Partiel n°1 .

Durée: 1 heure.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Vous avez le droit à votre feuille bleue mais pas à la calculatrice.

$\boxed{1}$ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit ϕ le C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$ dans $\mathbb{R}_+^2$ défini par $\phi(u,v) = (\sqrt{u}\cos(v), \sqrt{u}\sin(v))$. On pose $(U,V) = \phi^{-1}(X,Y)$. On se propose d'etudier la loi du couple (U,V).

[a] Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Exprimer $\mathbb{E}(g \circ \phi^{-1}(X,Y))$ en fonction des densités de X et Y notées f_X et f_Y respectivement.

[b] A l'aide du changement de variable $(x,y) = \phi(u,v)$, montrer que

$$\mathbb{E}(g(U,V)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\frac{e^{-u/2}}{2}\mathbb{1}_{\{\mathbb{R}_+\}}(u)\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{\{(0,2\pi)\}}(v)dudv$$

[c] Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

[d] Determiner les lois de U et de V .

[e] Determiner la loi de $1 - \exp(-U/2)$.

[f] Proposer une procédure permettant de simuler des paires de nombres aléatoires distribués selon une loi normale centrée réduite dans le plan à partir d'une source de nombres aléatoires de loi uniforme. Cette méthode est appelée méthode de Box-Muller.

$\boxed{2}$ Soient $X = (X_1, ..., X_d)$ et $Y = (Y_1, ..., Y_d)$ deux vecteurs aléatoires gaussiens centrés sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, supposés indépendants et de même loi. Pour tout réel , soient $X(\theta) = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)$ et $\tilde{X}(\theta) = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta)$ démontrer que pour tout θ , $X(\theta)$ et $\tilde{X}(\theta)$ sont des vecteurs aléatoires gaussiens indépendants de même loi que X.

$\boxed{3}$ Soit le modèle d'échantillonage suivant : $X_1, ..., X_n$ *i.i.d.* de loi $\mathcal{Q}_\theta$, $\theta > 0$ où $\mathcal{Q}_\theta$ est la loi de exponentielle de paramètre $\sqrt{\theta}$.

Le paramètre d'intérêt est θ.

[a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.

[b] Est-ce que le modèle est identifiable ? Dominé ?

[c] Soit $\hat{\theta}_1 := \frac{1}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2}$. Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_1$?

[d] Donner un intervalle de confiance à 90 pourcent de θ en utilisant $\hat{\theta}_1$.

[e] Question Bonus : Calculer le moment d'ordre 2 de la loi $\mathcal{Q}_\theta$, et en déduire un estimateur par la méthode des moments noté $\hat{\theta}_2$. Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_2$?

[f] Montrer la propriété d'absence de mémoire d'une loi exponentielle.

$\Phi(t) = P(X \leq t)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997