownienne. On considère le pont brownien associé $Z_t = B_t - tB_1$, $0 \leq t \leq 1$, et on cherche la loi de la variable $U = \max_{t\in[0,1]} Z_t$ en calculant les quantités $F(a) = \mathbb{P}(U < a)$.

[a] Quelle est la loi de $Y_t = (1-t)B_{t/(1-t)}$, $0 \leq t < 1$ et $Y_1 = 1$?

[b] Soit $G : \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue bornée.
Montrer qu'on a la convergence suivante lorsque $\epsilon \to 0$:

$$\mathbb{E}\left(G(B)| \ \ |B_1| < \epsilon\right) \to \mathbb{E}(G(Z)).$$

[c] Que vaut $F(a)$ pour $a \leq 0$?

[d] On suppose désormais $a > 0$.
Montrer que $F(a) = 1 - \mathbb{P}(\exists s \in]0,1[,\ Z_s = a)$ puis prouver que $F(a) = 1 - \mathbb{P}(\exists t \in]0,\infty[,\ B_t - ta = a)$

[e] Soit $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t - ta = a\}$. Montrer que T_a est un temps d'arrêt et que $F(a) = 1 - \mathbb{P}(T_a < \infty)$.

[f] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $M_t := e^{\alpha B_t - \alpha^2 \frac{t}{2}}$. Montrer M_t est une martingale.

[g] Prouver que pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{E}(e^{2a(B_{t\wedge T_a} - a(t\wedge T_a))}) = 1$.

[h] Montrer que pour tout $t > 0$, on a : $B_{t\wedge T_a} - (t \wedge T_a)a \leq a$.
En déduire que $\mathbb{E}(e^{2a(B_{t\wedge T_a} - a(t\wedge T_a))}\mathbb{1}_{\{T_a<\infty\}}) = 1$.
Calculer alors $\mathbb{P}(T_a < \infty)$, puis $F(a)$; que vaut la fonction de répartition de U ?

$\boxed{3}$ **Convergence en loi.**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. On pose $S_1 = \sup_{t\in[0,1]} B_t$. Montrer que la convergence suivante a lieu en loi :

$$\left(\int_0^t e^{B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\to} e^{S_1}$$

Indication : on pourra penser à introduire pour $\omega \in \Omega$, $T(\omega) \in [0,1]$ tel que $B_{T(w)}(\omega) = S_1(\omega)$.