Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2020-2021
Nathalie Krell Statistiques

Partiel n°1 .

Durée: 1 heure.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Vous avez le droit à votre feuille verte mais pas à la calculatrice.

$\boxed{1}$ Soit le modèle d'échantillonage suivant : $X_1, ..., X_n i.i.d.$ de loi $\mathcal{Q}_\theta$, $\theta > 0$ où $\mathcal{Q}_\theta$ est la loi exponentielle de paramètre θ^2.

Le paramètre d'intérêt est θ.

[a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.

[b] Est-ce que le modéle est identifiable ? Dominée ?

[c] Soit $\hat{\theta}_1 := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}}$. Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_1$?

[d] Donner un intervalle de confiance à 90 pourcent de θ en utilisant $\hat{\theta}_1$.

[e] Calculer le moment d'ordre 2 de la loi $\mathcal{Q}_\theta$, et en déduire un estimateur par la méthode des moments noté $\hat{\theta}_2$.

[f] Soit $\hat{\theta}_3 := \left(\frac{2}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2)}\right)^{1/4}$. Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_3$?

[g] Calculer l'espérence de $\hat{\theta}_1$. La réponse attendue peut comporter des fonctions gamma.

[h] Question Bonus Cet estimateur $\hat{\theta}_1$ est-il biaisé ? Est-il asymptotiquement sans biais.

$\boxed{2}$ Dans cet exercice $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^t$ désigne un vecteur gaussien de moyenne $(0, 0, 0, 0)^t$ et de matrice de variance-covariance identité.

[a] Quelle est la loi du vecteur $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)^t$? Quelle est la loi de $(X_1 - X_2)^2/2 + (X_1 + X_2)^t 2/2$

[b] Quelle est la loi du vecteur $\frac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$?

[c] Quel est le projeté orthogonal $P_E(X)$ de X sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 1, 0, 0)^t$ et $(0, 0, 1, 1)^t$?

[d] Quelle est la loi de $||P_E(X)||^2$? Quelle est la loi de $\frac{||P_E(X)||^2}{||X-P_E(X)||^2}$?

$\boxed{3}$ Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré, avec $\mathbb{E}(X^2) = 4$ et $\mathbb{E}(Y^2) = 1$, et tel que les variables $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

[a] Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).

[b] Montrer que le vecteur $(X + Y, 2X - Y)$ est également gaussien, puis déterminer sa matrice de covariance.

$$\Phi(t) = P(X \leq t) \text{ pour } X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997